Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil

Fernando Chamizo Lorente

¿Qué vendo?

¿Estás harto de que en los libros de divulgación de física lo pinten todo muy bonito pero no te expliquen nada? Desafortunadamente hay bastantes posibilidades de que el mismo tema en el curso de física se disfrace con un formalismo matemático incomprensible por el que deja de ser bonito e incluso reconocible, mientras que en el curso de matemáticas el profe no se atreva a decir nada de física porque no puede enunciar teoremas. Si sabes cálculo de varias variables y te interesa la física creo que estás capacitado para leer estas notas. Me sentiré orgulloso si te dan más conocimientos sobre las ecuaciones de Maxwell que tu libro de divulgación y menos dolor de cabeza que un curso universitario (¡no hay examen!). El "mercado objetivo" que tengo en mente es sobre todo estudiantes de primero del grado de física o matemáticas.

1. Las cuatro ecuaciones

El "Tratado de electricidad y magnetismo" [Max54] publicado por J.C. Maxwell en 1873 es un hito de la física teórica. En él se enuncian las famosas *ecuaciones de Maxwell* que regulan el electromagnetismo por medio de ecuaciones diferenciales (ecuaciones con derivadas) para la *intensidad de campo eléctrico* $\vec{E}$ y la *inducción magnética* $\vec{B}$. Si ya te tiemblan las piernas al oír hablar de estos señores porque tus conocimientos de física soy muy básicos, tranquilo, no hace falta saber la "definición" rigurosa de estos términos, simplemente una vaga noción de que indican la fuerza eléctrica de las cargas y la fuerza magnética de los imanes. Más adelante seremos un poco más precisos.

El gran mérito de Maxwell fue expresar matemáticamente de manera sintética lo que se infería de experimentos conocidos. Posiblemente M. Faraday, que murió seis años antes de la publicación del tratado de Maxwell, consideraría un error expresar con ecuaciones complicadas lo que se sigue de experimentos simples, porque apenas usaba fórmulas en sus trabajos. Sin embargo a día de hoy ningún físico negaría que la formulación de Maxwell, incluso con mucha mayor abstracción, es la manera de entender la electrodinámica clásica. Maxwell, que admiraba a Faraday, dijo de sus métodos que "empiezan por el todo y llegan a las partes por análisis, mientras que los métodos matemáticos ordinarios se fundaron sobre el principio de comenzar por las partes y construir el todo por síntesis" [Blu12, p.44].

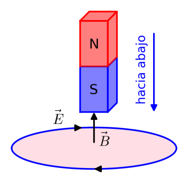
Con las unidades llamadas gaussianas, en el espacio libre, sin cargas ni corrientes, las ecuaciones de Maxwell tienen el formidable aspecto

$$(1) \qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde c es la velocidad de la luz. Los operadores $\nabla\cdot$ y $\nabla\times$ son la divergencia y el rotacional y provienen de aplicar diferentes formas del teorema de Stokes (del cual Maxwell dio una de las primera pruebas). Si tienes dudas mira el apéndice de cálculo II al final de estas notas y si piensas que son unas ecuaciones muy raras, estás en lo cierto… hasta que sigas leyendo.

2. ¿Qué significa esto?

Tras un vistazo a (1), seguro que estás pensando ¿y esto son realmente leyes experimentales? Es difícil de creer porque en el instrumental típico de laboratorio no hay pinzas para coger rotacionales ni nada parecido. Pues sí lo son aunque hay que aclarar que en un sentido indirecto. No podemos medir de manera práctica por ejemplo $\nabla \times \vec{E}$ directamente, eso requeriría poner unos detectores (partículas de prueba) en puntos muy cercanos para estimar las derivadas parciales de $\vec{E}$. ¿De dónde sacó entonces Maxwell la tercera ecuación?



Tercera ecuación

Si movemos un imán a través de una espira (un alambre cerrado) aparece una corriente a través de ella. Es el principio de los aerogeneradores (los molinos que vemos en la sierra, en lenguaje finolis) o de las turbinas hidroeléctricas que dan luz a nuestros hogares. Si el imán no se mueve no hay corriente y cuanto más rápido se mueva, mayor es la corriente. También participa la fuerza del imán: el efecto aumenta si lo hace la inducción magnética $\vec{B}$ que atraviesa la superficie S limitada por la espira. todo esto suena bastante lógico y experimental pero a día de hoy decirlo con palabras (como hacía Faraday) no basta y necesitamos escribir una fórmula porque a la postre es más fácil de manejar. La más natural, es que la corriente eléctrica es proporcional a

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

esto es, a la variación de la inducción magnética que fluye a través de la superficie. Si tu profe de mates te dice que la igualdad no se puede escribir alegremente porque es derivar bajo el signo integral, pregunta a tu profe de física y verás que tu queja sí le causa alegría o al menos una sonrisa.

¿Qué es la corriente eléctrica? Muy lejos ya de las disputas de L. Galvani y A. Volta a finales del siglo XVIII, hoy sabemos que se debe al movimiento de los electrones libres de un metal. En nuestra espira, estos electrones se mueven porque los mueve un campo eléctrico y la corriente que circula depende de la "suma" de todos los campos eléctricos a lo largo de la espira, representada por $\int_{\partial S} \vec{E}$ donde ∂S es el borde de S, es decir la curva que describe la espira. Entonces lo que esperamos después del experimento es

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = K\int_{\partial S} \vec{E}. \tag{3}$$

Con la elección de unidades gaussianas se tiene $K = -c$, no es nada esencial, con otras unidades podríamos dar a K cualquier otro valor no nulo. El signo negativo refleja cierto convenio acerca de qué es el polo norte o el sur de un imán (curiosidad para ganarse una cena apostando: se llama *polo* *norte magnético* de la Tierra al polo sur de su imán y viceversa. Parece que este nombre incoherente proviene de que atrae al polo norte de los imanes de las brújulas). Aplicando el teorema de Stokes en (3), se tiene

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \int_S \nabla \times \vec{E}, \qquad \text{por tanto} \qquad \int_S \Big(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + c\nabla \times \vec{E} \Big) = 0. \tag{4}$$

Como S es arbitraria, se deduce la tercera ecuación de (1). Quizá resulte un poco más sencillo entender esta conclusión tomando alternativamente como S cuadraditos pequeños en cada uno de los tres planos coordenados.

¿Qué significan el resto de las ecuaciones? Mejor ir despacio y crear cierto suspense. Utilizando el teorema de la divergencia, las dos primeras ecuaciones afirman $\int_S \vec{E} = 0$ y $\int_S \vec{B} = 0$ donde S es una superficie cerrada, frontera de una región sólida. Entonces en cierta manera la primera dice que las "fuerzas" eléctricas se compensan (las que entran por un lado de la superficie salen por otro) y la segunda lo mismo para las "fuerzas" magnéticas. Más adelante estudiaremos la situación con más detalle en relación con los monopolos, así daremos tiempo para que si hay algún físico profesional entre los lectores se recupere de la lipotimia causada por esta explicación. Un momento... ¿y qué hay de la cuarta ecuación? Es la más indirecta y la contribución más original de Maxwell porque lo que sugieren los experimentos en el ámbito de aplicación de (1) es $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$. ¿Cómo puede ser eso? Se debe a que, con las unidades escogidas, en experimentos "normales" $\vec{B}$ es muy grande en comparación con $\vec{E}$ de modo que la tercera ecuación es observable a pesar de dividir entre c. En la cuarta ecuación $\vec{E}$ se convierte en pequeñísimo al ser dividido por c, resultando que para que el segundo miembro sea apreciable hay que efectuar una variación gigarápida (así lo necesita literalmente la tele de casa). ¿Cómo pudo Maxwell enunciar la ley correcta si escapaba a los experimentos de su tiempo? La explicación de esto y del último paréntesis en secciones sucesivas para los que sigan ahí.

