En esta última hoja vamos a introducir primero los principios más básicos de la mecánica cuántica. Después veremos que en un ejemplo sencillo se produce una periodicidad que formalmente es similar a la del efecto Talbot óptico. Finalmente estudiaremos algo acerca de la estructura fractal de la alfombra de Talbot correspondiente, lo cual constituye el grueso de la hoja y la parte más complicada.

La ecuación fundamental de la mecánica cuántica básica es la *ecuación de Schrödinger*, que tiene la forma general $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$ donde H es un operador llamado *hamiltoniano* relacionado con la energía que depende del problema físico y $\hbar$ la *constante de Planck reducida* que en el sistema internacional está cerca de $1{,}05 \cdot 10^{-34}$. Para una partícula cuántica de masa m que se mueve en un espacio unidimensional bajo la acción de un potencial V, el hamiltoniano es el operador $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$. Es decir, la ecuación de Schrödinger es en este caso:

$$i\hbar\Psi_t = -\frac{\hbar^2\Psi_{xx}}{2m} + V\Psi. \tag{1}$$

Aquí Ψ es una función compleja de x, espacio, y t, tiempo (por otro lado el potencial V tanto en la física clásica como en la cuántica es una función real). Ahora bien, ¿qué significa la función Ψ? Aunque parezca absurdo, la ecuación anterior se obtuvo antes de saber responder correctamente a esta pregunta. Después se postuló la interpretación actual, que para cada t fijo, $|\Psi(x,t)|^2$ indica la densidad de probabilidad de detectar la partícula en la posición x. Para que esto tenga sentido, debemos partir de una condición inicial $f(x) = \Psi(x,0)$ que esté *normalizada*, es decir, que $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = 1$ y probar que la probabilidad no desaparece, esto es, que la normalización se conserva a lo largo del tiempo. Vamos a comprobar esto último (si quieres más detalles sobre ello o se te atascan estos dos primeros ejercicios, mira por ejemplo [9, §6]).

1) A partir de (1) prueba que

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\hbar}{m}\Im(\overline{\Psi}\Psi_x)\Big).$$

Aquí $\Im$ indica la parte imaginaria y $\overline{\Psi}$ el conjugado de Ψ.

2) Deduce de esta fórmula que si Ψ y Ψ_x son regulares y tienden lo suficientemente rápido a cero cuando $x \to \infty$, entonces $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,t)|^2\, dx$ es una función constante del tiempo. Así pues, si en el instante inicial Ψ está normalizada, lo estará siempre.

La ecuación de Schrödinger es una *ecuación dispersiva*. Esto significa que ondas de diferentes frecuencias tienen diferentes velocidades. Como el nombre indica, normalmente esto hace que las soluciones se dispersen y la distribución de probabilidad tienda a uniformizarse en algún sentido según avanza el tiempo. Sin embargo, a veces hay una periodicidad exacta o aproximada en el tiempo y con cierta frecuencia se recuperan las condiciones iniciales. En esa situación se habla de *efecto Talbot cuántico* o de *resurgimiento cuántico* (*quantum revival*, en inglés).

Vamos a considerar un ejemplo muy sencillo en el que aparece este resurgimiento cuántico. Para simplificar y no estar arrastrando constantes físicas, suponemos $\hbar = 1$ (a veces se llama a esto *unidades naturales*) e imponemos $V = 0$ (se dice que es una *partícula libre*). Además escogemos $m = \pi$. Finalmente, imaginamos que nuestra partícula está confinada a un anillo de longitud 1, lo que matemáticamente se traduce en que solo vamos a considerar soluciones 1-periódicas en x. Con todo esto (1) se convierte en:

$$2\pi i \Psi_t + \Psi_{xx} = 0, \qquad \text{con} \quad \Psi(x,t) = \Psi(x+1,t). \tag{2}$$

La condición de normalización ahora solo hay que pedirla en un intervalo de longitud 1. Por ejemplo, $\int_{-1/2}^{1/2} |\Psi(x,0)|^2\,dx = 1$. La conservación de la probabilidad se sigue cumpliendo con un argumento similar al del ejercicio anterior.

