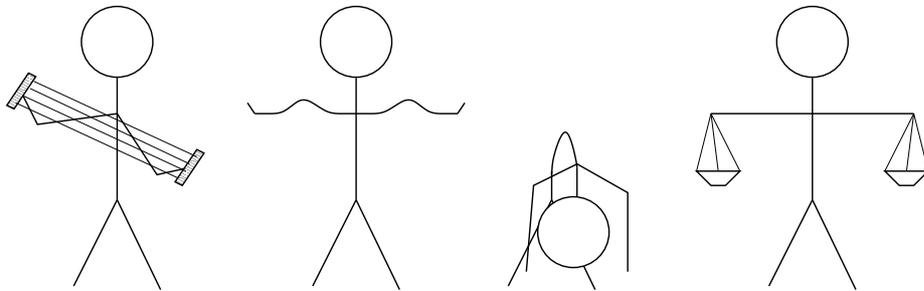


# Geometría IV

(tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso)



Fernando Chamizo Lorente

Curso 2007-2008

o r e n t e F e r n a n d o  
L 2007/2008 o  
o z i m a h C



# Índice general

<b>1. Álgebra tensorial</b>	<b>1</b>
1.1. Tensores en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1
1.2. Repaso de Geometría III . . . . .	8
1.3. Tensores en el espacio tangente . . . . .	13
1.4. Formas diferenciales . . . . .	19
<b>2. Topología diferencial</b>	<b>27</b>
2.1. El teorema de Stokes . . . . .	27
2.2. Cohomología de de Rham . . . . .	40
<b>3. Geometría riemanniana</b>	<b>55</b>
3.1. Métricas y geodésicas . . . . .	55
3.2. La métrica de Schwarzschild . . . . .	66
3.3. Cálculo tensorial . . . . .	76
<b>4. Curvatura y gravedad</b>	<b>85</b>
4.1. El tensor de curvatura . . . . .	85
4.2. Las ecuaciones de campo . . . . .	94



# Prefacio

*Nota: Éste fue el prefacio del curso 2006-2007 antes de que se finalizasen los apuntes de la anterior versión.*

## SOBRE LA ASIGNATURA:

Tradicionalmente la asignatura optativa de geometría ha tenido pocos alumnos, sin que parezca que haya una influencia determinante de profesores u horarios. Este fenómeno se transmite también al Tercer Ciclo y en nuestro Departamento ha habido comparativamente pocos estudiantes que hayan comenzado el Doctorado con un interés principal en geometría. Aunque realmente no comprendo las causas de este fenómeno, nada me impide utilizar unas líneas para hacer un poco de propaganda. Es verdad que todos los profesores en distintos foros: el primer día de clase, en los ajustes de planes de estudio, en los informes para solicitar financiación, etc. afirman honestamente que su materia es bellísima e importantísima. En mi caso tópicos parecidos, menos radicales, tienen un valor diferente, puede que más ingenuo y a la vez más imparcial, cuando los aplico a la Geometría IV porque esta no es mi materia, soy sólo un aficionado.

Quisiera incidir en que, a mi juicio, parte de la belleza de este curso de geometría es que conjuga varios temas que aparecen a lo largo de la licenciatura. Versando sobre geometría diferencial, evidentemente el análisis, en su versión primitiva de integrales y derivadas, aparece por doquier. Por fin tendremos una noción clara de las formas diferenciales que habían despuntado en varias asignaturas así como una formulación general del teorema de Stokes. La topología, tal como se veía en segundo parecía ajena al mundo diferencial pero durante el curso comprobaremos lo erróneo de este prejuicio y podremos resolver en el entorno geométrico algunos problemas que se resistían a los rudimentos de la homotopía. De hecho si uno quiere asomarse al apasionante mundo de la topología algebraica, puede encontrar más sencillo comenzar a mirar por la ventana de la geometría. El álgebra lineal, cómo no, también se explota y amplía en este curso y conceptos abstractos como el de espacio dual se harán ahora más tangibles. Si alguien tiene interés en la física matemática, los conocimientos de geometría son imprescindibles y en particular la relatividad general se puede deducir de modo geométrico a partir de unos supuestos básicos.

