

La *fórmula de sumación de Poisson* es una fórmula del análisis de Fourier que tiene aplicaciones en áreas muy diversas (mira [1] si tienes curiosidad). Aquí vamos a considerar dos de ellas bastante rápidas porque con los problemas de extensión acumulados, es mejor reducir esta última hoja en la medida de lo posible.

Antes de comenzar debes recordar o aprender la definición de la *transformada de Fourier*, que es una especie de análogo de los coeficientes de Fourier para funciones no periódicas $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ que tienen decaimiento en el infinito:

$$\widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} dx_1 dx_2 \cdots dx_d$$

donde $\vec{\xi} \cdot \vec{x}$ es el producto escalar. En particular, $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$ para $d = 1$. La *fórmula de inversión* [2], que emplearás en la segunda aplicación, afirma que la transformada de Fourier de $\widehat{f}(-\vec{\xi})$ recupera la función f . Utilizaremos también la notación

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{y} \quad \text{sinc}(x) = 1.$$

La importancia de esta función continua, a veces llamada *seno cardinal*, radica en que es la transformada de Fourier de una función sencilla.

Todo lo que necesitamos saber sobre el cálculo explícito de transformadas de Fourier para esta hoja es relativo a $d = 1$ y está recogido en el siguiente problema. Puedes dar por conocido que $e^{-\pi x^2}$ coincide con su transformada [2, §2.5], el resto lo debes hacer desde primeros principios, pero sin extenderte en los cálculos.

1) Comprueba que si χ es la función característica de $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (la que vale 1 en I y 0 fuera), se tiene $\widehat{\chi}(\xi) = \text{sinc}(\xi)$. Calcula las transformadas de Fourier de $g(x) = e^{-a^2(x-b)^2}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y de la *función tienda* $T(x) = \max(1 - |x|, 0)$ expresando esta última en términos de sinc.

Se dice que Λ es un *retículo* en \mathbb{R}^d si $\Lambda = \{n_1 \vec{v}_1 + \cdots + n_d \vec{v}_d \text{ con } n_j \in \mathbb{Z}\}$ para ciertos vectores fijados $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \in \mathbb{R}^d$ linealmente independientes. De una manera más concisa, un retículo es un conjunto de la forma $A\mathbb{Z}^d$ con $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ (las matrices $d \times d$ no singulares). Se llama *covolumen* de Λ a $V(\Lambda) = |\det(A)|$ (las barras son de valor absoluto) y *retículo dual* a $\Lambda^* = (A^t)^{-1}\mathbb{Z}^d$. La motivación del primer nombre está explicada en [6] y la del segundo está clara si recuerdas cómo calculabas la base dual en primero.

Teorema 1 (Fórmula de sumación de Poisson). *Si Λ es un retículo y f está en la clase de Schwartz (de funciones de decaimiento rápido) se cumple*

$$\sum_{\vec{r} \in \Lambda} f(\vec{r}) = \frac{1}{V(\Lambda)} \sum_{\vec{r} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{r}).$$

En realidad pedir que f esté en la clase de Schwartz es una exageración. Por densidad se cumple con mucha menos regularidad y no nos preocuparemos por ello en nuestras aplicaciones para mayor brevedad (quizá es conveniente que lo menciones). Todo lo que se necesita es que f y \widehat{f} decaigan lo suficiente para que las series del enunciado y de la prueba converjan absolutamente. Si quieres incluir en tu trabajo algo de la historia de la fórmula, en particular cómo la probó Poisson para $d = 1$, está explicado al final de [1].

2) Demuestra que basta probar la identidad del Teorema 1 para $\Lambda = \mathbb{Z}^d$, esto es, si se cumple para \mathbb{Z}^d se cumple para cualquier retículo en \mathbb{R}^d . Indicación: Aplica la fórmula en \mathbb{Z}^d a la función $f(\vec{x}) = g(A\vec{x})$.

Ahora consideramos

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{x} + \vec{m}).$$

Esta función es 1-periódica en cada coordenada y por tanto admite un desarrollo de Fourier en cada una de ellas.

3) Usando la fórmula de los coeficientes de Fourier, prueba

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{I^d} \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{\xi} + \vec{m}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{n}} d\xi_1 \cdots d\xi_d e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}} \quad \text{con } I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{\xi}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{n}} d\xi_1 \cdots d\xi_d e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

y tomando $\vec{x} = \vec{0}$ concluye la prueba del Teorema 1. Indicación: Para la segunda igualdad intercambia la integral y la suma interior y haz un cambio $\vec{\xi} \mapsto \vec{\xi} - \vec{m}$.

En teoría de números se utiliza a veces el Teorema 1 para contar de una manera no convencional que puede ser más ventajosa. Comencemos con un ejemplo que involucra el número de representaciones como suma de cuadrados (de enteros), la función aritmética

$$r_d(N) = \{ \vec{n} \in \mathbb{Z}^d : N = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_d^2 \}.$$

4) Deduce de la fórmula de sumación de Poisson con $f(\vec{x}) = e^{-\pi\alpha\|\vec{x}\|^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e^{-\pi\alpha n} = \alpha^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e^{-\pi n/\alpha} \quad \text{para } \alpha > 0.$$

Nota que para α pequeño la primera suma es costosa de aproximar computacionalmente porque converge muy lento, mientras que la segunda lo hace muy rápido.