3. Ondas electromagnéticas

Coge papel y lápiz, ponte en modo de pensar y resuelve el siguiente problema: *Dado un campo vectorial arbitrario $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, calcular $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$.*

¿Que no lo has hecho? Es comprensible, aparte de que nadie completa los detalles que se dejan al lector, si $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ entonces su rotacional $\nabla \times \vec{F}$ es un rollo de fórmula en términos de las parciales, y el rotacional del rotacional es un superrollo que habrá aburrido a cualquier incauto. Sin embargo el problema no es una mala broma: la condición $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ permite hacer simplificaciones drásticas y la solución es sencillamente

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\Delta \vec{F} \tag{5}$$

donde $\Delta \vec{F}$ significa $(\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$ con Δ el operador laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Segunda oportunidad: ahora que sabes la solución, trata de justificarla con un argumento tan simple como puedas (no vale encontrar en un libro una fórmula que no sepas deducir).

Tomando rotacionales en la tercera y la cuarta ecuación de (1), se deduce de (5)

$$c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{y} \qquad c^2 \Delta \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Es decir, cada componente de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es una solución de la llamada *ecuación de ondas* de velocidad c

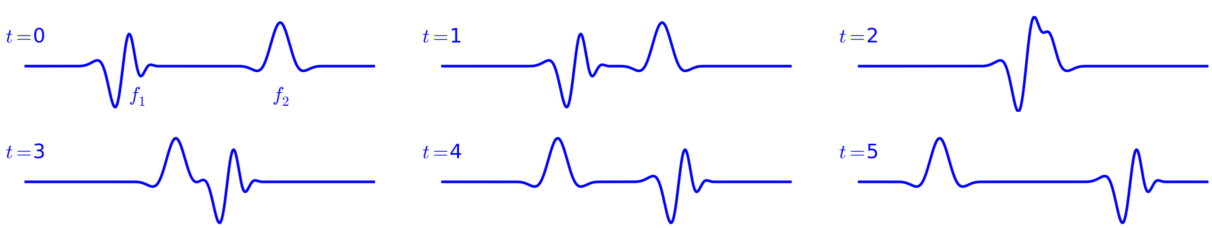
$$c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{7}$$

¡Ajá! entonces si el nombre está bien puesto, las soluciones de (1) son ondas, que deberíamos llamar *ondas electromagnéticas*, que tienen velocidad c. Estas ondas se mencionaron por primera vez en un trabajo de Maxwell de 1865 [Max65]. Alrededor de 1887, H. Hertz logró producir en su laboratorio ondas electromagnéticas mediante chispas y detectarlas unos metros más allá [Her90], el resto es historia bien conocida. La próxima vez que enciendas el móvil, te conectes a la WiFi o pongas la tele, recuerda decir: ¡¡¡Gracias Maxwell!!!

¿En qué sentido son las soluciones de (7) ondas de velocidad c? No es muy difícil probar que las soluciones de esta ecuación que dependen sólo de x y t son aquellas de la forma

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{8}$$

con f_1 y f_2 funciones arbitrarias. Si pensamos que f_1 y f_2 son funciones de soporte compacto que representan "pulsos", al dejar transcurrir el tiempo y dibujar la gráfica de cada $u(x, t_0)$, veremos que f_1 se traslada a la derecha y f_2 a la izquierda. La posible interferencia entre ambos pulsos no afecta a su comportamiento futuro.



Las expresiones $x \pm ct$ indican que cada uno de los pulsos se traslada c unidades en el eje x por unidad de tiempo. En este sentido son ondas de velocidad c. A partir de (8) se pueden encontrar soluciones fáciles de las ecuaciones de Maxwell [FLS64, 20-1] ¿Y las difíciles? Pues son superposiciones de las fáciles. Lo que ocurre es que como en $\mathbb{R}^3$ hay muchas direcciones, no sólo la del eje x, estas superposiciones son sumas de infinitas ondas fáciles y vienen dadas por integrales. El análisis de Fourier, que es muy importante en física, ingeniería y matemáticas, permite limitarse a ondas fáciles de las de toda la vida: senos y cosenos.

Según las ecuaciones, las ondas se generan siempre que tengamos un campo electromagnético variable. La razón básica para la existencia de ondas electromagnéticas es que las fuerzas eléctricas y magnéticas no son fuerzas instantáneas. C.F. Gauss fue el primero en predecirlo aunque su teoría electromagnética no fuera correcta. En la electrónica actual se generan ondas electromagnéticas conectando la entrada de un amplificador con su salida con ayuda de condensadores y bobinas (el mismo principio que genera las molestas ondas sonoras cuando se acopla un micrófono). Hertz empleó una *bobina de Ruhmkorf*, un dispositivo entre mecánico y eléctrico que era capaz de generar breves chispas de muy alta frecuencia, del orden de los gigahercios (mil millones de oscilaciones por segundo) comparable a las que transmiten la televisión actual, al menos si no es por cable. Si las ondas electromagnéticas tienen velocidad c, que es la velocidad de la luz, es natural conjeturar, como hizo Maxwell, que la luz es una onda electromagnética. Hertz dio apoyo a esta teoría comprobando experimentalmente que las ondas que él producía en su laboratorio tenían propiedades de reflexión y refracción análogas a las de la luz. Además midió experimentalmente su longitud de onda y su velocidad, lo cual no es nada sencillo por el poco alcance que tenían sus ondas [Her90]. Desafortunadamente Hertz murió bastante joven y no llegó a ver el desarrollo práctico de la telegrafía sin hilos llevada a cabo por N. Tesla, G. Marconi y otros (cotilleo: el primero era un tipo bien curioso y en la cultura popular a veces aparece como icono de científico loco).

Hay algo un poco raro en la importancia de la constante c cuando habíamos dicho en (3) que $K = -c$ era arbitrario y provenía de elegir las unidades de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Parece que si medimos el espacio en metros y el tiempo en segundos, todavía podemos cambiar las dos últimas ecuaciones de (1) por

$$\nabla \times \vec{E} = -\boxed{\text{lo que me apetezca}_1}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \vec{B} = \boxed{\text{lo que me apetezca}_2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{9}$$

y eso llevaría a que en (6) y (7) que la velocidad de las ondas es todos los valores al tiempo. ¿Dónde está el truco? Un cambio de escala corresponde a multiplicar por constantes $\vec{E} \mapsto \lambda_E \vec{E}$, $\vec{B} \mapsto \lambda_B \vec{B}$. Si lo hacemos en (1), al comparar con (9) obtendremos

$$\boxed{\text{lo que me apetezca}_1} \cdot \boxed{\text{lo que me apetezca}_2} = c^{-2}. \tag{10}$$

El segundo "lo que me apetezca" está forzado por el primero, de esta forma la velocidad de la luz es intrínseca a las ecuaciones de Maxwell independientemente de las unidades de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Así podemos calcular c de dos formas (ambas difíciles): Una midiendo lo que tarda en recorrer la luz cierta distancia y otra midiendo las constantes de las ecuaciones de Maxwell con las unidades que deseemos y usando (10). Con los datos de la época de Maxwell había alguna diferencia entre ambos valores. Esencialmente el primero era $2.98 \cdot 10^8\ m/s$ y el segundo $3.11 \cdot 10^8\ m/s$ pero Maxwell creyó acertadamente que esta diferencia se debía a las dificultades experimentales.