3) Sea f una función 1-periódica regular. Siguiendo los pasos de la hoja anterior, prueba mediante separación de variables que la solución de (2) bajo la condición inicial $\Psi(x,0) = f(x)$ es $\Psi(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e(nx - n^2 t)$ donde a_n son los coeficientes de Fourier de f y que se tiene la siguiente versión del efecto Talbot fraccionario:

$$\Psi\Big(x, \frac{a}{q}\Big) = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} G(-a,-m;q)\, f\Big(x + \frac{m}{q}\Big).$$

Indicación: Considera $X(x)T(t)$ con X que sea 1-periódica y procede como en la hoja anterior.

El resurgimiento cuántico (efecto Talbot cuántico) es para este ejemplo el hecho trivial de que $\Psi(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e(nx - n^2 t)$ es 1-periódica en t. Si pensamos en términos clásicos, esto suena natural: una partícula que se mueve en un anillo sin la acción de fuerzas ($V = 0$) describe trayectorias periódicas.

En el caso del efecto Talbot clásico, considerábamos una condición inicial que era discontinua, la función característica de la red de difracción, lo que causa que el estudio de la convergencia (que no abordamos en la hoja anterior) no sea nada trivial. Otra cuestión es que las derivadas que aparecen en la ecuación paraxial pierden su sentido cuando no hay regularidad suficiente. Estos mismos problemas aparecen en el caso cuántico. Hay técnicas matemáticas para dar algún significado a estas manipulaciones (soluciones débiles, teoría de distribuciones) en las que no entraremos. Lo que vamos a ver para terminar tu trabajo es que nuestro ejemplo bajo condiciones de baja regularidad da lugar a gráficas fractales, de dimensión fraccionaria. Esto aparece con más generalidad, aunque no demasiado rigor, en los artículos[1] [3], [2], [1] (trabajos con rigor matemático, como [5] son más difíciles de leer).

[1] Están en `https://michaelberryphysics.wordpress.com/publications/`, si tienes curiosidad.

4) Considera $f(x)=2\sqrt{3}\big(\frac{1}{2}-|x|\big)$ en $J=\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]$ que está normalizada en este intervalo, es decir, $\int_J |f|^2=1$. Comprueba que los coeficientes de Fourier de su extensión 1-periódica vienen dados por $a_0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $a_n=\frac{1-(-1)^n}{\pi^2n^2}\sqrt{3}$ para $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$.

Del ejercicio anterior se deduce que la función de ondas correspondiente a la condición inicial dada por la extensión periódica de f es

$$\Psi(x,t)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z},\,2\nmid k}\frac{e(kx-k^2t)}{k^2}.$$

El resto de la hoja está dedicado a comprobar que la gráfica de $\Psi(0,t)$ es un fractal, no tiene dimensión entera. Para reducir la notación, escribamos

$$F(t)=\Psi(0,-t)\qquad \text{y}\qquad \Gamma=\text{gráfica de } F\big|_{[0,1]}=\big\{(t,F(t))\,:\,t\in[0,1]\big\}.$$

Daría igual para lo que vamos a hacer poner t en lugar de $-t$ porque solo aplica una simetría a la gráfica y, por supuesto, fijar el intervalo $[0,1]$ o cualquier otro de longitud 1 es irrelevante.

Comenzamos por el concepto de dimensión. Dividimos el intervalo $I=[0,1]$ en $N\in\mathbb{Z}_{>1}$ intervalos iguales $I_\ell=\big[\frac{\ell}{N},\frac{\ell+1}{N}\big]$, $0\le\ell\le N-1$. Se define la *dimensión fractal*, también llamada *de Minkowski* o *por cajas*, de Γ o de la gráfica de cualquier función acotada $F:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ como el límite

$$\dim(\Gamma)=\lim_{N\to\infty}\frac{\log\big(N+N\sum_{\ell=0}^{N-1}\Delta_\ell\big)}{\log N}\quad\text{con}\quad \Delta_\ell=\sup_{\substack{t\in I_\ell,\,u\in I\\ |t-u|<N^{-1}}}\big|F(t)-F(u)\big|.$$