El párrafo anterior puede dar una idea de que la asignatura es muy difícil porque engloba muchas cosas de muchas asignaturas. Cada uno puede sacar sus conclusiones al final de curso pero indudablemente es mejor y más fácil aprender ideas generales que recordar una miriada de casos particulares. Por poner un ejemplo, en el bachillerato, al menos en el antiguo, parecía que había un montón de tipos de límites y de reglas para calcularlos, pasado el tiempo podemos hacer casi todos los ejercicios que nos proponían sin siquiera escribir una línea en un papel.

## SOBRE EL CONTENIDO DE LOS APUNTES:

Como esta asignatura es optativa y de ocupación muy limitada, cabe cierta libertad sobre los contenidos que he reflejado en los apuntes. En los últimos años la asignatura se ha centrado en la topología diferencial [GoG] recuperando temas básicos de topología algebraica que desaparecieron de la licenciatura cuando se redujo su duración. Probablemente, los alumnos encontrarían más atractivos esos temas que los de topología general que ocupan casi todo el curso de segundo pero no se puede correr sin aprender a gatear.

He tomado la decisión de reducir los contenidos recientes de la asignatura a poco más de un capítulo para poder tratar otros temas que continúan en cierta manera la Geometría III recogida en [Di] y [GoJ], aprovechando parcialmente material propio anterior, en especial de un curso de relatividad general [Ch] que impartí hace años en la asignatura de Seminario. No estoy convencido en absoluto de que este enfoque sea adecuado ni quiero sugerirlo como una orientación para el futuro. Es más, después de que llevo escritas una parte de estas notas echo de menos la claridad de [GoG] tanto en los objetivos como en la exposición. Sí que es cierto que mi planteamiento liga diferentes visiones de la asignatura y alguien podría considerar positiva esta síntesis.

Fernando Chamizo  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid

Febrero 2007

## Nota del curso 2007-2008

En este curso se ha reorganizado el material para llegar a contar algo de relatividad general. También se han corregido algunas erratas. Agradezco a todos los que han contribuido a ello, especialmente a Carlos Quesada González, que me señaló la mayor parte de ellas. Al finalizar el curso se ha añadido una sección más al capítulo 3 y se ha escrito un capítulo 4 con dos secciones, una sobre la curvatura y otra sobre las ecuaciones de campo de la relatividad general.

Julio 2008

# Capítulo 1

## Álgebra tensorial

### 1.1. Tensores en $\mathbb{R}^n$

No es difícil tener prejuicios contra los tensores: al abrir cualquier libro con esa palabra en su título nos saltan a la vista un montón de subíndices y superíndices adornados con comas, puntos y comas y otros símbolos cuando se pasa al cálculo tensorial. Todo ello da una sensación misteriosa de taquigrafía impenetrable. Para los matemáticos, que muchas veces tienen otros prejuicios contra la Física, los temores se agravan por la conocida aplicación de los tensores en la teoría de la relatividad o en una parte de la mecánica.

El propósito de esta primera sección constituida por definiciones y ejemplos es perder ese miedo. El álgebra tensorial no es más que una extensión natural del álgebra lineal. El cálculo tensorial, que se verá más adelante, sigue las mismas directrices que el cálculo en subvariedades del segundo curso: todo es lineal en entornos pequeños. Como no hay sistemas naturales de coordenadas las cosas se complican pero conceptualmente ni el álgebra ni el cálculo tensorial son especialmente difíciles<sup>1</sup>.

En el curso de primero se estudió álgebra lineal de una variable vectorial, pero nada impide considerar dos, tres o más variables; lo cual lleva directamente a la noción de tensor sobre un espacio vectorial.

Antes de dar la definición precisa de tensor, veamos algunos ejemplos sencillos que la motivan.

