Hasta ahora habíamos visto que las series de Eisenstein tenían ciertas simetrías asociadas a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. En esta hoja basta ver que es posible caracterizar el espacio de todas las funciones holomorfas con esas mismas propiedades bajo una condición técnica de acotación en el infinito.

Dada una función $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa periódica con desarrollo de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e(nz)$ definimos su *orden en el infinito* $n(f,\infty)$ como el supremo de los m tales que $a_n = 0$ para $n < m$. Si este supremo es negativo o $-\infty$ (que es, por convenio, el supremo de $\varnothing$) entonces la función "explota" en el infinito porque $e(nit)$ crece exponencialmente cuando $t \to +\infty$ si $n < 0$. Para evitar esta situación imponemos $n(f,\infty) \ge 0$. En otras palabras, que el desarrollo de Fourier[1] sea $f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e(nz)$ para algún N no negativo. Según lo dicho, si $a_N \ne 0$ entonces $N = n(f,\infty)$.

1) Sea f es como antes con $n(f,\infty) \ge 0$. Explica brevemente por qué $f\big(\frac{1}{2\pi i}\log z\big)$ da lugar a una función holomorfa en el disco unidad abierto y utilízalo para mostrar que para cualquier $b > 0$ el número de ceros de f en $\{z \in \mathbb{H} : |\Re(z)| \le \frac{1}{2}, \Im(z) \ge b\}$ es finito.

Pasamos ahora a la definición principal de esta hoja. Se dice que $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa es una *forma modular de peso* k, que suponemos par no negativo, si satisface

$$f(z+1) = f(z), \qquad f(-1/z) = z^k f(z) \qquad \text{y} \qquad n(f,\infty) \ge 0.$$

Denotaremos con $\mathcal{M}_k$ al conjunto de formas modulares para un peso k.

Por las hojas anteriores, las series de Eisenstein son formas modulares G_k, $E_k \in \mathcal{M}_k$. La restricción de los pesos a pares no negativos en la definición general obedece a las mismas razones y, como en la hoja 1, las dos primeras relaciones se generalizan y equivalen a $f(\gamma z) = j_\gamma^k(z) f(z)$ para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La función nula, que formalmente tiene $n(f,\infty) = \infty$, se considera forma modular de cualquier peso y así $\mathcal{M}_k$ se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (si no te parece obvio, escribe unas líneas sobre ello).

Introduzcamos ahora una de las formas modulares más importantes y estrechamente ligada a trabajos de Ramanujan, quien hizo unas famosas conjeturas sobre sus coeficientes de Fourier.

2) Se llama *discriminante* a la función $\Delta(z) = \frac{1}{12^3}\big(E_4^3(z) - E_6^2(z)\big)$. Comprueba que está en $\mathcal{M}_{12}$ y cumple $n(\Delta,\infty) = 1$, de hecho su primer coeficiente de Fourier no nulo es $a_1 = 1$.

Nuestro objetivo es determinar $\mathcal{M}_k$. Un ingrediente principal es que el número de ceros de cualquier $f \in \mathcal{M}_k - \{0\}$ está limitado en términos de k cuando se identifican los que están relacionados por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Con este fin, introducimos la siguiente modificación del dominio fundamental añadiendo el infinito y la parte derecha de la frontera:

$$\mathcal{D}^+ = \mathcal{D} \cup \{\infty\} \cup \partial\mathcal{D} \cap \{\Re(z) \ge 0\}.$$

[1] Una pequeña cuestión técnica: Aquí estamos suponiendo desde el inicio que nuestra f periódica holomorfa tiene un desarrollo de Fourier (convergente). Es posible suponer la existencia de $\lim_{\Im(z)\to+\infty} f(z)$ (o incluso del límite de $f(z)/z^\alpha$) y de ahí llegar a la existencia de tal desarrollo, aunque no lo haremos aquí [4].

3) Explica brevemente (no hace falta que entres en muchos detalles) por qué el argumento de la hoja 1 muestra que $\bigcup_{\gamma\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D}^+ = \mathbb{H}\cup\{\infty\}\cup\mathbb{Q}$. En particular, para cualquier $z\in\mathbb{H}$ existe un $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con $\gamma z\in\mathcal{D}^+$. Indicación: Esto debería ser fácil, hay que comprobar que poner $\mathcal{D}^+$ es lo mismo que poner $\overline{\mathcal{D}}\cup\{\infty\}$.

La acotación del número de ceros antes sugerida está recogida en la llamada *fórmula de valencia* [3], [1], [2] que establece que *cualquier* $f\in\mathcal{M}_k-\{0\}$ *satisface*

$$\sum_{z\in\mathcal{D}^+} w_z n(f,z) = \frac{k}{12} \qquad \textit{donde} \quad w_z = \begin{cases} 1/2 & \textit{si } z=i,\\ 1/3 & \textit{si } z=e^{\pi i/3},\\ 1 & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Aquí, como es habitual, dado $z_0\neq\infty$, la notación $n(f,z_0)$ indica el orden en z_0 de f, es decir el mayor N tal que $f(z)/(z-z_0)^N$ es holomorfa. La suma es finita en el sentido de que $n(f,z)$ se anula excepto en un número finito de casos, según lo visto en el primer problema.

La previsión inicial era incluir la prueba de la fórmula de valencia en esta hoja, pero para equilibrar los tamaños de los capítulos 3 y 4, la pospondremos hasta la siguiente hoja y nos centramos aquí en determinar $\mathcal{M}_k$ dándola por supuesto.

