El propósito de esta hoja es probar tres fórmulas que involucran la *función theta de Jacobi*, la cual se define como la serie

$$\theta(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2\pi i n z} \qquad \text{con} \quad z\in\mathbb{C} \quad \text{y} \quad |q|<1.$$

Consideraremos aquí que q es un parámetro y z es la variable, así cuando nos refiramos en esta hoja a la derivada de θ, a sus ceros, a su holomorfía o a cualquier otra propiedad, debemos entender estos conceptos para $f(z)=\theta(z,q)$ con q fijado. Por razones que aparecerán en breve, se suele escribir

$$q=e^{\pi i\tau} \quad \text{con} \quad \Im(z)>0 \qquad \text{y se define} \quad \omega=\frac{1+\tau}{2}.$$

¿Ves claro que todo $|q|<1$ se escribe de esta forma? Hay cierta ambigüedad en la definición de τ y ω porque τ y $\tau+2k$ dan el mismo q, pero es irrelevante en lo sucesivo.

En todo tu trabajo pasamos de puntillas por los temas de convergencia de sucesiones y series de funciones holomorfas, continuando la política de la hoja anterior, porque pertenecen a Variable Compleja II que no has cursado[1]. De todas formas, da una oportunidad a este primer ejercicio:

1) Piensa con el nivel de rigor que permitan tus conocimientos por qué $\theta(z,q)$ define una función entera. Incluso si no consigues probarlo, trata de convencerte de que intuitivamente es cierto.

Históricamente $\theta(z,q)$ surgió en la teoría de *funciones elípticas* que son funciones meromorfas 1-periódicas que también tienen un periodo complejo τ. Aunque $\theta(z,q)$ no es exactamente elíptica (siempre como función en z), guarda cierta simetría por traslaciones de 1 y τ, que es lo que motiva introducir τ.

2) Comprueba las relaciones

$$\theta(z+1,q)=\theta(z,q) \qquad \text{y} \qquad \theta(z+\tau,q)=q^{-1}e^{-2\pi i z}\theta(z,q).$$

Hay algunas otras simetrías que permiten localizar ceros de la función y su derivada.

3) Comprueba también

$$\theta(z,q)=\theta(-z,q), \qquad \theta\big(\frac{1}{2}+z,q\big)=\theta\big(\frac{1}{2}-z,q\big), \qquad \theta(\omega+z,q)=-e^{-2\pi i z}\theta(\omega-z,q)$$

y deduce $\theta'(0,q)=\theta'(1/2,q)=0$ y $\theta(\omega+m+n\tau,q)=0$ para $m,n\in\mathbb{Z}$.

[1]Si lo deseas, al final podemos poner en un apéndice el enunciado de los resultados necesarios.

Es posible probar con técnicas de Variable Compleja I que $\omega + m + n\tau$ son todos los ceros de la función y que son simples. Esto llevaría a dar un rodeo y aquí lo deduciremos del primero de nuestros enunciados principales. Antes de pasar a ellos, terminemos estas manipulaciones previas relacionando algunos valores especiales de derivadas logarítmicas que serán útiles más adelante.

4) Comprueba las igualdades

$$\frac{\theta'(\tau,q)}{\theta(\tau,q)} = -2\pi i = \frac{\theta'(1/2+\tau,q)}{\theta(1/2+\tau,q)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\theta'(1/4+\omega,q)}{\theta(1/4+\omega,q)} + 2\pi i = -\frac{\theta'(3/4+\omega,q)}{\theta(3/4+\omega,q)}$$

Ahora vamos con los tres resultados que conforman los objetivos principales de esta hoja. En la próxima, veremos algunas de sus consecuencias, especialmente aritméticas.

El primero, es una sorprendente factorización de $\theta(z,q)$ como producto infinito, conocida como *fórmula del triple producto de Jacobi*:

$$\theta(z,q) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1-q^{2n}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big). \tag{1}$$

El segundo resultado está relacionado con la teoría de *formas modulares* (ciertas funciones holomorfas en el semiplano superior con muchas simetrías). Permite cambiar el parámetro q de cierta manera:

$$\theta(z,q) = (-i\tau)^{-1/2} e^{-\pi iz^2/\tau}\theta(z/\tau, q_*) \qquad \text{con} \quad q_* = e^{-\pi i/\tau}. \tag{2}$$

Nota que $\Im(\tau) > 0$ implica $|q_*| < 1$ y no hay problemas de definición. Por otro lado, $\Re(-i\tau) > 0$ y para calcular $(-i\tau)^{-1/2}$ se supone la determinación del ángulo habitual, de forma que el resultado también esté en el semiplano derecho. En la siguiente hoja (2) servirá para probar una importante simetría de la función ζ

El último resultado es una expresión alternativa para el valor en $z = 0$ de la función theta de Jacobi:

$$\theta^2(0,q) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}}. \tag{3}$$

En la próxima hoja veremos su relación con las sumas de cuadrados. El segundo miembro es un ejemplo de *serie de Lambert*, un tipo de series que tuvieron su apogeo en teoría de números en el primer cuarto del siglo XX.