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ . Los libros dicen que cualquiera de estos espacios es isomorfo a algún  $\mathbb{R}^m$ , así que para fijar ideas podemos suponer que de hecho  $V = \mathbb{R}^m$ . Con una tipografía difícil de mantener, todas las aplicaciones lineales

---

<sup>1</sup>Si se permite una comparación extravagante, es como si alguien dijera que es muy complicado jugar al mus. Evidentemente es muy difícil aprender a jugar sólo oyendo “sí, no, paso, órdago” pero las reglas las podría aprender cualquier tonto (y encima ganarnos). Tampoco en Matemáticas puede uno limitarse a mirar u oír.

$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$  se expresan en coordenadas (lo cual requiere fijar una base) como

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m.$$

Es decir, cada una de ellas está determinada por una matriz de coeficientes  $1 \times m$  o lo que es lo mismo un vector horizontal  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Recuérdese que al conjunto de estas aplicaciones lineales se le llama *espacio dual* y se denota con  $V^*$ . Como es sólo una cuestión estética escribir vectores en vertical o en horizontal (de hecho por razones tipográficas pocas veces se escriben en vertical),  $V$  y  $V^*$  son lo mismo; o dicho matemáticamente, isomorfos. Recuérdese que a una base de  $V$ ,  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ , se le puede asignar una base de  $V^*$ , llamada la *base dual*,  $\{\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^m\}$ , de manera que  $\tilde{\varphi}^i(\vec{e}_j) = 0$  si  $i \neq j$  y  $\tilde{\varphi}^i(\vec{e}_i) = 1$ .

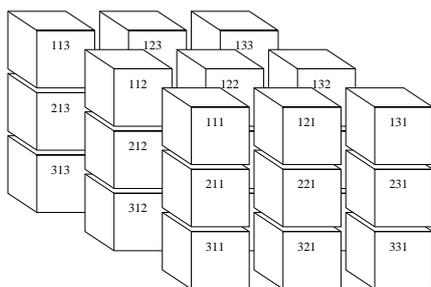
Consideremos ahora una aplicación bilineal, esto es, lineal en dos variables:

$$\begin{aligned} a_1) \quad f(\lambda\vec{x}, \vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) & b_1) \quad f(\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}) &= f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}', \vec{y}) \\ a_2) \quad f(\vec{x}, \lambda\vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) & b_2) \quad f(\vec{x}, \vec{y} + \vec{y}') &= f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}, \vec{y}') \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que todas las funciones bilineales de  $V \times V$  en  $\mathbb{R}$  son de la forma

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Si ahora considerásemos una aplicación *trilineal* necesitaríamos una matriz tridimensional para colocar los vectores lo cual no es muy operativo, por ejemplo, para  $m = 3$  tendríamos que desguazar un cubo de Rubik y poner un número en cada trozo; y en el caso  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  utilizar un cubo de Rubik cuatridimensional (parece que los hay virtuales en la red). Lo bueno de la abstracción matemática es que uno puede definir objetos sin necesidad de dibujarlos ni de que existan, y nadie protesta (demasiado).



Así que consideremos las aplicaciones lineales “a lo grande”.

**Definición:** Se dice que  $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ , donde  $V_1, V_2, \dots, V_n, W$  son espacios vectoriales, es una *aplicación multilineal* si para todo  $1 \leq i \leq n$

- $f(\vec{v}_1, \dots, \lambda\vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) = \lambda f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$
- $f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i + \vec{v}_i', \dots, \vec{v}_n) = f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) + f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i', \dots, \vec{v}_n)$ .

Es habitual que las variables de una aplicación multilineal tengan todas la misma naturaleza y por tanto  $V_1 = V_2 = \dots = V_n$ . Daremos un nombre a esta situación en el caso simple en que  $W = \mathbb{R}$ .

**Definición:** Se llama *tensor  $n$  veces covariante* a cualquier aplicación multilineal de la forma  $T : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Ejemplo: El producto escalar usual en  $\mathbb{R}^m$  define un tensor dos veces covariante.