4) Dadas m funciones cualesquiera $\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{C}$, ¿por qué alguna combinación lineal de ellas tiene al menos $m-1$ ceros? Usa este hecho junto con la fórmula de valencia para concluir $\dim\mathcal{M}_k<\infty$.

5) Deduce de la fórmula de valencia que $\mathcal{M}_0=\mathbb{C}$ y $\mathcal{M}_2=\{0\}$. Esto es, las únicas formas modulares de peso cero son las constantes y la única de peso 2 es la idénticamente nula.

6) Utiliza la misma estrategia para obtener $\mathcal{M}_k=\{\lambda E_k\,:\,\lambda\in\mathbb{C}\}$ para $k\in\{4,6,8,10\}$.

El paso a dimensiones superiores se lleva a cabo a través de la función Δ.

7) Prueba que $\Delta(z)\neq 0$ para $z\in\mathbb{H}$ y, usando este hecho, comprueba que las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathcal{M}_k & \longrightarrow & \mathcal{M}_{k+12}\\ (\lambda,f) & \longmapsto & \lambda E_{k+12}+f\Delta \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{k+12} & \longrightarrow & \mathbb{C}\times\mathcal{M}_k\\ g & \longmapsto & \big(a_0,(g-a_0E_{k+12})/\Delta\big) \end{array}$$

con $a_0=\lim_{t\to\infty} g(it)$ (el coeficiente de Fourier de orden 0) son aplicaciones lineales bien definidas tales que una es la inversa de la otra y deduce $1+\dim\mathcal{M}_k=\dim\mathcal{M}_{k+12}$.

8) De los ejercicios anteriores, concluye la fórmula para la dimensión

$$\dim\mathcal{M}_k = \begin{cases} 1+\lfloor k/12\rfloor & \text{si } 12\nmid k-2,\\ \lfloor k/12\rfloor & \text{si } 12\mid k-2.\end{cases}$$

Con la aplicación $\mathbb{C} \times \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_{k+12}$ se puede ir construyendo inductivamente $\mathcal{M}_k$ en términos de series de Eisenstein E_ℓ con $\ell \le k$. Lo que vamos a ver es que en realidad hay una base sencilla que solo involucra dos series de Eisenstein. Concretamente, para cualquier peso

$$\mathcal{B} = \left\{ E_4^j E_6^\ell \, : \, 4j + 6\ell = k \text{ con } j, \ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \right\} \quad \text{es base de} \quad \mathcal{M}_k.$$

Comenzamos con un problema aritmético. Realmente, su indicación también te puede servir para el problema anterior.

9) Demuestra que para cualquier k par no negativo el número de soluciones no negativas de la ecuación diofántica $4x + 6y = k$ coincide con la fórmula para $\dim \mathcal{M}_k$. Indicación: Con lo que sabes de Conjuntos y Números $(x, y) = (-\frac{k}{2} + 3t, \frac{k}{2} - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$, son todas las soluciones enteras. El cardinal de las no negativas es $|I_k \cap \mathbb{Z}|$ donde $I_k = [\frac{k}{6}, \frac{k}{4}]$. A partir de $I_{k+12} = [\frac{k}{6} + 2, \frac{k}{4} + 2] \cup (\frac{k}{4} + 2, \frac{k}{4} + 3]$, deduce $|I_{k+12} \cap \mathbb{Z}| = |I_k \cap \mathbb{Z}| + 1$ y basta considerar $0 \le k < 12$.

Una vez que sabemos que el número de productos $E_4^j E_6^\ell$ es $\dim \mathcal{M}_k$, para completar la prueba de que $\mathcal{B}$ es base hay que verificar que son linealmente independientes. Utilizaremos para ello un truco analítico ingenioso.

10) Explica por qué si los elementos de $\mathcal{B}$ fueran linealmente dependientes, entonces existiría un polinomio $P(x) = \sum_{m=0}^{d} a_m x^m$ no idénticamente nulo tal que $P(E_4^3/E_6^2) = 0$.

11) Con la notación anterior, prueba que $Q(x) = \sum_{m=0}^{d} a_m (x - 12^3)^{d-m} x^m$ tampoco es idénticamente nulo y $Q(E_4^3/\Delta) = 0$. Llega a una contradicción porque $E_4^3(it)/\Delta(it) \to \infty$ cuando $t \to +\infty$.

La base $\mathcal{B}$ permite encontrar sorprendentes expresiones para formas modulares que no parecen combinaciones lineales de sus elementos. En particular, para las series de Eisenstein de peso mayor que 6. Para terminar, veamos dos ejemplos.

12) Demuestra las increíbles fórmulas $E_8 = E_4^2$ y $E_4 E_6 = E_{10}$.

El calificativo de "increíbles" no es gratuito. Si piensas en las series que definen E_k, entenderás que difícilmente alguien en su sano juicio sería capaz de sospechar *a priori* algo parecido.

Tarea a entregar. Una vez más, debes combinar las soluciones de los ejercicios anteriores para elaborar un documento. Intenta ajustarte a seis páginas, sin contar la bibliografía, lo que requerirá el esfuerzo de sintetizar las explicaciones con palabras en algunos ejercicios. El resultado constituirá el tercer capítulo de tu TFG llamado *El espacio de formas modulares* o cualquier variante que te parezca adecuada.

Referencias

[1] T. M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[2] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[3] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). `https://mdave16.github.io/notes/Modular%20Forms%20-%20Marc%20Masdeu.pdf`, 2015.

[4] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.