Para complicar más las cosas, la c que dan los experimentos hechos en el aire bajo el paraguas de la atmósfera, no es exactamente igual a la c que se mide en el vacío, porque el aire está lleno de cargas y no es totalmente transparente a las ondas electromagnéticas (sí, ya sé que esto no explica mucho). De todas formas la diferencia es de importancia menor, apenas un 0.03 %.

4. Deduciendo la ley de Coulomb

En física y en matemáticas la dificultad de ciertos problemas, como ocurre al resolver la ecuación de ondas, radica en que hay demasiadas direcciones en el espacio ambiente. Es habitual considerar primero el caso fácil en que las direcciones se reducen a una porque se impone la simetría radial. Tanto físicos como matemáticos somos fanáticos de las simetrías y convertimos automáticamente el caso fácil en el caso importante.

Supongamos que no hay campo magnético $\vec{B} = \vec{0}$, lo que obliga a que estemos estudiando electrostática: campos eléctricos $\vec{E}$ que dependen de la posición pero no del tiempo, campos vectoriales de libro de matemáticas. Las ecuaciones de Maxwell se reducen en esta situación a $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$. Esta última ecuación nos decían en cálculo II que implicaba que $\vec{E}$ era conservativo: localmente existe una función escalar ϕ tal que $\vec{E} = \nabla\phi$ (los físicos prefieren escribir $-\phi$ para que ϕ sea una energía potencial). Supongamos simetría esférica para ϕ, esto significa que en lugar de depender de manera complicada de (x, y, z), sólo depende de la distancia al origen $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, es decir, es constante en cada esfera centrada. Para evitar raíces, podemos decir igualmente que depende de r^2 y escribir

$$(11) \qquad \phi(x, y, z) = f(r^2) \qquad \text{y por tanto} \qquad \vec{E} = \nabla\phi = \big(2xf'(r^2), 2yf'(r^2), 2zf'(r^2)\big).$$

Al sustituir en $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ se obtiene

$$(12) \qquad 3f'(r^2) + 2r^2 f''(r^2) = 0 \qquad \text{que equivale a} \qquad \frac{d}{dr}\big(r^3 f'(r^2)\big) = 0.$$

¿Estás alucinando con el último paso? Cuando hagas un curso de ecuaciones diferenciales tendrás varios trucos para obtener la conclusión que realmente importa y es que $f'(r^2)$ es una constante por r^{-3}. Sustituyendo en (11) se deduce

$$(13) \qquad \vec{E} = K\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \text{con} \qquad \vec{r} = (x, y, z).$$

Ahora es el momento de decir algo acerca de la definición de $\vec{E}$. ¿Cómo notamos que en un punto hay campo eléctrico? Ponemos allí una carga tan pequeña como podamos (para que no perturbe el campo) y observamos la fuerza que sufre. Ésta resulta ser proporcional a la carga y por tanto es natural definir $\vec{E}$ como el cociente entre fuerza y carga. De esta forma (13) corresponde a una fuerza proporcional a la carga de prueba y con módulo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

¿Cómo generar este tipo de campo eléctrico? Por nuestra única hipótesis de simetría, cualquier distribución radial de cargas debe generar un campo del tipo (13). La situación más simple es suponer una carga puntual en el origen. Más carga implica más intensidad de campo y entonces es natural suponer que K es proporcional a la carga. Bajo esta nueva hipótesis o apelando a la simetría entre la carga que genera el campo y la carga de prueba, logramos inferir la *ley de Coulomb* que afirma que una carga q_1 actúa sobre otra carga q_2 con una fuerza

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} \qquad \text{con } \vec{r} \text{ el vector de } q_1 \text{ a } q_2. \tag{14}$$

En las unidades del sistema internacional hay una constante multiplicativa extra del orden de $9 \cdot 10^9$ pero con las unidades gaussianas se elige la forma de medir las cargas de manera que se reduzca a uno. La fórmula (14) es una de las más antiguas en el estudio del campo eléctrico y se atribuye a Ch.-A. de Coulomb quien la enunció con palabras en 1785, aunque, siguiendo [Max54], parece que fue anticipada por H. Cavendish (más cotilleo: un científico en su propio mundo como los que pintan en las películas). Es análoga a la *ley de gravitación universal* de I. Newton con la salvedad de que las cargas pueden ser positivas o negativas mientras que los experimentos y la teoría sugieren que las masas son siempre positivas. La analogía se pierde totalmente fuera del ámbito de la electrostática. Si no hemos sujetado bien las cargas y no podemos suponer que sus movimientos son imperceptibles, (14) deja de ser cierta porque la variación del campo eléctrico crea un campo magnético variable que, según la tercera ecuación de (1) impide $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ en la cual estaba basada nuestra deducción de (13).

¿Hemos *deducido* la ley de Coulomb? En cierto modo sí, pero abierto a críticas filosóficas. Históricamente fue la primera ecuación de Maxwell la que se infirió a partir de la ley de Coulomb. ¿Cuál es la ley fundamental que está escrita en la naturaleza? En la actualidad, consideramos que (1) son ecuaciones fundamentales porque sabemos deducir muchas cosas de ellas, igual que la ley de gravitación universal de Newton es más fundamental que las leyes de Kepler, sin embargo no hay que perder de vista que de cara a estudiar el movimiento de los planetas con las simplificaciones habituales, nos serían suficientes.

5. Monopolos y dipolos

Según hemos visto, una sola carga q estática y puntual, lo que por razones obvias se llama un *monopolo eléctrico*, que suponemos en el origen, genera un campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r} \qquad \text{con} \qquad \vec{r} = (x, y, z) \quad \text{y} \quad r = \|\vec{r}\|. \tag{15}$$

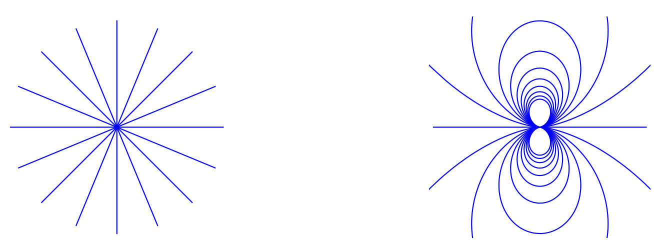
Una propiedad importante de (1) es que son ecuaciones lineales, es decir, que si sabes dos soluciones puedes sumarlas (por supuesto, el campo eléctrico con el campo eléctrico y el magnético con el magnético, recuerda lo de la prohibición de sumar peras y las manzanas atribuida a los profes de matemática elemental, aunque claramente lo de prohibir es cosa de físicos). Entonces, sumando muchas fórmulas (15) para cargas en diferentes puntos del espacio tendremos campos eléctricos válidos y si sumamos infinitas... Dejemos esto para más tarde y fijémonos por ahora únicamente en los *dipolos eléctricos* que son configuraciones de dos cargas opuestas a distancia pequeña, incluso cero a efectos teóricos y prácticos.

¿Qué ocurre por ejemplo si situamos dos cargas opuestas muy próximas una en el origen O y otra a distancia h en el eje OX? La atracción entre ellas será brutal de acuerdo con (14) pero supongamos que tenemos una forma de sujetarlas (¡qué fáciles son los experimentos mentales!), entonces el campo $\vec{E}$ será la resta de dos fórmulas (15), una evaluada en $\vec{r}$ y otra en $\vec{r}-(h,0,0)$. Si cada carga, sin signo, es qh^{-1} (digamos que la negativa es la de O), entonces en el límite cuando $h\to 0$, el campo generado será $-\partial\vec{E}/\partial x$ con $\vec{E}$ dado por (15). Esto se puede generalizar al caso en que la dos cargas están a distancia $h\to 0$ en la dirección del vector $\vec{p}$ con cargas $\|\vec{p}\|h^{-1}$, entonces lo que obtendremos es que el campo en vez de ser menos la derivada parcial con respecto de x de cada componente de (15) es menos la derivada direccional en la dirección $\vec{p}$, lo que da lugar al campo eléctrico de un dipolo eléctrico (con separación $h\to 0$)

$$\vec{E}=3\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{p}}{r^3}\qquad \text{con}\qquad \vec{r}=(x,y,z)\quad \text{y}\quad r=\|\vec{r}\| \tag{16}$$

(es un buen ejercicio expresar la derivada direccional de esta forma, ¿no te animas a hacerlo?). A $\vec{p}$ se le llama *momento dipolar*.

