En esta última hoja vamos a abordar algunos aspectos del caso general de la representación de un número como suma de un número par de cuadrados. Como te dije, el caso impar es muy diferente y no lo trataremos en tu trabajo. Además probaremos un resultado de Ramanujan sobre el caso de 24 cuadrados.

La forma modular θ^{2k} tiene peso k, que podría ser impar, así que aunque solo vayamos a ocuparnos de $r_\ell(n)$ con $\ell = 2k$ par, estamos forzados a generalizar nuestra definición de series de Eisenstein admitiendo pesos impares. Para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ definimos

$$G_{\theta,k}(z) = i^{-k} \sum_{2\nmid c} \sum_{2\mid d} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(c+1)k}}{(cz+d)^k} + \sum_{2\nmid d} \sum_{2\mid c} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k}}{(cz+d)^k}$$

donde c y d recorren los enteros.

1) Prueba que cambiando k por $2k$ se obtiene la definición de la hoja 3. Es decir, realmente es una generalización.

Por supuesto, un punto crucial es comprobar que esta extensión de la definición sigue siendo modular.

2) Demuestra que $G_{\theta,k}(T^2z) = G_{\theta,k}(z)$ y $G_{\theta,k}(Sz) = (z/i)^k G_{\theta,k}(z)$. Es decir, $G_{\theta,k}$ es una función modular con respecto a Γ_θ con el mismo sistema de multiplicadores que θ^{2k}.

El desarrollo de Fourier de $G_{\theta,k}$ se calcula de la misma forma que hiciste en la hoja 3, solo que ahora los cálculos son más feos. Como no aporta nada nuevo y tampoco es fundamental para nuestros propósitos, te sugiero que simplemente reproduzcas en tu trabajo el siguiente desarrollo de Fourier señalando que se calcula de manera similar al obtenido para k par en la hoja 3:

$$G_{\theta,k}(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e(nz/2) \qquad \text{donde} \quad a_0 = 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{rk}}{(2r+1)^k}$$

y el resto de los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2\pi^k n^{k-1}}{(k-1)!} \Bigg(\sum_{\substack{d\mid n \\ 2\nmid d}} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k} d^{1-k} + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \sum_{\substack{d\mid n \\ n/d+k \text{ par}}} (-1)^{\frac{1}{2}(n/d+k)} d^{1-k} \Bigg).$$

No es del todo obvio (aunque tampoco tan difícil) ver que para k par se recupere la fórmula para a_n vista en la hoja 3. Sin embargo, estamos seguros de que debe ser así por el primer ejercicio. También en el caso impar se demuestra de la misma manera que $e(-z/2)G_{\theta,k}(\gamma_1 z)/z^k$ tiene límite finito cuando $\Im z \to \infty$ y no lo haremos aquí.

Llamemos $\mathcal{M}_{\theta,k}$ al espacio vectorial formado por las formas modulares de peso k con respecto a Γ_θ con el mismo sistemas de multiplicadores que θ^{2k}. Según lo que hemos visto $\theta^{2k}, G_{\theta,k} \in \mathcal{M}_{\theta,k}$. Para $k = 1$, la serie $G_{\theta,k}$ no converge pero el desarrollo de Fourier sigue teniendo perfecto sentido y coincide con el de $\pi G - \frac{\pi}{2}$ con G como en la hoja anterior, por tanto, redefiniendo a_0 como $a_0 + \frac{\pi}{2}$, este desarrollo de Fourier también pertenece a $\mathcal{M}_{\theta,k}$.

3) Sabiendo que $\dim \mathcal{M}_{\theta,k} = 1$ para $1 \le k \le 4$, demuestra $r_{2k}(n) = \frac{a_n}{a_0}$ para este rango de k (con la redefinición indicada para $k = 1$).

El ejercicio anterior nos da todas las fórmulas de la hoja anterior y una más, la de $r_6(n)$. Por supuesto, no es una prueba independiente pues para mostrar $\dim \mathcal{M}_{\theta,k} = 1$ tendríamos que repetir argumentos similares a los hechos allí. Veamos una consecuencia indirecta de la existencia de una fórmula para r_6.

