Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `ML23hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

Los protagonistas de esta hoja son

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \big\{\gamma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \,:\, \det(\gamma) = 1\big\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Im(z) > 0\},$$

donde $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ indica las matrices enteras 2×2. También se definen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ de manera análoga permitiendo que los elementos de las matrices sean números reales o enteros módulo N. Está claro que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ is un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y por tanto hereda sus propiedades.

Se define la siguiente acción de de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}$:

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{para cada} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

El denominador de $\gamma(z)$ aparece continuamente en la teoría de formas modulares y recibe el nombre especial $j_\gamma(z)$. Es decir, $j_\gamma(z) = cz + d$. En términos geométricos su módulo mide cómo se deforman las alturas, según el primer ejercicio. Un significado geométrico más preciso se indica en [3, §2.1].

1) Si $z \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, muestra que

$$\Im\big(\gamma(z)\big) = \frac{\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}$$

y concluye que la acción anterior está bien definida sobre $\mathbb{H}$. Es decir, que pasa elementos de $\mathbb{H}$ a elementos de $\mathbb{H}$.

Si consideramos el conjunto formado por las semicircunferencias en $\mathbb{H}$ con centro en el eje real y las semirrectas verticales (que son como semicircunferencias de radio infinito), es decir,

$$\mathcal{G} = \big\{x + iy \in \mathbb{H} \,:\, (x - x_0)^2 + y^2 = R^2,\ x_0 \in \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}^+\big\} \cup \big\{x_0 + iy \in \mathbb{H} \,:\, x_0 \in \mathbb{R}\big\},$$

resulta que cada $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ aplica $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$. Esto debiera ser conocido de Variable Compleja I. Aunque no es difícil de probar, si no lo has visto, dalo por supuesto. Una vez sabido, es muy fácil hallar imágenes de elementos de $\mathcal{G}$ estudiando la imagen de sus extremos ya que cada elemento de $\mathcal{G}$ está determinado por sus dos extremos (uno de ellos ∞ en el caso de de las semirrectas).

2) Calcula la imagen de la semicircunferencia unidad centrada en el origen por las transformaciones $z \mapsto (3z+5)/(z+2)$ y por $z \mapsto (2z+1)/(z+1)$.

Un problema más complicado es la invariancia de la medida $d\mu(z) = y^{-2}\,dxdy$ por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donde x e y son la parte real e imaginaria de z. Si no se te ocurre cómo resolver el siguiente ejercicio, pídeme alguna pista. No es necesario meterse en cálculos complicados.

3) Prueba que $d\mu(z) = y^{-2}\,dxdy$ es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Por si te ayuda verlo de forma más explícita, esto significa que si $x_1 + iy_1 = \gamma(x_2 + iy_2)$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ entonces para cada región compacta $\mathcal{R} \subset \mathbb{H}$,

$$\int_{\gamma(\mathcal{R})} \frac{dx_1\,dy_1}{y_1^2} = \int_{\mathcal{R}} \frac{dx_2\,dy_2}{y_2^2}.$$

Lo crucial es que pienses en el jacobiano.

Existe una métrica en $\mathbb{H}$, llamada *métrica de Poincaré*, que induce la medida $d\mu$ y tal que los elementos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dan todas sus isometrías directas, en particular esto implica que la medida es invariante. Por otro lado, con la métrica de Poincaré es fácil ver que la semirrecta $s = \{iy : y > 0\}$ es una geodésica. De $\mathcal{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})s$ se sigue que todos los elementos de $\mathcal{G}$ son geodésicas y como para cada par de puntos en $\mathbb{H}$ hay un elemento de $\mathcal{G}$ que los conecta, de hecho, $\mathcal{G}$ es el conjunto de todas las geodésicas. Si no sabes la suficiente geometría para entender este párrafo, olvídalo. Si tienes curiosidad acerca del aspecto de la métrica, mira [5].

Ahora nos centraremos en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y algunos subgrupos. Antes de ello, una observación sobre la notación por si lees algo que te haga dudar. Algunos autores llaman directamente *grupo modular* a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y otros al grupo de transformaciones $\gamma(z)$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. No son isomorfos porque γ y $-\gamma$ actúan de la misma forma sobre $\mathbb{H}$. Por ello, otros más rigoristas llaman grupo modular a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$, que permite identificar matrices salvo signos con transformaciones.