Una representación geométrica del campo eléctrico, extensible a otros campos, que tiene su origen en Faraday, son las *líneas de fuerza* (hoy en día es más propio llamarlas *líneas de campo*). Son curvas cuyas tangentes tienen la dirección de $\vec{E}$. A menudo se representan en el plano tomando $z=0$. En nuestro caso las líneas de fuerza o de campo para (15) y (16) con $\vec{p}=(1,0,0)$ vienen dadas respectivamente por las siguientes figuras. Normalmente se acompañan con flechas que indican el sentido en el que hay que tomar el vector tangente para que coincida con el sentido de $\vec{E}$. En la primera figura, para una carga positiva las líneas de campo se recorren desde el origen hacia el infinito y para una negativa al revés. En la segunda los óvalos superiores se recorren en sentido positivo y los inferiores en sentido negativo, con $\vec{p}=(-1,0,0)$, que corresponde a intercambiar la cargas, se invertirían los sentidos.



monopolo   dipolo con $\vec{p}=(1,0,0)$

Volvamos a la idea de dipolo con mentalidad crítica. ¿Cargas opuestas que se mantiene infinitamente cerca sin colapsar? ¿Límites cuando la distancia tiende a cero? ¿No suena esto demasiado matemático o de cuento de hadas? Pues en cierto modo es más real y práctico que (15). Resulta que muchas moléculas sencillas como la del agua se comportan como dipolos y eso es fundamental para que nuestro horno microondas las haga oscilar y caliente los alimentos. ¿Qué es lo que hace que una molécula se comporte como un dipolo? Una explicación precisa se pierde en los misterios (para mí) del enlace químico. Dos átomos enlazados comparten electrones y puede que uno tire más de los electrones que el otro,se dice que tiene más *electronegatividad*; esta asimetría permite que la representación por un dipolo sea adecuada. Lo que impide el colapso, lo que sujeta las cargas, son las extrañas leyes del mundo cuántico.

Además, hay algo que hace que los dipolos sean importantes en el magnetismo y, lo creas o no, una explicación de ello era el objetivo inicial para los contenidos de estas notas (recuérdalo en las nominaciones del próximo "premio rollista"). Razonemos como antes pero considerando magnetostática en lugar de electrostática. Esto es en nuestro caso, sin tanta pedantería, suponer $\partial\vec{B}/\partial t = \vec{0}$ con $\vec{E} = \vec{0}$. Por la simetría de las ecuaciones, podríamos concluir una ley de Coulomb para "cargas magnéticas" (distintas de las eléctricas, porque éstas no parecen ser afectadas por los imanes cuando están en reposo) y fórmulas para monopolos y dipolos magnéticos idénticas a (15) y (16). Salvo que... nadie ha observado *monopolos magnéticos*, no parecen existir en la naturaleza cargas magnéticas sueltas. Siempre los imanes tienen su polo norte, que se comporta como el lado de la carga magnética positiva, acompañado por un polo sur, correspondiente a la negativa. Cuando las limaduras de hierro en una hoja de papel se orientan por la acción de un imán de pequeño tamaño que esté debajo, siempre se reproducen las líneas de campo de un *dipolo magnético*

$$\vec{B} = 3\frac{\vec{r}\cdot\vec{m}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \tag{17}$$

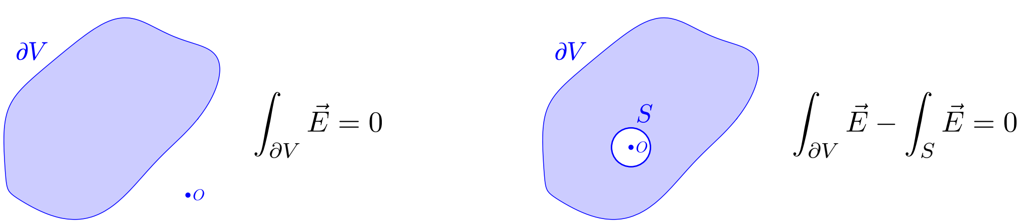
(se escribe $\vec{m}$ para distinguirlo del $\vec{p}$ eléctrico). Todo se comporta como si hubiera un par de monopolos opuestos infinitamente juntos que nadie ha visto. ¿Y si dividimos el imán en trozos? Cada uno de ellos volverá a tener su polo norte y su polo sur, volverán a responder a (17) salvo que $\|\vec{m}\|$ será menor. ¿Y si llegamos a sus últimos constituyentes, los átomos, los electrones, los quarks...? A pesar de que las leyes que rigen el electromagnetismo a esos niveles son bien distintas, todas las partículas conocidas con magnetismo se comportan como dipolos, la existencia de partículas que son monopolos magnéticos es sólo una conjetura en algunas teorías. ¿No es fascinante?

6. Las ecuaciones con fuentes

Sabemos que el campo eléctrico que genera una carga puntual estática en el origen es (15) y por supuesto $\nabla\cdot\vec{E} = \vec{0}$ salvo en el origen donde sale infinito. Eso es lógico, a fin de cuentas a distancia cero de una carga hay fuerza infinita, pero nos empieza a hacer sospechar que la primera ecuación de Maxwell no es cierta en la forma indicada en (1) dentro de una carga. Vamos a analizar esta situación con un poco de cuidado.

Para deducir (13) sólo habíamos usado la simetría esférica. Pensemos en una esfera hueca cargada. Vista desde muy lejos es a todos los efectos una carga puntual y entonces fuera de ella es campo es (15) con q la carga total. Está claro que en el origen $\vec{E} = \vec{0}$ por la simetría y apelando a (13) se sigue que $K = 0$ y $\vec{E} = \vec{0}$ en todo el interior. Es el mismo resultado poco intuitivo (*shell theorem*) por el que un planeta hueco no tiene gravedad en su interior. Entonces $\vec{E}$ es discontinuo en este caso y $\nabla \cdot \vec{E}$ debe dar un infinito gordo cuando atravesamos la superficie esférica. Pensemos ahora en que damos grosor a la superficie esférica y que por alguna magia conseguimos que adquiera una densidad de carga que varía muy suavemente siendo nula en la frontera. Nuestra intuición nos dice que $\vec{E}$ debería esta vez variar suavemente (para matemáticos: ¿sabrías demostrarlo partiendo de (14) sumando fuerzas infinitesimales?) y no hay problema para calcular $\nabla \cdot \vec{E}$ en todo punto. Cuando se reduce el grosor se debería recuperar la primera situación $\nabla \cdot \vec{E} \to \infty$ y esto no es coherente con que $\nabla \cdot \vec{E}$ se anule en todo punto.

Para ver a qué es igual $\nabla \cdot \vec{E}$ cuando estamos dentro de una zona cargada, consideremos de nuevo (15) y una región sólida acotada V.