Para el primer resultado seguiremos una prueba elemental salvo que, como en lo anterior, dejaremos fuera cierto punto acerca de la convergencia. La prueba habitual clásica es más difícil y elegante. La puedes leer en [2], si tienes curiosidad. Una prueba en cierto modo todavía más elemental porque no necesita nada de convergencia está en [1], pero utiliza algo de combinatoria que no te será familiar.

5) Sea $p_m(w)$ el m-ésimo producto parcial en (1) renombrando $w = e^{2\pi i z}$. Esto es,

$$p_m(w) = \prod_{n=1}^{m} \big(1 - q^{2n}\big)\big(1 + q^{2n-1}w\big)\big(1 + q^{2n-1}w^{-1}\big).$$

Comprueba que $\big(1 + q^{2m+1}w\big)p_m(w) = \big(qw + q^{2m}\big)p_m\big(q^2 w\big)$.

6) Claramente al operar $p_m(w)$ los coeficientes de w^n y de w^{-n} son iguales. Llamémoslos $\lambda_m(n)$. Es decir, escribamos $p_m(w) = \lambda_m(0) + \sum_{n=1}^{m} \lambda_m(n)\big(w^n + w^{-n}\big)$. Muestra que $\lambda_m(m) = q^{m^2} \prod_{n=1}^{m} \big(1 - q^{2n}\big)$ y, usando el ejercicio anterior,

$$\lambda_m(n) = \frac{q^{2n-1}\big(1 - q^{2(m-n+1)}\big)}{1 - q^{2(m+n)}}\lambda_m(n-1) \qquad \text{para} \quad 1 \le n \le m.$$

7) De lo anterior, obtén por inducción

$$\lambda_m(n) = q^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} \big(1 - q^{2(m-k)}\big) \cdot \prod_{k=n+1}^{m} \big(1 - q^{2(m+k)}\big) \qquad \text{para} \quad 0 \le n \le m$$

donde, como es habitual, se conviene que un producto vacío es igual a 1.

Tomando límites se sigue

$$\lim_{m\to\infty} p_m(w) = \ell(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(n)\big(w^n + w^{-n}\big) \qquad \text{con} \quad \ell(n) = \lim_{m\to\infty} \lambda_m(n).$$

Este es el punto que requeriría alguna justificación porque estamos intercambiando el límite y la suma. Daremos por supuesto que no hay ningún problema. Si quieres completarlo, la justificación detallada está en [6, §8.3].

8) Explica por qué $\ell(n) = q^{n^2}$ y concluye (1).

Veamos ahora la consecuencia respecto a los ceros.

9) Si z es de la forma $\omega + m + n\tau$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, prueba que anula exactamente a uno de los factores en el producto (1) y lo hace con multiplicidad uno. Recíprocamente, todo z que anula un factor, es de esa forma.

Uno podría dudar lícitamente si con el producto infinito se pueden crear ceros nuevos que no anulen a los factores. Tal situación es imposible (ya aplicamos algo de esto en la hoja anterior) gracias a un teorema de convergencia de funciones enteras, llamado *teorema de Hurwitz*. Si quieres, puedes consultar su enunciado en [3].

Hay otras dos consecuencias de (1) que merece la pena resaltar por su propio interés y porque serán relevantes para (3).

10) Tomando derivadas logarítmicas en (1), deduce como corolario

$$\frac{\theta'\big(1/4+\omega,q\big)}{\theta\big(1/4+\omega,q\big)} = \pi(1-i) + 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1+q^{4n}},$$

que será útil para obtener (3). Lee en [2] (tras el Teorema 2) y escribe con tus palabras o deduce por tu cuenta la prueba de la relación

$$\theta'(\omega,q) = \pi i\theta(0,q)\theta(1/2,q)\theta(\tau/2,q). \tag{4}$$

Si decides hacer la prueba sin consultar nada, nota que obtener $\theta'(\omega,q) = 2\pi i\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3$ no es difícil, porque en el producto infinito hay un factor que se anula en ω y es el único que hay que derivar.

El segundo resultado principal es una consecuencia de la llamada *fórmula de sumación de Poisson* [4], [5, §2.7] que quizá no te hayan contado en el grado, por ello solo utilizaremos los rudimentos de las series de Fourier que me dijiste que sí habías visto.