Ejemplo: El determinante aplicado a  $m$  vectores de  $\mathbb{R}^m$  define un tensor  $m$  veces covariante.

Ejemplo: La función que asigna a  $n$  vectores de  $\mathbb{R}^m$  el producto de sus primeras coordenadas (en la base canónica) es un tensor  $n$  veces covariante.

Al igual que en cálculo de varias variables se consideran funciones vectoriales, también podríamos definir algo así como tensores vectoriales, de la forma  $f : V \times \dots \times V \longrightarrow V$  o incluso complicar más las cosas permitiendo  $f : V \times \dots \times V \longrightarrow V \times V$ , etc. Cada vector “vertical” puede pasarse a un número real (pre-)multiplicando por un vector “horizontal”, así que a cada  $f : V \times \dots \times V \longrightarrow V$  se le puede asociar  $T : V^* \times V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(\tilde{\varphi}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \tilde{\varphi}(f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n))$  para cada  $\tilde{\varphi} \in V^*$ . Además por el isomorfismo entre  $V$  y  $V^*$ , esta correspondencia es biyectiva<sup>2</sup>.

En definitiva, da igual considerar los hipotéticos tensores vectoriales, sin gancho entre los matemáticos, que considerar los tensores antes definidos pero permitiendo sustituir algunos de los factores  $V$  por  $V^*$ . Lo más breve es generalizar de esta forma la definición anterior.

**Definición:** Se llama *tensor  $r$  veces contravariante y  $s$  veces covariante* o *tensor de tipo  $(r, s)$*  a una aplicación multilineal  $T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Comparando con la definición previa, un tensor  $n$  veces covariante es un tensor de tipo  $(0, n)$ . Por otro lado los tensores de tipo  $(n, 0)$  se dice que son  $n$  veces contravariantes. Por convenio además diremos que *una constante es un tensor de tipo  $(0, 0)$* . Obsérvese que hay cierta lógica en esta notación porque una constante no depende de ningún vector.

Como ejemplo, nótese que un endomorfismo  $f : V \longrightarrow V$  asigna a cada vector otro vector, y según la identificación anterior da lugar a un tensor de tipo  $(1, 1)$ . En coordenadas, si representamos el endomorfismo como  $f(\vec{v}) = A\vec{v}$  para cierta matriz cuadrada  $A$  y un elemento  $\tilde{\varphi} \in V^*$  como un vector horizontal, el tensor correspondiente es  $T(\tilde{\varphi}, \vec{v}) = \tilde{\varphi}(A\vec{v})$ .

Al igual que hablamos de las componentes (o entradas o coeficientes) de una matriz en cierta base, nos podemos referir a las componentes de un tensor (excluiremos implícitamente el caso  $r = s = 0$ ).

<sup>2</sup>Todo este párrafo se resume en lo siguiente: si tienes un vector y quieres un número, haz el producto escalar con otro vector arbitrario y si además quieres quedar bien, di que ésa es la acción de  $V^*$  sobre  $V$ .

**Definición:** Supongamos que  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$  es una base de  $V$  y la base dual es  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \dots, \tilde{\varphi}^m\} \subset V^*$ . Se llaman *componentes de un tensor*,  $T$ , de tipo  $(r, s)$ , en estas bases a los números reales

$$T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = T(\tilde{\varphi}^{i_1}, \tilde{\varphi}^{i_2}, \dots, \tilde{\varphi}^{i_r}, \vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \dots, \vec{e}_{j_s}).$$

A partir de ahora pondremos especial atención en enumerar los elementos de  $V$  (los vectores) con subíndices y los de  $V^*$  (a veces llamados *contravectores*) con superíndices para que sea más claro de dónde viene cada componente de un tensor

Ejemplo: Calcular las componentes del tensor  $D$  definido por el determinante en  $\mathbb{R}^2$  con la base usual.

