Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `PF23hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

Antes de comenzar repasemos cierta notación por si no te es familiar. Cuando pensamos en una onda unidimensional, a menudo pensamos en un “tono puro”, un seno o un coseno con esta estructura:

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\big(2\pi(kx-\nu t)\big).$$

Aquí $\nu > 0$ es la *frecuencia*, el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo. Su contrapartida espacial es $|k|$, el *número de ondas*, y su inverso $\lambda = |k|^{-1}$ es la *longitud de onda*, cuyo nombre se explica a sí mismo. Para librarse del $2\pi$, en física muchas veces se da más protagonismo a $\omega = 2\pi\nu$, que se llama *frecuencia angular* y en el lado espacial también se considera el número de ondas angular $2\pi k$. Un pequeño lío es que en muchas de las áreas de la física teórica se le llama también $k$. Aquí evitaré referirme a las magnitudes angulares.

El primer ejercicio es un poco tonto y puedes reflejarlo o no, a tu gusto, en tu trabajo.

**1)** Se llama *velocidad (de fase)* de la $u$ anterior a $v_p = \nu/|k|$. Explica en qué sentido es la velocidad de la onda y por qué el signo $k$ indica la dirección en la que se mueve.

Ahora vamos a entender que el fenómeno de la difracción es medianamente natural con el modelo imperfecto de que cuando la luz llega a una pequeña rendija cada punto de ella se comporta como un nuevo foco de luz de donde parten “rayos ondulatorios” en todas las direcciones. Lee la primera página de [3] y observa la figura de la derecha. ¿Ves claro que en la dirección $\alpha$ en la que se verifica $\delta \operatorname{sen}\alpha = \lambda/2$ hay una interferencia destructiva?

**2)** Caracteriza con ecuaciones, siguiendo la misma filosofía del modelo, todas las direcciones en las que hay interferencias destructivas y todas en las que hay interferencias constructivas.

Como he dicho, este modelo es imperfecto, no se ajusta del todo a la realidad física, especialmente porque el principio de Huygens es falso, es solo una aproximación. En términos matemáticos no es cierto que las soluciones de la ecuación de ondas se construyan de esa manera. Por otro lado, no estamos considerando la atenuación de la intensidad de las ondas. El sentido común y la experiencia nos dicen que no vamos a encontrar zonas de luz muy claras lejos de la rendija.

Los senos y cosenos desempeñan muchas veces el mismo papel al estudiar ondas, lo cual es lógico porque un coseno es solo un seno desplazado. Desde el punto de vista matemático, los desarrollos de Fourier también justifican que los senos y cosenos deben aparecer juntos. Para no duplicar las fórmulas, tanto en matemáticas como en física, se utiliza el artificio de usar ondas complejas aprovechándose de la relación

$$e^{2\pi i\alpha} = \cos(2\pi\alpha) + i\,\text{sen}(2\pi\alpha).$$

En física cuántica las ondas complejas son algo más intrínseco, pero en otras áreas son, como digo, solo un artificio para que las fórmulas sean más compactas y siempre podríamos pasar a ondas reales tomando partes reales o imaginarias. Para no escribir todo el rato un $2\pi i$, en vez de considerar magnitudes angulares, una notación que se emplea en algunas áreas de las matemáticas (y que usaré aquí) es

$$e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}.$$

Ciertamente, no todas las ondas van a ser tan simples como $e(kx - \nu t)$, la generalización compleja del tono puro anterior. Sin embargo, con artefactos físicos (filtros) o matemáticos (análisis de Fourier) es posible centrarse en una frecuencia. Las funciones del tipo $u(x,t) = g(x)e(-\nu t)$ se dice que son *ondas monocromáticas*. El nombre viene de que en el caso de la luz, la frecuencia indica el color. La luz se difracta de forma cuantitativamente diferente dependiendo del color (los brillos de colores que se observan en un DVD son prueba de ello), por eso parece lógico en centrarse en cada frecuencia por separado.

Como ya sabrás, la ecuación de ondas unidimensional para velocidad $c$ es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

**3)** Muestra que todas las ondas monocromáticas que resuelven la ecuación de ondas son del tipo $u(x,t) = A_1\, e(kx - \nu t) + A_2\, e(-kx - \nu t)$ con velocidad de fase $c$, esto es, $k = \nu/c$.

En realidad, la solución general de la ecuación de ondas unidimensional cuando no hay condiciones de contorno es bien fácil, como seguramente sepas, se reduce a $f(x-ct) + g(x+ct)$ con $f$ y $g$ funciones arbitrarias. Como ejercicio para ti mismo, piensa cuáles serían $f$ y $g$ para la solución monocromática anterior.

En tres dimensiones las cosas se complican, esencialmente porque ya no solo hay dos direcciones que solo permitan ir a la derecha o a la izquierda, sino que hay infinitas. Dentro de la teoría, son especialmente importante las *ondas (monocromáticas) esféricas*. Como el nombre sugiere, son aquellas constantes en cada esfera centrada espacial, esto es,

$$u(\vec{r},t) = g(r)\, e(-\nu t) \qquad \text{con } \vec{r} = (x,y,z), \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Uno puede definir ondas esféricas en otras dimensiones poniendo el número de coordenadas que necesite. No sé si ves claro que las ondas del ejercicio anterior son todas las ondas esféricas en una dimensión. La buena noticia es que el caso tridimensional se puede reducir al unidimensional. El siguiente ejercicio seguramente te lleva a recordar o a aprender algo del laplaciano en esféricas. La ecuación de ondas en tres dimensiones es