Para $z\in\mathbb{C}$ y $t>0$ fijados considera la función $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ definida como

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n+x)z-\pi(n+x)^2t}.$$

Te recomiendo que te expliques a ti mismo por qué es 1-periódica y trates de justificar, aunque sea intuitivamente, que es C^∞.

Según la teoría, F es igual a su desarrollo de Fourier, que convergerá a toda velocidad debido a la regularidad:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx} \qquad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}\,dx.$$

11) Prueba las igualdades

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(z-n)x}e^{-\pi x^2t}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(z-n)x/\sqrt{t}}e^{-\pi x^2}\,dx$$

y

$$a_n\sqrt{t}\,e^{\pi(z-n)^2/t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(x-i(z-n)/\sqrt{t}\right)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1.$$

Sustituyendo estos coeficientes en el desarrollo de Fourier y tomando $x = 0$, concluye (2) para $\tau = it$ con $t > 0$.

12) Apelando al principio de unicidad [7], explica por qué (2) se deduce para $\Im(\tau) > 0$ general a partir del caso imaginario puro del ejercicio anterior.

La prueba de (3) es más complicada, requiriendo (1) y técnicas de variable compleja. Es un poco más cómodo deducir (3) con q reemplazado por q^2 y así lo haremos aquí. Por supuesto, no se pierde generalidad porque los cuadrados de los números complejos de módulo menor que 1 vuelven a dar todos los números complejos de módulo menor que 1.

13) Sean f y g dos funciones enteras con todos su ceros simples. Explica por qué la función $F = \big(\log \frac{f}{g}\big)'$, sea cual sea la rama del logaritmo, es meromorfa con polos, todos ellos simples, en los ceros no comunes de f y g, siendo el residuo 1 si son ceros de f y -1 si lo son de g.

14) Sea F la función del ejercicio anterior con $f(z) = \theta(z,q)$ y $g(z) = \theta(z+1/2,q)$. Apelando a resultados anteriores, justifica

$$F(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad F(1/4+\omega) = \frac{2\theta'(1/4+\omega,q)}{\theta(1/4+\omega,q)} + 2\pi i = 2\pi + 8\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1+q^{4n}}.$$

Consideremos ahora la función meromorfa

$$G(z) = -2q\frac{\theta'(1/2+\tau,q^2)}{\theta(1/2,q^2)}\cdot\frac{\theta(2z-1/2-\tau,q^2)}{e^{2\pi iz}\theta(2z-1/2,q^2)}.$$

A pesar de su complicado aspecto, nota que lo que precede a la última fracción no depende de z, es una constante para normalizar.

15) Prueba que tanto F como G son invariantes por los cambios $z \mapsto z+1$ y $z \mapsto z+\tau$, que ambas tienen los mismos polos situados en $z = \tau/2 + m/2 + n\tau$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, con residuos $(-1)^{m-1}$. Indicación: Una vez que has probado la invariancia y que has localizado los polos, basta con que estudies el residuo de $z = \omega$ y en $z = \tau/2$. Su cálculo no debería llevar prácticamente ninguna cuenta. Si no entiendes por qué, pídeme ayuda.

16) Según lo anterior, $F(z)-G(z)$ es una función entera (los polos se cancelan). Comprueba que $G(0) = 0$ y deduce del teorema de Liouville que $F(z) = G(z)$. Finalmente, tomando $z = 1/4+\omega$ deduce (3), con q^2 en lugar de q, de (4) y de la fórmula para $F(1/4+\omega)$.

Nota que en (4) al cambiar q por q^2 también se modifican $\tau/2$ y ω, convirtiéndose respectivamente en τ y $1/2+\tau$.

Un pequeño comentario histórico es que el teorema que realmente enunció Liouville está más cerca del ejercicio anterior que de lo que se enseña bajo este nombre en los cursos actuales de variable compleja. Lo que él afirmó es que las funciones enteras con dos periodos tenían que ser constantes.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine los ejercicios anteriores de la manera que consideres conveniente para probar (1), (2) y (3). Soy consciente de que la hoja ha quedado larga. Intenta no superar mucho las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla a costa de no incluir detalles de cálculos rutinarios. El resultado conformará un segundo capítulo de tu TFG llamado *La función theta de Jacobi* o la variante que se te ocurra.

Referencias

[1] G. E. Andrews. A simple proof of Jacobi's triple product identity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:333–334, 1965.

[2] F. Chamizo. Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/files/ell_th.pdf`, 2018.

[3] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf`, 2019.

[4] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials Matemàtics*, pages 1–27, 2017. `https://mat.uab.cat/web/matmat/v2017n02/`.

[5] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[6] L. K. Hua. *Introduction to number theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982. Translated from the Chinese by P. Shiu.

[7] Wikipedia contributors. Identity theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Identity_theorem&oldid=1168073046`, 2023. [Online; accessed 9-October-2023].