Claramente  $D(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = D(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$  y  $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -D(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 1$ , por lo que sus componentes son  $D_{11} = D_{22} = 0$ ,  $D_{12} = -D_{21} = 1$ . Esto está estrechamente relacionado con la igualdad (inútil)

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (a \ b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Nótese que una igualdad similar para el determinante en  $\mathbb{R}^m$  requeriría algo así como “matrices  $m$ -dimensionales” cuyos elementos serían las componentes del tensor.

Ejemplo: Escribir un tensor  $(2, 1)$ ,  $S : (\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , tal que, empleando la base canónica, tenga  $S_2^{12} = 1$  como única componente no nula.

Basta tomar el tensor definido por

$$S\left((a \ b), (c \ d), \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\right) = adf.$$

Está claro que una vez fijada una base un tensor está determinado por sus componentes. Por ejemplo, el tensor  $T$  de tipo  $(1, 1)$  correspondiente a un endomorfismo tiene como componente  $T_j^i$  el elemento  $ij$  de la matriz que lo define en cierta base. Para el endomorfismo identidad las componentes se suelen denotar con el símbolo  $\delta_j^i$  que significa

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Un vector  $\vec{v}$  también puede considerarse como un tensor de tipo  $(1, 0)$  que aplica cada  $\tilde{\varphi} \in V^*$  en  $\tilde{\varphi}(\vec{v})$  y sus componentes en una base son simplemente sus coordenadas. De la misma forma un elemento de  $V^*$  se puede considerar un tensor de tipo  $(0, 1)$  cuyas componentes son sus coordenadas en la base dual. Consecuentemente el concepto de tensor engloba a los principales personajes del álgebra lineal del primer curso.

El conjunto de todos los tensores de tipo  $(r, s)$  tiene estructura de espacio vectorial, porque podemos multiplicar por números, sumar y restar tensores del mismo tipo.

También se puede definir una especie de multiplicación exterior de dos tensores no necesariamente del mismo tipo, que se reduce a sustituir parte de las variables en uno y la otra parte en el otro, multiplicando los resultados.

**Definición:** Si  $T$  es un tensor de tipo  $(r, s)$  y  $S$  es un tensor de tipo  $(u, v)$ , se llama *producto tensorial* de  $T$  y  $S$  al tensor  $T \otimes S$  de tipo  $(r + u, s + v)$  cuyo valor en  $\Omega = (\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{s+v})$  es

$$(T \otimes S)(\Omega) = T(\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) \cdot S(\tilde{\varphi}^{r+1}, \dots, \tilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_{s+1}, \dots, \vec{v}_{s+v}).$$

Ejemplo: Si  $\tilde{\varphi}$  es el tensor  $(0, 1)$  que asigna a cada vector su primera coordenada,  $\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\varphi}$  asigna a cada par de vectores el producto de sus primeras coordenadas.

Ejemplo: Sea  $T$  el tensor  $(1, 1)$  que corresponde al endomorfismo identidad en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $S$  el que corresponde a intercambiar las dos coordenadas (respecto de la base canónica). Entonces las componentes no nulas de  $T$  son  $T_1^1 = T_2^2 = 1$ , y las de  $S$ ,  $S_1^2 = S_2^1 = 1$ . Consecuentemente, las componentes no nulas de  $P = T \otimes S$  son  $P_{11}^{12} = P_{12}^{11} = P_{21}^{22} = P_{22}^{21} = 1$ .

La notación tensorial es en principio un poco aparatosa. Por ejemplo, un tensor  $(1, 3)$  muy importante es el llamado tensor de Riemann  $R : V^* \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , que introduciremos en otro capítulo. En relatividad  $\dim V = 4$  y  $R$  tiene  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$  componentes y para aplicarlo a un elemento del dual, digamos con componentes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ , y a tres vectores, cuyas coordenadas numeramos con superíndices,  $(b^1, b^2, b^3, b^4)$ ,  $(c^1, c^2, c^3, c^4)$ ,  $(d^1, d^2, d^3, d^4)$ , debemos escribir