El límite, y por tanto la dimensión, podría no existir, pero siempre existirán el límite inferior y el límite superior llamados dimensión inferior y dimensión superior, denotados con $\underline{\dim}(\Gamma)$ y $\overline{\dim}(\Gamma)$. La pregunta natural es en qué sentido esto refleja el concepto intuitivo de dimensión. No lo veremos aquí. Solo diré que está relacionado con el número de cuadraditos de lado N^{-1} que se necesitan para recubrir la gráfica. Si quieres incluir algo al respecto en tu trabajo o citar referencias, da un vistazo por ejemplo a [7] o [6, §3.1, §11.1].

El siguiente ejercicio no depende de nuestro ejemplo. Es sencillo, solo para familiarizarte con la definición.

5) Demuestra que $1\le\underline{\dim}(\Gamma)\le\dim(\Gamma)\le\overline{\dim}(\Gamma)\le 2$ para cualquier F acotada.

Veamos también que las gráficas con alguna regularidad tienen dimensión 1, como es lógico. Lo raro es que haya gráficas que tengan dimensión mayor.

6) Prueba que si F fuera una función diferenciable en I con derivada acotada, entonces se cumpliría $\dim(\Gamma)=1$. Indicación: Usa el teorema del valor medio para obtener $\overline{\dim}(\Gamma)\le 1$.

Diremos que Γ es fractal si $\dim(\Gamma) \in (1,2)$, es decir, si su dimensión no es entera. Para nuestra F se puede demostrar la existencia de $\dim(\Gamma)$, pero no lo haremos aquí, por tanto, extenderemos el concepto diciendo que Γ es fractal si $\underline{\dim}(\Gamma)$ y $\overline{\dim}(\Gamma)$ están ambas en $(1,2)$.

Escribimos

$$F(t) - F(u) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{2\nmid |k| \le \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{2\nmid |k| > \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2}.$$

7) Utilizando el teorema del valor medio para la parte real e imaginaria en el primer sumatorio y la desigualdad[2] $\sum_{k=M}^{\infty} k^{-2} \le (M-1)^{-1}$ para $M \in \mathbb{Z}_{>1}$ en el segundo sumatorio, muestra que $\sqrt{N}\Delta_k$ está uniformemente acotado para $N \in \mathbb{Z}_{>1}$ y $0 \le k < N$. Concluye con ello que $\overline{\dim}(\Gamma) \le 3/2$.

Ahora nos ocuparemos de dar una cota inferior para $\underline{\dim}(\Gamma)$, lo cual es bastante más difícil. Sigo esencialmente [4]. Para simplificar la notación introducimos el conjunto de primos

$$\mathcal{P}_N = \Big\{ \frac{3}{4}\sqrt{N} < q < \sqrt{N} \, : \, q \text{ primo}, \, q \equiv 3 \pmod{4} \Big\}$$

y para cada q en este conjunto,

$$\mathcal{R}_q = \big\{ 0 < a < q \, : \, a \equiv r^2 \pmod{q} \quad \text{para algún } r \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Es un hecho bien conocido en teoría de números que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\mathcal{P}_N \log N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

No intentes probarlo porque no es fácil. En tu trabajo pon como referencia por ejemplo el artículo clásico [8], aunque no es muy legible. En realidad con algo mucho más débil y elemental nos bastaría, pero no nos entretendremos con esto.

8) Prueba que cada I_k contiene a lo más una fracción a/q con $q \in \mathcal{P}_N$ y $a \in \mathcal{R}_q$. Con ello, deduce las desigualdades

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k \ge \sum_{q \in \mathcal{P}_N} |S_q| \ge \sum_{q \in \mathcal{P}_N} \Im S_q \qquad \text{con} \quad S_q = \sum_{a \in \mathcal{R}_q} \Big(F\Big(\frac{a}{q}\Big) - F\Big(\frac{a}{q} + \frac{1}{2q^2}\Big)\Big). \tag{4}$$

Indicación: Si $a/q \ne a'/q'$ entonces $|a/q - a'/q'| \ge (qq')^{-1}$.