Si el origen está fuera de V entonces por el teorema de la divergencia, $\int_{\partial V} \vec{E} = 0$ con ∂V la frontera de V. Si está dentro, se puede repetir el argumento reemplazando V por $V - B$ donde B es una pequeña bolita centrada en el origen y dentro de V. La frontera de esta nueva región es ∂V y la superficie esférica S de la pequeña bolita, negativamente orientada. Así que $\int_{\partial V} \vec{E}$ coincide con $\int_S \vec{E}$ con la orientación usual (porque su diferencia es cero) y ésta integral es fácil de hacer, en esféricas o interpretando la críptica cuenta $|S| \cdot q/r^2 = 4\pi r^2 q/r^2 = 4\pi q$.

Si la carga no está en el origen da igual y si tenemos varias cargas, basta sumar los resultados. Entonces para el campo $\vec{E}$ generado por cualquier número de cargas en posiciones arbitrarias (si hay algún pesado, sí, tienes razón, suponemos que no están justo en ∂V) se cumple

$$\int_{\partial V} \vec{E} = 4\pi Q \qquad \text{con} \quad Q = \text{carga total dentro de } V. \tag{18}$$

La fórmula no depende de que Q provenga de una carga o de la suma (con signo) de muchas cargas individuales, incluso podría venir de infinitas cargas infinitesimales. En este caso, la suma corresponde a integrar sobre V la *densidad de carga* ρ, la carga por unidad de volumen. De nuevo por el teorema de la divergencia,

$$(19) \qquad \int_{\partial V} \vec{E} = 4\pi Q = 4\pi \int_V \rho \qquad \text{implica} \qquad \int_V \big(\nabla \cdot \vec{E} - 4\pi\rho\big) = 0.$$

Con ello hemos generalizado la primera ecuación de Maxwell de forma que es válida también cuando estamos dentro de un mar de cargas.

$$(20) \qquad \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.$$

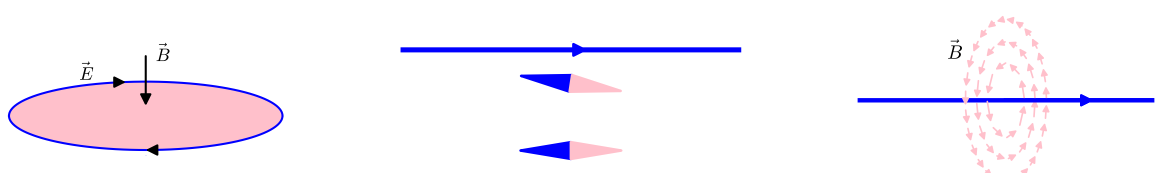
En realidad no está claro por qué esta fórmula obtenida bajo la hipótesis electrostática, las cargas no se mueven, debiera tener validez general, cualquiera que sea la velocidad de las partículas que conforman el medio. El caso es que sí es general. Te preguntarás si hay un argumento sencillo que lo explique. Yo también.

Si existen monopolos magnéticos (cargas magnéticas individuales) todo se puede repetir palabra por palabra para conseguir

$$(21) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m$$

donde ρ_m es la *densidad de carga magnética*. Como ya hemos señalado, no parece haber monopolos en el mundo real, todo se comporta formalmente como si las cargas magnéticas aparecieran siempre por pares opuestos infinitamente próximos y por tanto $\rho_m = 0$. Haya o no cargas eléctricas, estáticas o en movimiento, lo que sugieren nuestros experimentos hasta la fecha es que la segunda ecuación de (1) es correcta.

Lo mismo se aplica a la tercera ecuación, no se ve afectada por las cargas. Al hilo del experimento de una imán atravesando una espira con el cual la explicamos, hay un fenómeno curioso: Los electrones libres de la espira al girar parecen generar un campo magnético que se opone al del imán (*ley de Lenz*).



Por respetar el orden histórico de los acontecimientos, fue H.C. Ørsted quien se percató en 1820 que cuando por un hilo conductor pasa una corriente eléctrica una brújula suficientemente cercana sufre una pequeña desviación. Además comprobó que lo que hoy llamamos líneas de campo son círculos perpendiculares al conductor y centrados en él. El fenómeno fue estudiado con mayor profundidad experimental y teórica por A.-M. Ampère que comprobó que dos conductores con corrientes circulando en el mismo sentido se atraen como unos imanes muy débiles. Más práctico para producir "imanes artificiales" es amontonar espiras usando cables aislados enrollados alrededor de un núcleo de hierro. Es el principio del electroimán con los que J. Henry en 1830 ya lograba levantar casi una tonelada. Tras estos experimentos, el paso lógico que dio Ampère fue suponer que los imanes y cualquier fenómeno magnético proviene de cargas en movimiento. Si con las cargas eléctricas se explica todo, no hay necesidad de asombrarse por la ausencia de cargas magnéticas aisladas. Ampère supuso que dentro de un imán había unas corrientes eléctricas microscópicas que no sabía explicar (nosotros hoy en día tampoco sabemos explicar muy bien las corrientes que generan el campo magnético de la Tierra).

Al generar campos magnéticos con conductores estáticos el campo $\vec{B}$ correspondiente resulta ser directamente proporcional a la *intensidad de corriente* I que atraviesa el conductor. ¿Y qué es la intensidad de corriente? La cantidad de carga eléctrica que pasa por el conductor por unidad de tiempo. La ley más natural es la *ley de Ampère* (a pesar del nombre fue deducida en esta forma por Maxwell) que supone una constante universal K tal que

$$\int_C \vec{B} = KI \qquad \text{con} \qquad C = \text{ curva cerrada que rodea al conductor.} \tag{22}$$

¿Y si el conductor es muy gordo o no hay conductor sino cargas en muchas direcciones? Por esto y por lo que viene después es útil definir la *densidad de corriente* $\vec{\jmath}$ un campo tal que $I = \int_S \vec{\jmath}$ con S la sección del conductor. Todavía mejor es olvidarse de I, que es muy importante en electrónica pero aquí nos obliga a pensar en conductores unidimensionales, y definir directamente la densidad de corriente como $\vec{\jmath} = \rho\vec{v}$ donde ρ es, como antes, la densidad de carga eléctrica y $\vec{v}$ es el campo que da la velocidad de cada carga en cada punto. Las dos definiciones son compatibles [Fle08, p.105]

$$\vec{\jmath} = \frac{\text{carga}}{\text{volumen}} \cdot \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo}} \Big/ \frac{\text{volumen}}{\text{espacio}} = \frac{I}{\text{área}}. \tag{23}$$

Con las unidades que venimos manejando en (22) la constante es $K = 4\pi/c$. Usando el teorema de Stokes con $C = \partial S$, el borde de una superficie S,

$$\int_C \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{\jmath} \qquad \text{implica} \qquad \int_S \big(\nabla \times \vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}\big) = 0. \tag{24}$$

Así pues si estamos sumidos en un mar de cargas, debería cumplirse

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} \qquad \text{(no te creas del todo esta ecuación)} \tag{25}$$

y por tanto si no hay cargas $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$. Esto es lo que sugieren los experimentos sencillos ¡pero es falso! Utilizando ingeniería inversa o más bien un apaño, si queremos que la cuarta ecuación de Maxwell surja cuando $\vec{\jmath} = \vec{0}$, lo más fácil es conjeturar

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{26}$$

Vale, pero Maxwell no tenía un libro donde mirar sus ecuaciones. De nuevo nos preguntamos, ¿cómo se inventó el último término? En unas líneas la solución. Para terminar esta larga sección, a modo de resumen, escribamos todas juntas las ecuaciones de Maxwell generalizadas donde admitimos que en vez de estar en el vacío estamos en un ambiente con cargas, quizá en movimiento. Las ecuaciones que generalizan (1) son

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{27}$$

donde ρ es la densidad de carga y $\vec{\jmath} = \rho\vec{v}$ con $\vec{v}$ el campo de velocidades de las cargas.