4) Utilizando $a_0 r_{2k}(1) = a_1$ para $k = 3$, determina el valor de $1^{-3} - 3^{-3} + 5^{-3} - 7^{-3} + 9^{-3} - \dots$

Por las propiedades que ya conocíamos para k par y las que hemos citado para $k > 1$ general, sabemos que

$$f(z) = \theta^{2k}(z) - \frac{1}{a_0} G_{\theta,k}(z)$$

está en $\mathcal{M}_{\theta,k}$ y que $e(-z/2)f(z)$ y $e(-z/2)f(\gamma_1 z)/z^k$ tienen límite finito cuando $\Im z \to \infty$. Sus coeficientes de Fourier miden el error al aproximar $r_{2k}(n)$ por a_n/a_0. Es decir, se tiene, obviamente,

$$r_{2k}(n) = \frac{a_n}{a_0} + c_n \qquad \text{donde} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e(nz/2).$$

Hay fórmulas [8, §7.1] para $\dim \mathcal{M}_{\theta,k}$ que muestran que es mayor que 1 si $k > 4$, por tanto parece una casualidad muy grande que $f = 0$ para algún k en este rango. De hecho, se conoce que esta casualidad no ocurre nunca [7], es decir, la igualdad $r_{2k}(n) = a_n/a_0$ solo se cumple para $1 \le k \le 4$. Habida cuenta de que no hay bases de $\mathcal{M}_{\theta,k}$ con coeficientes de Fourier muy explícitos, parece que las fórmulas "exactas" se acaban en r_8. En realidad, como te explicaré en un breve epílogo, hay todavía algo de margen dependiendo de lo exigente que uno sea.

Ahora vamos a renunciar a las fórmulas exactas en favor de otras aproximadas. Nota que para $k > 2$ los sumatorios en la fórmula para a_n están acotados. Con ello se puede deducir que a_n/n^{k-1} está entre dos constantes positivas. Lo que vamos a probar es que c_n, con n grande, tiene siempre un tamaño mucho menor. Es decir, en el rango $k > 4$ en que $r_{2k}(n) \ne a_n/a_0$ todavía a_n/a_0 es una buena aproximación. Concretamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{2k}(n)}{a_n/a_0} = 1 \qquad \text{y, de hecho,} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\left| r_{2k}(n) - a_n/a_0 \right|}{n^{k/2}} < \infty.$$

Nuestro objetivo es demostrar $|c_n| \le K n^{k/2}$ para cierta constante K, lo cual es consecuencia de los tres ejercicios siguientes y da inmediatamente los límites anteriores. La aproximación es numéricamente buena para n grande y valores moderados de k. Para que te hagas una idea,

$$r_{24}(101) = 258\,331\,314\,292\,899\,028\,896 \qquad \text{y} \qquad \frac{a_{101}}{a_0} = 2{,}58\,331\,310\ldots \cdot 10^{20}.$$

Esto es, una aproximación de 8 cifras significativas.

5) Demuestra que $g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(z) = |\Im(z)|^{k/2}|f(z)|$ satisface $g(z) = g(\gamma z)$ para todo $\gamma \in \Gamma_\theta$.

6) Demuestra que g está acotada en $\mathbb{H}$. Indicación: Piensa en lo que ocurre en el dominio fundamental recordando que $e(-z/2)f(z)$ y $e(-z/2)f(\gamma_1 z)/z^k$ están acotadas para $\Im(z)$ grande.

7) Sea c el segmento en $\mathbb{H}$ que va de i/n a $2 + i/n$. Justifica

$$|c_n| = \frac{1}{2}\Big| \int_c f(z)\, e(-nz/2)\, dz \Big| \le e^{\pi} n^{k/2} \sup_{z\in\mathbb{H}} \big|g(z)\big|$$

obteniendo de esta forma el resultado esperado con $K = e^{+\pi} \sup |g|$.

Pasamos ahora al tema final de la hoja que es una fórmula de Ramanujan para r_{24}. Recuerda la función discriminante Δ de la hoja 2. Sus coeficientes de Fourier que son lo que hoy se llama *función τ de Ramanujan*. Es decir, τ es la función aritmética $\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida mediante

$$\Delta(z) := e(z) \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - e(nz)\big)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e(nz).$$

Con un poco de paciencia se tiene $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = -24$ y $\tau(3) = 252$. Ya te dije que Ramanujan estudió esta función y enunció unas conjeturas que han tenido un gran impacto en la teoría de formas modulares y su aplicación en la teoría de números. Finalizó su famoso artículo[1] [6] con una fórmula exacta para r_{24} en términos de divisores y de τ. Propongo acabar también tu trabajo dando una prueba de ella.

