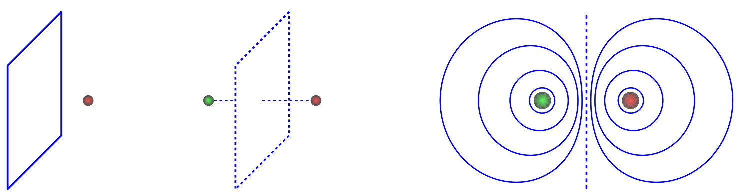
El método de las imágenes

Fernando Chamizo Lorente

El método del título se utiliza para construir soluciones en diversos problemas de la física matemática. Más que de imágenes es de imaginación, uno debe imaginar que hay objetos físicos ficticios tales como cargas o fuentes de calor que imponen simetrías forzando las condiciones de contorno del problema reduciéndolo a uno conocido.

El ejemplo paradigmático es que si uno tiene una solución $\varphi = \varphi(x, y, z)$ de $-\Delta\varphi = \rho$ en $\mathbb{R}^3$, donde ρ es una función con soporte contenido en $y > 0$, entonces se puede hallar una solución φ_+ del problema en el semiplano derecho $-\Delta\varphi_+ = \rho$ bajo la condición de contorno $\varphi_+(x, 0, z) = 0$, tomando $\varphi_+(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \varphi(x, -y, z)$. Es una tontería comprobar que esto es cierto, el método de las imágenes trata de cómo se inventa uno el truco físicamente. La solución de $-\Delta\varphi = \rho$ da el potencial electrostático cuando la densidad de carga es ρ (en unidades adecuadas). Si ahora situamos cargas opuestas simétricas por el plano XZ, el potencial correspondiente será $-\varphi(x, -y, z)$, el primer menos por el cambio de carga y el segundo por la simetría. Los que saben electrostática básica reconocen las superficies equipotenciales de un dipolo de cargas opuestas y que el plano corresponde a potencial nulo, de ahí la fórmula para φ_+.



Veamos ahora un ejemplo más complicado que implica infinitas imágenes. Tomemos como problema conocido (C), hallar la distribución de temperaturas $u = u(x, t)$ en una varilla infinita $x \in \mathbb{R}$ según evoluciona el tiempo $t > 0$, partiendo de una distribución de temperaturas $f = f(x)$. Y tomemos como problema desconocido (D) lo mismo pero ahora en la varilla unidad $0 \le x \le 1$ con los extremos a temperatura cero. Lo que hay que resolver son las siguientes *ecuaciones del calor*

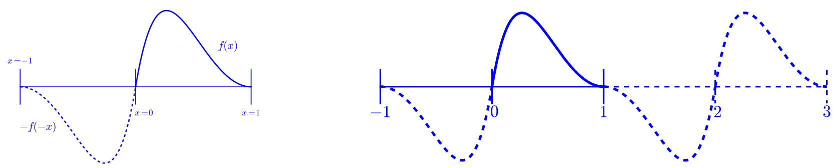
$$(1) \qquad (\mathrm{C}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \qquad \text{y} \quad (\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, 1),\ t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

Con métodos convencionales es fácil hallar una función $G = G(x, t)$, la escrita más abajo, que resuelve (C) cuando $f(x) = \delta(x)$, la *delta de Dirac*, y de ahí, empleando $f(x) = \int \delta(x - y) f(y)\, dy$, se deduce que la fórmula que da la solución general de (C) es

$$(2) \qquad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) f(y)\, dy \qquad \text{con} \quad G(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}.$$

Por razones obvias a G se le llama *solución fundamental*. La moraleja es que si hallamos un solución que tienda a la delta de Dirac cuando $t \to 0^+$, tendremos una fórmula para todas.

Sin embargo este esquema no funciona con (D), la fórmula $u(x,t) = \int_0^1 G(x-y,t)f(y)\,dy$ no da la solución general porque no cumple las condiciones de contorno. ¿Cómo obligar a que se verifique $u(0,t) = 0$? Uno razona física y geométricamente y dice, imaginemos que detrás del extremo $x = 0$ situamos fuentes de frío exactamente opuestas a las fuentes de calor que dan lugar a la distribución de temperaturas u, entonces la temperatura será cero en el punto medio. Matemáticamente, podríamos tomar $u(x,t) = \int_{-1}^1 G(x-y,t)f^*(y)\,dy$ donde f^* es la extensión impar de f a $[-1,1]$.



Pero esta función no satisface $u(1,t) = 0$ en general, para forzarlo hacemos de nuevo la extensión impar, ahora por $x = 1$, que es la propia función trasladada. Matemáticamente esto es lo mismo que considerar $u(x,t) = \int_{-1}^1 \big(G(x-y,t) + G(x-y-2,t)\big)f^*(y)\,dy$. Con ello se estropea la simetría que aseguraba $u(0,t) = 0$ pero indica un procedimiento a seguir: se puede conseguir la simetría impar por $x = 0$ y por $x = 1$ simultáneamente tomando todos los trasladados de dos en dos unidades. La idea entonces lleva a considerar como solución general de (D)

$$(3) \qquad u(x,t) = \int_{-1}^1 G_D(x-y,t)f^*(y)\,dy \qquad \text{con} \quad G_D(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2n)^2/4t}.$$

Independientemente de los métodos “físicos” para llegar a la solución, a uno le gustaría tener un argumento matemático para comprobar que el resultado es correcto. Esto ya es un poco problemático en (2) porque comprobar $u(x,0^+) = f(x)$ requiere enfrentarse a la explosión de G. El problema se agrava con G_D donde hay una serie infinita.

Aplicando la *fórmula de sumación de Poisson*, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$, a G_D se obtiene

$$(4) \qquad G_D(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} e^{\pi i n x}.$$

De esta forma (3) es

$$(5) \qquad u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} e^{\pi i n x} \qquad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^*(y) e^{-\pi i n y}\,dy.$$

Los c_n son los coeficientes de Fourier de f^* en $[-1,1]$, que si f es decente decaerán a toda velocidad. De está forma está claro que $u(x,t)$ satisface la ecuación del calor y $u(x,0) = f(x)$ no es más que decir que f^* es igual a su desarrollo de Fourier. Podríamos haber obtenido el mismo resultado aplicando el método de separación de variables ¡no hay nada nuevo bajo el Sol!