7. La cuarta y la quinta ecuación de Maxwell

¿Cómo que la quinta? ¡Si sólo hay cuatro! ¡Que me devuelvan el dinero o el tóner de la impresora! Un poco de tranquilidad y paciencia, vamos primero con la cuarta.

Las funciones ρ y $\vec{v}$ no son totalmente arbitrarias si queremos que tengan significado físico, concretamente si no permitimos que las cargas desaparezcan o aparezcan de la nada. Por ejemplo, pensemos en una región sólida V que contiene una carga total 1, de modo que $\int_V \rho = 1$. Si suponemos que $\vec{v} = \vec{0}$ en la frontera ∂V, estamos diciendo que no entran ni salen partículas de V y entonces no puede ocurrir que al cabo de un rato se tenga $\int_V \rho = 2$.

En palabras: Las cargas en una región sólida V sólo pueden perderse por la superficie frontera ∂V, así pues la variación de la carga en V debe estar compensada con el flujo de cargas a través de ∂V. Ahora dicho en matemáticas: Empleando el teorema de la divergencia

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho = -\int_{\partial V} \rho\vec{v}, \qquad \text{implica} \qquad \int_V \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v})\Big) = 0. \tag{28}$$

Con esto se deduce la *ley de conservación de la carga*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\jmath} = 0. \tag{29}$$

Si (25) fuera verdad, entonces aplicando $\nabla \cdot$ y recordando que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ para cualquier campo, se deduciría $\partial\rho/\partial t = 0$, es decir, que ¡las cargas no se pueden mover! Seguramente cuando Maxwell se dio cuenta de que (25) era incorrecta si las cargas no aparecen y desaparecen como fantasmas, lo que pensó es que faltaba algún término pequeño. Para preservar la linealidad de las ecuaciones lo más fácil es suponer que falta un sumando

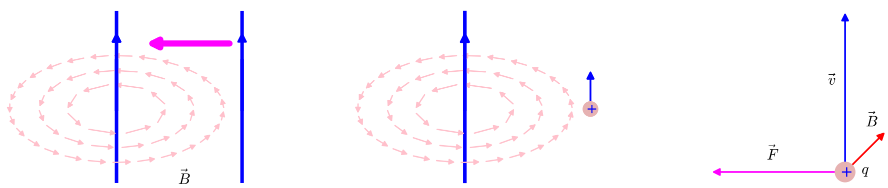
$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \Lambda. \tag{30}$$

¿Qué sabemos de Λ? De acuerdo con (29), aplicando $\nabla \cdot$ como antes,

$$0 = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \Lambda, \qquad \text{esto es,} \qquad \nabla \cdot (c\Lambda) = \frac{\partial (4\pi\rho)}{\partial t}. \tag{31}$$

Comparando esta relación con la primera ecuación de (27) tenemos que la elección natural es $c\Lambda = \partial\vec{E}/\partial t$ que produce la cuarta ecuación de (27) y para $\vec{\jmath} = \vec{0}$ la de (1). Aparte de ser una elección natural de Λ da a las ecuaciones de Maxwell (1) su atractivo aspecto simétrico, los campos eléctricos y magnéticos son lo mismo salvo un "cambio de orientación" o algo así que introduce un menos.

Ahora sí, ¿qué eso de la quinta ecuación de Maxwell? Lo que hemos estudiado, lo que indican las cuatro ecuaciones de Maxwell es la interacción entre los campos eléctricos y magnéticos pero no tenemos una descripción completa de cómo afectan a las cargas. Esto es importante porque el movimiento de las cargas genera a su vez un campo electromagnético. Bueno, en realidad sí habíamos dicho alguna cosa: La definición de $\vec{E}$ era algo que indicaba una fuerza $q\vec{E}$ sobre una carga q pero ¿qué ocurre con el campo magnético representado por $\vec{B}$? También habíamos mencionado que un imán no actúa sobre una carga en reposo. Sin embargo no parece muy lógico que deje tranquilas del mismo modo a las cargas en movimiento, porque hemos visto que las cargas en movimiento se comportaban como imanes, incluso Ampère conjeturó que los imanes están hechos de cargas en movimiento; entonces un imán actuando sobre una carga en movimiento debería ser como un imán actuando sobre un imán y está claro que hay atracción o repulsión entre imanes.



Los experimentos de Ampère indicaban una atracción entre conductores paralelos con corrientes en el mismo sentido y entonces es lógico pensar que el campo eléctrico generado por uno de los conductores atrae a cada carga del otro con una fuerza perpendicular a su velocidad. También es plausible que esta fuerza sea proporcional a la carga y su velocidad, por la definición de corriente. Dividiendo la velocidad por c para que sea adimensional, con ello, podemos desvelar el misterio de la definición de $\vec{B}$, es simplemente la "constante" vectorial de proporcionalidad al escribir la fuerza como $q\,(\vec{v}/c) \times \vec{B}$ con $\times$ el producto vectorial de los cursos de bachillerato, no el muy escalar de los de primaria. Si unimos las dos definiciones se tiene la fórmula de lo que se llama *fuerza de Lorentz*:

$$\vec{F} = q\big(\vec{E} + c^{-1}\vec{v} \times \vec{B}\big), \tag{32}$$

que es la fuerza que sufre una carga en campo electromagnético y a veces se considera la quinta ecuación de Maxwell aunque para nosotros ha sido la definición de verdad de $\vec{E}$ y de $\vec{B}$.

Vamos ahora con un par de curiosidades que muchas veces no consideran los cursos básicos.

Si la corriente eléctrica es el movimiento de electrones en un conductor y el sentido de $\vec{B}$ alrededor de un conductor rectilíneo es como hemos dibujado, entonces de acuerdo con (32) los electrones que van hacia arriba deberían ser repelidos porque tiene carga negativa pero eso contradice que conductores con corriente en el mismo sentido se atraigan (la experiencia que hizo Ampère). ¿Dónde está el truco? Tiene que ver con la historia. En los siglos XVIII y gran parte del XIX no se sabía mucho de la naturaleza de la electricidad (J.J. Thomson no descubrió el electrón hasta 1897) y se tomó su sentido como si fuera producida por el movimiento de cargas positivas. Esto es lo que se llama *sentido convencional* de la electricidad y se sigue empleando en los textos de hoy en día a pesar de que es el opuesto al sentido real de los electrones. En fin, un desastre, después de que al polo sur del campo magnético terrestre se le llame polo norte magnético, resulta que se llama sentido convencional de la electricidad al contrario del que realmente tiene.

La otra curiosidad es de esas con mala gaita con la que posiblemente pilles a tu profe. Pregúntale cómo de rápido va la electricidad. Te dirá que a una velocidad comparable a la de la luz. ¿Entonces los electrones libres del conductor que la transmiten se mueven a esa velocidad? Si te dice que sí, le has pillado. Para los voltajes, intensidades y conductores a los que estamos acostumbrados, los electrones van mucho más lentos que un caracol (busca *drift velocity* en la red). La velocidad de la electricidad es realmente la de las ondas electromagnéticas. Si imaginamos los electrones como caracoles rígidos (desecados más que disecados) lo que ocurre es que el pequeño empujón del último llega casi al instante al primero, a una velocidad como la de la luz, eso no significa que ningún caracol se haya desplazado muy rápido.