Nuestro objetivo es aproximar $\Im S_q$. Para ello hay que utilizar una consecuencia no trivial de lo que sabes de sumas de Gauss. A ver si se te ocurre.

[2] Se sigue de $k^{-2} < (k-1)^{-1} - k^{-1}$.

9) Para $q \in \mathcal{P}_N$ demuestra las igualdades

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\Big(\frac{n^2 a}{q}\Big) = \sum_{r=1}^{(q-1)/2} e\Big(\frac{r^2}{q}\Big) = \frac{-1 + i\sqrt{q}}{2} \qquad \text{si} \quad q \nmid n,$$

mientras que para $q \mid n$ la primera suma es $(q-1)/2$.

10) Usando el ejercicio anterior, prueba

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}} \Im S_q = \sqrt{q} \sum_{2 \nmid k,\, q \nmid k} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}^2\Big(\frac{\pi k^2}{2q^2}\Big) + \frac{1}{2} \sum_{2 \nmid k,\, q \nmid k} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi k^2}{q^2}\Big).$$

11) Hay $(q+1)/4$ números impares en $(q/2, q]$ cuando $q \in \mathcal{P}_N$. Deduce de ello que el primer sumatorio es mayor que $\frac{q+1}{2q^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8}$. Para el segundo sumatorio emplea $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ cuando $|k| \le q$ y $\sum_{|k|>q} k^{-2} < q^{-1}$. Con todo ello, deduce que existe una constante $C > 0$, que no hace falta que calcules, tal que $\sqrt{q}\, \Im S_q \ge C$ para todo $q \in \mathcal{P}_N$ si N es suficientemente grande.

12) Finalmente, sustituyendo en (4) y utilizando (3), obtén $\underline{\dim}(\Gamma) \ge 5/4$.

Entre la cota para la dimensión inferior $5/4 = 1{,}25$ y la cota para la superior $3/2 = 1{,}5$ no hay ningún entero, por tanto estamos ante un objeto fractal. Como te he dicho, con un análisis más cuidadoso se puede probar que el límite existe y, de hecho, $\dim(\Gamma) = 5/4$.

Tarea a entregar. Como es habitual, debes componer un documento que conecte las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión recomendada es de 7 páginas. Sé escueto con los cálculos. Si, aun así, se te quedan muy cortas, mi sugerencia es sustituir por referencias los dos ejercicios de mecánica cuántica básica y los dos de propiedades generales de la dimensión. El documento resultante conformará el cuarto capítulo de tu TFG bajo el título *Resurgimiento cuántico*, o la variante que prefieras. No sé si queda más atrayente mencionar la palabra *fractal*.

Referencias

[1] M. V. Berry. Quantum fractals in boxes. *J. Phys. A*, 29(20):6617–6629, 1996.

[2] M. V. Berry. Quantum and optical arithmetic and fractals. In *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)*, volume 24 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 281–294. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

[3] M. V. Berry and S. Klein. Integer, fractional and fractal Talbot effects. *J. Modern Opt.*, 43(10):2139–2164, 1996.

[4] F. Chamizo and A. Córdoba. Erratum: "The fractal dimension of a family of Riemann's graphs" [C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), no. 5, 455–460;]. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(5):649–650, 1995.

[5] V. Chousionis, M. B. Erdoğan, and N. Tzirakis. Fractal solutions of linear and nonlinear dispersive partial differential equations. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(3):543–564, 2015.

[6] K. Falconer. *Fractal geometry.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2003. Mathematical foundations and applications.

[7] E. Pearse. An introduction to dimension theory and fractal geometry: fractal dimensions and measures. `https://pi.math.cornell.edu/~erin/docs/dimension.pdf`, 2003.

[8] A. Selberg. An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions. *Canad. J. Math.*, 2:66–78, 1950.

[9] B. Zwiebach. Quantum physics I. MIT OpenCourseWare, `https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/`, 2016.