La fórmula en cuestión es:

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\Big(\sum_{d|n} d^{11} - 2 \sum_{2d|n} d^{11} + 2^{12} \sum_{4d|n} d^{11} \Big) - \frac{2^7}{691}\big(2^9 \tau(n/2) + (-1)^n 259 \tau(n)\big)$$

donde se entiende que el término $\tau(n/2)$ no aparece si n es impar. Con la notación anterior, la fórmula equivale a $c_n = -\frac{2^7}{691}\big(2^9\tau(n/2) + (-1)^n 259\tau(n)\big)$, como quedará claro tras el siguiente ejercicio.

Para peso 12 se tiene (recuerda la hoja 3) $a_0 = 2\zeta(12)\big(1 - 2^{-12}\big)$ que se puede evaluar con métodos de variable compleja como $a_0 = \frac{691\pi^{12}}{8\cdot 11!}$. Este valor lo puedes dar por supuesto citando una referencia (por ejemplo [9]). El siguiente ejercicio es muy similar a los de la hoja anterior en que había que hacer simplificaciones elementales, aunque no obvias.

[1]Si tienes curiosidad, hay una transcripción en `http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram18.html`.

8) Demuestra que la fórmula de Ramanujan para r_{24} se deduce de la identidad:

$$\theta^{24}(z) - \frac{1}{a_0} G_{\theta,12}(z) + \frac{2^7}{691}\Big(2^9\Delta(z) + 259\Delta\big(\frac{z+1}{2}\big)\Big) = 0.$$

Llamemos F a la función del primer miembro.

9) Demuestra que F es una forma modular de peso 12 con respecto al grupo Γ_θ. Indicación: Lo único que no es inmediato con lo que ya sabes es que $\Delta\big(\frac{z+1}{2}\big)$ es modular. Para ello intenta relacionar $\frac{S(z)+1}{2}$ con $\gamma\big(\frac{z+1}{2}\big)$ para algún $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

10) Con la notación de la fórmula de valencia de la hoja anterior, prueba $n_\infty(F) \ge 3$ usando $\tau(1) = 1$ y $\tau(2) = -24$.

11) Explica por qué $n_1(F) \ge 1$ y concluye que F es idénticamente nula, deduciéndose la fórmula de Ramanujan.

A modo de epílogo, te cuento algo en relación con fórmulas más explícitas. Es posible expresar τ como una convolución de funciones divisor. De hecho te lo iba proponer en esta hoja, pero creo que ya tiene suficientes contenidos. Si quieres explorarlo, mira [3, §1.6] y [1, Ex. 3.20]. Un avance medianamente reciente es que en 2002 se probó [4], [5] que también hay fórmulas (muy complicadas) que solo involucran divisores para $r_{2k}(n)$ cuando k es de la forma $2\ell^2$ o $2\ell(\ell+1)$. En [2, §9.6] hay fórmulas para $r_{10}(n)$ y $r_{12}(n)$ donde c_n se escribe en términos de formas modulares relativamente conocidas.

Tarea a entregar. Escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Intenta no excederte de 6 páginas. El documento debe dar lugar a un quinto y último capítulo de tu TFG llamado *Acerca del caso general* o la variante que se te ocurra.

Referencias

[1] H. Cohen. An introduction to modular forms. arXiv:1809.10907 [math.NT], 2018.

[2] E. Grosswald. *Representations of integers as sums of squares*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[4] S. C. Milne. Infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions. *Ramanujan J.*, 6(1):7–149, 2002.

[5] K. Ono. Representations of integers as sums of squares. *J. Number Theory*, 95(2):253–258, 2002.

[6] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions [Trans. Cambridge Philos. Soc. **22** (1916), no. 9, 159–184]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 136–162. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

[7] R. A. Rankin. Sums of squares and cusp forms. *Amer. J. Math.*, 87:857–860, 1965.

[8] R. A. Rankin. *Modular forms and functions*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977.

[9] Wikipedia contributors. Particular values of the Riemann zeta function — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function&oldid=1185241818`, 2023. [Online; accessed 13-February-2024].