8. Fantaseando con monopolos magnéticos

Supongamos que mañana mismo se descubre un monopolo magnético (comentario: si has leído su anuncio en la prensa de hace unos años, se referían a los de sistemas de materia condensada [Blu12], no a los de "verdad") ¿cómo deberíamos modificar las ecuaciones de Maxwell? Ya habíamos dado un paso en esta dirección escribiendo (21). La manera más rigurosa de analizar la dinámica es creerse a pie juntillas la relatividad especial aplicada al electromagnetismo y estudiar las fuerzas sobre un monopolo en reposo para un observador y en movimiento para otro [Rin89]. Aquí apelaremos a un argumento menos riguroso pero más atractivo, de simetría, que además de la dinámica (fuerzas) permite deducir una forma generalizada de (27).

¿Qué relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deja invariante las ecuaciones originales (1)? No es $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ porque falta un signo. Seguro que se te ocurre como arreglarlo pensando un poquito, basta considerar $(\vec{E}, \vec{B}) \mapsto (\vec{B}, -\vec{E})$. Si piensas un "muchito", quizá llegues a las llamadas *transformaciones de dualidad*

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \tag{33}$$

que generalizan la transformación de pensar poquito, la cual corresponde a $\xi = -\pi/2$.

En manos de alguien con vicios matemáticos, (33) da pie a definir un campo electromagnético complejo $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{B}$ (¿sumar peras y manzanas siempre que sean imaginarias?) de modo que las ecuaciones (1) se reducen a

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \tag{34}$$

¡Sólo dos! y las transformaciones de dualidad son la trivialidad de su invariancia por $\vec{\mathcal{E}} \mapsto e^{i\xi}\vec{\mathcal{E}}$. Esta formulación elegante data de 1907 [Sil07] y parece que no ha tenido gran impacto en el desarrollo de la teoría del electromagnetismo.

Por supuesto, (33) no deja invariante (27), ni tampoco su versión pobre $(\vec{E}, \vec{B}) \mapsto (\vec{B}, -\vec{E})$, porque la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\vec{\jmath}$ no tienen su análogo magnético ¿o sí? Si nos creemos la existencia de monopolos, tras (21) la primera ecuación de (34) con fuentes es $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{P}$ donde $\mathcal{P} = \rho + i\rho_m$. La simetría queda restablecida si imponemos $\mathcal{P} \mapsto e^{i\xi}\mathcal{P}$ al tiempo que $\vec{\mathcal{E}} \mapsto e^{i\xi}\vec{\mathcal{E}}$. La regla parece clara: lo eléctrico es la parte real y lo magnético la parte imaginaria. Debiera entonces definirse $\vec{\mathcal{J}} = \vec{\jmath} + i\vec{\jmath}_m$ donde $\vec{\jmath}_m$ es la *densidad de corriente magnética*, la compañera magnética de $\vec{\jmath}$ debida al movimiento de monopolos magnéticos. Como $4\pi\vec{\jmath}$ se suma a $\partial\vec{E}/\partial t$ en la cuarta ecuación de (27), habría que hacer lo propio con $4\pi\vec{\mathcal{J}}$ y $\partial\vec{\mathcal{E}}/\partial t$ en (34) y así preservar de nuevo la simetría $\vec{\mathcal{J}} \mapsto e^{i\xi}\vec{\mathcal{J}}$, $\vec{\mathcal{E}} \mapsto e^{i\xi}\vec{\mathcal{E}}$. En resumidas cuentas, bajo la hipótesis de los monopolos magnéticos, las ecuaciones de Maxwell en forma compleja deberían ser

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{P} \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{c}\Big(4\pi\vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}\Big) \tag{35}$$

que permanecen invariantes cuando $\vec{\mathcal{E}}$, $\mathcal{P}$ y $\vec{\mathcal{J}}$ se multiplican por $e^{i\xi}$. Recordando las definiciones

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{B}, \qquad \mathcal{P} = \rho + i\rho_m \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathcal{J}} = \vec{\jmath} + i\vec{\jmath}_m, \tag{36}$$

las ecuaciones (35) en forma real son la siguiente generalización de (27)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{37}$$

¿Y qué ocurre con la "quinta ecuación de Maxwell"? La simetría sencilla que intercambia en (37) campos eléctricos y magnéticos es $(\vec{E}, \vec{B}) \mapsto (\vec{B}, -\vec{E})$, $(\rho, \rho_m) \mapsto (\rho_m, -\rho)$, $(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}_m) \mapsto (\vec{\jmath}_m, -\vec{\jmath})$. De acuerdo con esta simetría, la expresión $q\big(\vec{E} + c^{-1}\vec{v} \times \vec{B}\big)$ que da la fuerza sobre las cargas eléctricas debiera tener su análogo magnético en $q_m\big(\vec{B} - c^{-1}\vec{v} \times \vec{E}\big)$ donde interpretamos q y q_m como integrales de sus densidades. Por tanto la fuerza total, sobre cargas eléctricas y magnéticas, es la siguiente quinta ecuación de Maxwell que generaliza (32)

$$\vec{F} = q\big(\vec{E} + c^{-1}\vec{v} \times \vec{B}\big) + q_m\big(\vec{B} - c^{-1}\vec{v} \times \vec{E}\big). \tag{38}$$

El futuro dirá si estas ecuaciones tienen uso.

Apéndice de cálculo II

Si estás leyendo esto, posiblemente haya que recordarte los siguientes operadores diferenciales en $\mathbb{R}^3$. Los dos más importantes actuando sobre campos vectoriales $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ son la *divergencia*

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{39}$$

y el *rotacional*

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big). \tag{40}$$

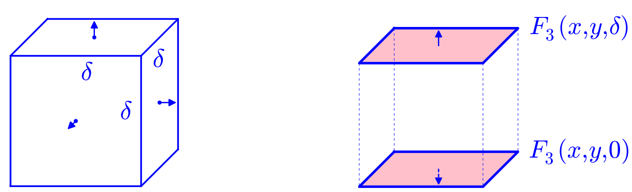
El determinante es sólo mnemotecnia para acordarse de la verdadera definición que es la de la derecha.

Los operadores estrella para funciones escalares $f = f(x, y, z)$ son el *gradiente* y el *laplaciano*

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big) \qquad \text{y} \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{41}$$

Seguro que has visto estos operadores en clase pero no tan seguro que te hayan contado qué significan. Esto da una razón más para aprender física con [FLS64], donde se dedica unas páginas a ello. Maxwell bautizó a algunos de estos operadores con nombres ilustrativos: Llamó *convergencia* a $-\nabla \cdot \vec{F}$ (parece que el nombre de divergencia proviene de O. Heaviside [Fle08], el padre de la formulación moderna de las ecuaciones de Maxwell) y propuso el nombre de rotacional para $\nabla \times \vec{F}$ aunque, según sus palabras, "con gran inseguridad". Además, llamó *concentración* a $-\Delta f$, un nombre que no ha cuajado. Maxwell también dedicó en [Max54] algún esfuerzo para explicar el significado de estos operadores tras introducirlos.

Para entender la divergencia consideremos el cubo $Q = [0, \delta] \times [0, \delta] \times [0, \delta]$.