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \qquad \text{con} \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

**4)** Demuestra que si $u(\vec{r}, t)$ es una onda esférica solución de la ecuación de ondas tridimensional en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, entonces $rg(r)$ es una onda esférica unidimensional en el sentido que cumple $u_{tt} = c^2 u_{rr}$. Deduce de ello que todas las ondas esféricas en tres dimensiones vienen dadas por

$$A_1 \frac{e(kr - \nu t)}{r} + A_2 \frac{e(-kr - \nu t)}{r} \qquad \text{con} \quad k = \frac{\nu}{c}.$$

Ahora comenzamos por fin con la teoría matemática de la difracción debida a G. Kirchhoff, un físico del siglo XIX. Este es el tema principal de esta hoja. El resto tendrá bastante de leer y redactar con tus palabras. El punto de partida es una fórmula de cálculo vectorial llamada a veces *teorema integral de Kirchhoff* (en [1] se le llama *fórmula de Helmholtz*, porque sirve para resolver la ecuación de Helmholtz [4]). Está en el Teorema 2 de [3]. Ahora no me gusta nada la notación que usé en todo ese documento y te animo a modificarla a tu gusto. Por ejemplo, en [5] está escrita de manera más atractiva.

**5)** Escribe un enunciado y la prueba del teorema integral de Kirchhoff intentando explicar los puntos que te parezcan poco claros en [3] e incluyendo una prueba de la fórmula (3) que aparece allí.

Por si te resultan más legibles, hay también pruebas en [1, §I.4.2] y en [2, §8.3.1]. Ambos están en la biblioteca y quizá sean accesibles de alguna forma en la web. No te sientas obligado a consultarlos.

El teorema integral de Kirchhof relaciona la onda consigo misma y eso no parece demasiado útil. Lo que a uno le gustaría es tener una fórmula para la onda a secas que mostrase que se difracta. Necesariamente tendría que participar también la forma de la rendija que causa la difracción. Con este fin, se hacen ciertas aproximaciones que son creíbles desde el punto de vista físico y que concuerdan bien con lo que se ve en los experimentos. A los matemáticos siempre nos cuesta admitir cosas que no son completamente ciertas, así que deberás tener un poco de tolerancia para la siguiente tarea. En [2, §8.3.2] quizá las explicaciones de las aproximaciones sean más convincentes, si tienes ocasión de mirarlo.

**6)** Lee la parte de [3] desde el final de la prueba del resultado de Kirchhoff hasta el final de la página 6. Cuando lo entiendas, escríbelo con tus propias palabras y la notación que prefieras (posiblemente mejor que la que aparece allí) añadiendo las explicaciones adicionales que consideres convenientes.

Si sigues leyendo un poco hasta la fórmula (8), verás que lo que se hace habitualmente para aproximar la integral (6) es una aproximación de Taylor de la *fase*, el argumento de la exponencial compleja. De nuevo eso te puede dar un escalofrío matemático, pero concuerda bien con lo que se ve en los experimentos. Las aproximaciones de orden 1 dan lugar a la llamada *difracción de Fraunhofer* y las de orden dos a la llamada *difracción de Fresnel*. La primera es una especie de versión mejorada del modelo imperfecto que consideramos al comienzo, mientras que la segunda es un refinamiento más difícil de ver experimentalmente y lleva a cálculos complicados. Creo que escribir la teoría con las explicaciones adicionales y el resto de las tareas de la hoja ya te va a llevar bastante espacio, por tanto desarrollaremos algunos cálculos de ambos tipos de difracción en la próxima hoja junto con resultados de sumas e integrales oscilatorias. Para tener preparado el camino, termina con este ejercicio que calcula la aproximación de Taylor hasta orden 2. Es como lo que aparece en la llave de la página 7 de [3] salvo que allí no se indican explícitamente los términos de orden 2.

**7)** Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}$ alrededor de $(0,0)$, donde $(x_0,y_0,z_0)$ es un vector constante. Sugiero que uses en el desarrollo la abreviatura $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

Quizá te parezca conveniente ilustrar la bondad de la aproximación cerca del origen usando el polinomio anterior para aproximar por ejemplo los valores $f(0.1, 0.2)$ y $f(0.3, -0.3)$, u otros que se te ocurran, cuando $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$.

---

**Tarea a entregar.** Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre siempre que no superes las 6 o, a lo más, 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *La teoría matemática de la difracción* o algo parecido. Quizá no es muy sensato poner un título que mencione a Fraunhofer y Fresnel, como aparece en el esbozo del temario que está en la web. Intenta que el resultado sea legible por cualquier estudiante de matemáticas. No escatimes en explicaciones de la motivación y de los puntos que juzgues más delicados.

---

## Referencias

[1] B. B. Baker and E. T. Copson. *The mathematical theory of Huygens' principle.* Chelsea Publishing Co., New York, third edition, 1987.

[2] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press, Oxford-New York-Paris, revised edition, 1965. With contributions by A. B. Bhatia, P. C. Clemmow, D. Gabor, A. R. Stokes, A. M. Taylor, P. A. Wayman and W. L. Wilcock.

[3] F. Chamizo. Matemáticas de la difracción y su interpretación física. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/difraction.pdf`, 2013.

[4] H. Helmholtz. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. *J. Reine Angew. Math.*, 57:1–72, 1860.

[5] Wikipedia contributors. Kirchhoff's diffraction formula — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kirchhoff%27s_diffraction_formula&oldid=1159662355`, 2023. [Online; accessed 12-September-2023].