La primera aplicación con nombre es un resultado de H. Minkowski dentro de la llamada *geometría de números*, no tan famosa como otros teoremas relacionados (que quizá te suenen) probados por él en este campo que combina geometría y aritmética.

Proposición 2 (Minkowski). *Sea A una matriz real $d \times d$ con $0 < \det(A) < 1$, entonces existe un vector entero $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $0 \neq \|A\vec{n}\|_\infty < 1$.*

Con la pista que se indica, deberías ser capaz de dar una prueba muy breve. Recuerda que la norma infinito $\|\vec{x}\|_\infty$ es $\max_j \{|x_j|\}$.

5) Deduce la Proposición 2 aplicando el Teorema 1 a la función $f(\vec{x}) = T(x_1)T(x_2) \cdots T(x_d)$ en el retículo $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ y observando que $f(\vec{0}) = \hat{f}(\vec{0}) = 1$.

Lo siguiente es una aplicación famosa, pero sencilla, del caso $d = 1$ que tiene su motivación en la ingeniería. A efectos prácticos, en varios contextos se puede suponer que el contenido en frecuencias de una señal se limita a cierto intervalo. En términos matemáticos se manifiesta en que su transformada de Fourier tiene soporte compacto. Un teorema de C. E. Shannon [4] (en realidad había sido probado mucho antes [5]) afirma que “muestreando” la señal (examinando periódicamente sus valores) podemos reconstruirla totalmente si la frecuencia de muestreo es suficientemente grande.

Teorema 3 (de muestreo de Shannon). *Sea f tal que $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ y \hat{f} tiene soporte incluido en $[-B, B]$, $B > 0$. Si $\nu \geq 2B$ entonces se cumple*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu) \operatorname{sinc}(\nu t - n).$$

En [3] hay muchos comentarios históricos sobre este teorema y otros relacionados.

6) Deduce la identidad $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(u + n\nu) = \nu^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i n u / \nu}$ donde $u \in \mathbb{R}$ es un parámetro arbitrario del caso $\Lambda = \mathbb{Z}$ del Teorema 1. Esta es la fórmula de Poisson en progresiones aritméticas.

7) Explica por qué bajo las hipótesis del Teorema 3 al multiplicar por $\chi(u/\nu) e^{2\pi i u t}$ la identidad anterior, con χ como en el primer problema, se obtiene

$$e^{2\pi i u t} \hat{f}(u) = \nu^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) \chi(u/\nu) e^{2\pi i (\nu t - n) u / \nu}.$$

Integra en $u \in \mathbb{R}$ y deduce el Teorema 3 de la fórmula de inversión y de lo que sabes de χ .

Terminamos analizando cómo funciona el Teorema 3 en un ejemplo aproximado.

8) Comprueba que la transformada de Fourier de $f(x) = 2e^{-\pi(4x+1)^2} - 2e^{-\pi(4x-1)^2}$ es $\hat{f}(\xi) = i \operatorname{sen}(\pi\xi/2) e^{-\pi\xi^2/16}$ y explica por qué $|\hat{f}(\xi)|$ es más de cien veces menor que su máximo si $\xi \notin [-5, 5]$.

Una vez que sabemos que \hat{f} se parece mucho a una función soportada en $[-5, 5]$. El Teorema 3 sugiere que podemos reconstruir f bastante bien siempre que la frecuencia de muestreo ν sea al menos 10. Vamos a comprobarlo numéricamente.

9) Con tu *software* favorito, comprueba que las gráficas en $|t| < 2/3$ de $f(t)$ y del segundo miembro en el Teorema 3 son prácticamente idénticas cuando $\nu = 10$ y estudia experimentalmente qué ocurre para $\nu = 4$, $\nu = 6$ y $\nu = 8$ representando superpuestas las gráficas de cada miembro de la identidad del teorema. Incluye las cuatro imágenes en tu documento. **Nota:** Es parte del problema que decidas dónde truncar la serie para que no haya pérdida de precisión en los dibujos.

Tarea a entregar. Una vez más, la sugerencia es que combines las soluciones en un documento intentando no exceder las seis páginas. No desarrolles mucho los cálculos de las transformadas del primer ejercicio porque con los medios actuales no tiene mucho sentido. El resultado constituirá el quinto y último capítulo de tu TFG llamado *La fórmula de sumación de Poisson* o la variante que prefieras.

Referencias

- [1] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials matemàtics*, pages 1–27, 2017. <https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2017n02.pdf>.
- [2] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [3] J. R. Higgins. Five short stories about the cardinal series. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):45–89, 1985.
- [4] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1):10–21, 1949.
- [5] E. T. Whittaker. On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 35:181–194, 1914.
- [6] Wikipedia contributors. Lattice (group) — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lattice_\(group\)&oldid=1335361541](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lattice_(group)&oldid=1335361541), 2026. [Online; accessed 7-March-2026].