Al calcular la integral sobre su superficie ∂Q con la normal exterior, tenemos que integrar en las seis tapas. Consideremos la de arriba y la de abajo. Como las normales son $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$, respectivamente, la integral de superficie es (recuerda que hay que integrar $\vec{F} \cdot \vec{N}$)

$$\int_0^\delta \int_0^\delta \big(F_3(x, y, \delta) - F_3(x, y, 0) \big)\, dydx = \int_0^\delta \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dzdydz \sim \delta^3 \frac{\partial F_3}{\partial z}(\vec{0}). \tag{42}$$

¿Y qué quiere decir ese churrito? Simplemente que si $\delta \to 0$ el error relativo se hace tan pequeño como deseemos. Procediendo de la misma manera con los otros pares de caras,

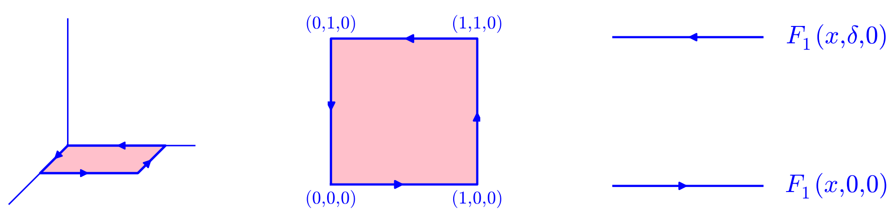
$$\int_{\partial Q} \vec{F} = \int_Q \nabla \cdot \vec{F} \sim \delta^3 (\nabla \cdot \vec{F})(\vec{0}). \tag{43}$$

La igualdad es el teorema de la divergencia para un cubo y la conclusión que sacamos con el churrito es que en general

$$(\nabla \cdot \vec{F})(\vec{a}) = \lim_{|Q| \to 0} \frac{1}{|Q|} \int_{\partial Q} \vec{F} \tag{44}$$

donde Q es un cubo que contiene a $\vec{a}$ y $|Q|$ es su volumen. Si $\vec{F}$ "sale" de Q, $\vec{F} \cdot \vec{N} > 0$ y la integral es positiva, de esta forma $\nabla \cdot \vec{F}$ mide cuánto campo sale de la superficie infinitesimal que rodea a un punto, cuánto "diverge". Si te han contado por qué las integrales de superficie se definen como se definen, sabrás que indican flujos y $\nabla \cdot \vec{F}$ es entonces la cantidad de flujo por unidad de volumen. En mecánica de fluidos se impone $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ para indicar que lo que sale por un lado se compensa con lo que entra por otro. No es extraño entonces que Maxwell diera modelos mecánicos para el electromagnetismo (hoy obsoletos) teniendo en mente los fluidos.

El rotacional es un poco más complicado. Tomamos el cuadrado $C = [0, \delta] \times [0, \delta] \times \{0\}$ que está en el plano XY.



Si integramos $\vec{F}$ sobre ∂C con la orientación indicada, la contribución de los lados paralelos al eje X es

$$\int_0^\delta \big(F_1(x,0,0) - F_1(x,\delta,0) \big)\, dx = -\int_0^\delta \int_0^\delta \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dydx. \tag{45}$$

Un cálculo análogo con los otros lados opuestos prueba

$$\int_{\partial C} \vec{F} = \int_0^\delta \int_0^\delta \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)\, dydx \sim \delta^2 (\nabla \times \vec{F})_3(\vec{0}) \tag{46}$$

donde $(\nabla \times \vec{F})_3$ es la tercera coordenada del rotacional. La igualdad es el teorema de Green para un cuadrado. En general

$$(\nabla \times \vec{F})_3(\vec{a}) = \lim_{|C| \to 0} \frac{1}{|C|} \int_{\partial C} \vec{F} \tag{47}$$

donde C es un cuadrado paralelo al plano XY con área $|C|$ y que contiene a $\vec{a}$. Ahora bien, $\int_{\partial C} \vec{F}$ es la "circulación" de $\vec{F}$ alrededor de ∂C, la parte de $\vec{F}$ que se aprovecha si nos movemos en la trayectoria cerrada ∂C. En ese sentido, indica una rotación. ¿De dónde viene la inseguridad de Maxwell con el nombre? Quizá provenga de que sólo se computa la rotación tangencial a ∂C. Si el campo fuera siempre perpendicular a la frontera, $\int_{\partial C} \vec{F} = 0$, no haría trabajo, sin embargo visualmente da vueltas. Por supuesto, las otras coordenadas del rotacional son análogas considerando cuadrados paralelos a los otros ejes de coordenadas.

Maxwell, al final de su presentación de los operadores diferenciales en [Max54], escribe lo que en notación moderna es

$$f(\vec{a}) - \frac{1}{\big|B_\delta(\vec{a})\big|} \int_{B_\delta(\vec{a})} f \sim -\frac{\delta^2}{10}(\Delta f)(\vec{a}) \tag{48}$$

donde $B_\delta(\vec{a})$ es la bola de radio δ centrada en $\vec{a}$ y $\big|B_\delta(\vec{a})\big|$ es su volumen. Si f está muy concentrada cerca de $\vec{a}$ entonces es mayor que el promedio representado con la expresión integral, por ello Maxwell llamó concentración a $-\Delta f$. Es posible incluso completar el segundo miembro de (48) a una serie de Taylor en δ, parte de la historia está reflejada en [Sim16].

Para terminar, algo para llevarse a casa: la fórmula (48) no es demasiado famosa y no es tan fácil de probar sufriendo sólo un curso básico de cálculo II. ¿Te atreves con ella?

Referencias

[Blu12] S.J. Blundell. *Magnetism: A Very Short Introduction.* Very Short Introductions. OUP Oxford, 2012.

[Fle08] D. Fleisch. *A Student's Guide to Maxwell's Equations.* Cambridge University Press, 2008.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[Her90] H. Hertz. *Las ondas electromagnéticas.* Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990.

[Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459–513, 1865.

[Max54] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism.* Dover Publications Inc., New York, 1954. 3d ed, Two volumes bound as one.

[Rin89] W. Rindler. Relativity and electromagnetism: The force on a magnetic monopole. *Am. J. Phys.*, 57:993–994, 1989.

[Sil07] L. Silberstein. Nachtrag zur Abhandlung über Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung. *Annalen der Physik*, 329:783–784, 1907.

[Sim16] D. J. Siminovitch. Comment on "The geometrical significance of the Laplacian"[Am. J. Phys. 83, 992–997 (2015)]. *Am. J. Phys.*, 84(8):646, 2016.

Índice alfabético

Ampère, A.-M. (1775–1836), 12, 14
Ampère, ley de, 12

Cavendish, H. (1731–1810), 7
concentración, 17
convergencia, 17
Coulomb, Ch.-A. (1736–1806), 7
Coulomb, ley de, 7

densidad de carga, 11
densidad de carga magnética, 11
densidad de corriente, 12
densidad de corriente magnética, 16
dipolo eléctrico, 7
dipolo magnético, 9
divergencia, 1, 17
drift velocity, 15

ecuación de ondas, 4
electrón, 15
electronegatividad, 9

Faraday, M. (1791–1867), 1, 2

Galvani, L. (1737–1798), 2
Gauss, C.F. (1777–1855), 5
gradiente, 17

Heaviside, O. (1850–1925), 17
Henry, J. (1797–1878), 12
Hertz, H. (1857–1894), 4

inducción magnética, 1
intensidad de campo eléctrico, 1
intensidad de corriente, 12

líneas de campo, 8
líneas de fuerza, 8
laplaciano, 17
Lenz, ley de, 11
ley de conservación de la carga, 13
ley de gravitación universal, 7
Lorentz, fuerza de, 14

Marconi, G. (1874–1937), 5
Maxwell, ecuaciones de, 1
Maxwell, J.C. (1831–1879), 1, 3
monopolo eléctrico, 7
monopolo magnético, 9

Newton, I. (1642–1727), 7

ondas electromagnéticas, 4
Ørsted, H.C. (1777–1851), 11

polo norte magnético, 3

rotacional, 1, 17
Ruhmkorf, bobina de, 5

sentido convencional, 15
shell theorem, 9

Tesla, N. (1856–1943), 5
Thomson, J.J. (1846–1940), 15
transformaciones de dualidad, 15

Volta, A. (1745–1827), 2