Un resultado importante y relativamente sencillo es que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que representan una traslación unidad y una inversión actuando sobre $\mathbb{H}$.

4) Notando que

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad T^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cn & b+dn \\ c & d \end{pmatrix},$$

demuestra que para cualquier $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con $\gamma_{11}\gamma_{21} \neq 0$, el valor de $\text{mín}\big(|\gamma_{11}|, |\gamma_{21}|\big)$ se puede reducir premultiplicando por T^nS o por T^n, eligiendo un $n \in \mathbb{Z}$ adecuado.

5) Si $\gamma_{11}\gamma_{21} = 0$, prueba que $\gamma \in \langle T, S\rangle$.

6) Deduce de los ejercicios anteriores $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S\rangle$.

Dos generalizaciones de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ son

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

y

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

con $N \in \mathbb{Z}^+$. Claramente $\Gamma(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con igualdad para $N = 1$ (en ese sentido son generalizaciones) e inclusiones estrictas para $N > 1$. De hecho, ambos son subgrupos de índice finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

7) Comprueba que $\Gamma_0(N)$ y $\Gamma(N)$ son realmente subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comprueba también que si $N > 1$ entonces $\Gamma_0(N)$ no es normal y $\Gamma(N)$ sí lo es. Lo primero se puede hacer con un ejemplo de $\gamma^{-1}\Gamma_0(N)\gamma \neq \Gamma_0(N)$ y una prueba sencilla de lo segundo es pensar en el núcleo de la proyección $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ consistente en tomar módulo N.

Un concepto importante asociado a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y sus subgrupos de índice finito es el de *dominio fundamental*. En este caso, te voy a dejar que consultes la bibliografía, por ejemplo, [1, §4.3], [2, §2.3], [3, §1.5], [4, §1.5], [6, §1.2]. Si eliges la última opción (por cierto, una de las mejores referencias que conozco de formas modulares), también está en la red en la web del autor.

8) Escribe, unos párrafos explicando qué es un dominio fundamental y conteniendo la prueba de que $\mathcal{D} = \big\{ z \in \mathbb{H} \,:\, |z| \geq 1,\ |\Re(z)| \leq 1/2 \big\}$ es dominio fundamental para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

9) Demuestra que $\big[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, \Gamma_0(2)\big] = 3$ probando la descomposición en unión (disjunta) de cogrupos

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST$$

y explica por qué $\mathcal{D} \cup S\mathcal{D} \cup ST\mathcal{D}$ es dominio fundamental de $\Gamma_0(2)$.

Un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ importante para tu trabajo es

$$\Gamma_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, \text{con } a + d \text{ y } b + c \text{ pares} \right\},$$

llamado a veces *θ-grupo* por razones que aparecerán más tarde.

10) Demuestra que

$$\Gamma_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, a \equiv d \equiv 1 - b \equiv 1 - c \pmod{2} \right\}$$

y deduce que Γ_θ es realmente un subgrupo.

11) Prueba que $\Gamma_0(2)$ y Γ_θ son subgrupos conjugados. Concretamente,

$$\Gamma_\theta = \gamma_0^{-1}\Gamma_0(2)\gamma_0 \qquad \text{con} \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) Utiliza el ejercicio anterior para hallar un dominio fundamental de Γ_θ.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre siempre que no superes las 6 o, a lo más, 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Trata de sintetizar omitiendo los cálculos o detalles que no aporten mucho. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *El grupo modular y algunos de sus subgrupos* o la variante que se te ocurra.

Referencias

[1] H. Cohen and F. Strömberg. *Modular forms*, volume 179 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. A classical approach.

[2] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.

[3] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[4] M. Masdeu. Modular forms. `https://mat.uab.cat/~masdeu/teaching/`, 2015.

[5] Wikipedia contributors. Poincaré half-plane model — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Poincar%C3%A9_half-plane_model&oldid=1155587333`, 2023. [Online; accessed 14-September-2023].

[6] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.