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 R_{ijkl}^i a_i b^j c^k d^l$$

que, ciertamente, contiene muchos sumatorios. Si utilizamos la notación de subíndices y superíndices (correspondientes a vectores y contravectores) introducida aquí, se produce una simplificación sustancial usando el llamado *convenio de sumación de Einstein*<sup>3</sup> que consiste en *sobreentender un sumatorio cada vez que un subíndice aparece también como superíndice*. Por ejemplo, la expresión anterior se escribe simplemente como

$$R_{jkl}^i a_i b^j b^k b^l.$$

Las relaciones matriciales desde el punto de vista de las coordenadas, se reducen enormemente con este convenio y se vuelven más intuitivas. Así el efecto sobre las coordenadas de una aplicación lineal, digamos  $\vec{y} = A\vec{x}$ , se escribe

$$y^i = a_j^i x^j.$$

---

<sup>3</sup>Este convenio fue realmente introducido por Einstein quien bromeó al respecto diciendo: “He hecho un gran descubrimiento en Matemáticas; he suprimido el signo de sumación toda vez que la suma se haga en un índice que aparece dos veces”.

Y la igualdad matricial  $D = ABC$  componente a componente, se reduce a

$$d_j^i = a_k^i b_l^k c_j^l.$$

Nótese lo sencillo que es de recordar apelando a una “simplificación” de índices (y recuérdese lo fácil que era equivocarse al programarlo sin este truco en la asignatura correspondiente de cálculo numérico). Lo mismo se aplica para abreviar combinaciones lineales. Por ejemplo, para decir que las coordenadas de  $\vec{v}$  en la base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$  son  $a^1, a^2, \dots, a^m$

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^m a^j \vec{e}_j \quad \text{se abrevia como} \quad \vec{v} = a^j \vec{e}_j.$$

En definitiva:

Un índice duplicado arriba y abajo indica un sumatorio.

Es importante insistir en que todo funciona como si los índices repetidos se simplificasen. Por ejemplo,  $R_{jkl}^i$  es un tensor  $(1, 3)$  pero como  $R_{jil}^i$  sólo depende de dos índices,  $j$  y  $l$ , es  $(0, 2)$ . También  $a_k^i b_j^l$  representa un tensor  $(2, 2)$  y  $a_k^i b_j^k$  representa un tensor  $(1, 1)$ . Este fenómeno de igualar un índice y un subíndice y sumar en ellos, se llama *contracción*. Ahora podemos apreciar la conveniencia de pensar en las constantes como tensores de tipo  $(0, 0)$ . Un tensor de este tipo corresponde por ejemplo a la contracción del producto tensorial de un tensor  $(0, 1)$  por otro  $(1, 0)$ ; lo cual puede entenderse como  $\tilde{\varphi}(\vec{v})$  con  $\tilde{\varphi} \in V^*$ ,  $\vec{v} \in V$ , y el resultado de esta operación es constante. La contracción de un tensor está bien definida: no depende de la base en la que se lleva a cabo porque, como veremos con detalle en la tercera sección, las reglas de transformación asociadas a subíndices y superíndices (vectores y contravectores) son inversas.

Ya hemos mencionado que el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^n$  es un tensor dos veces covariante. También sabemos del curso de primero que servía para medir ya que  $d(P, Q) = (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ})^{1/2}$  y esto lo hacía tan importante que incluso recibían un nombre especial, espacios euclídeos, los espacios vectoriales que tenían algún tipo de producto escalar con tres propiedades básicas: ser bilineal, simétrico y definido positivo. Es lógico por tanto dar un nombre especial a los tensores  $(0, 2)$  que permiten medir asociados a estos objetos. Aquí surge un problema y es que los físicos prefieren<sup>4</sup> cambiar la condición de ser definido positivo por otra más débil de no degeneración, porque en relatividad

---

<sup>4</sup>Esto no es más que una licencia estilística para indicar los requerimientos de la teoría de la relatividad, quizá no sea una preferencia real de los físicos. Irónicamente el producto escalar no positivo y el concepto asociado de espacio-tiempo fueron introducidos en la relatividad por H. Minkowski, un matemático que fue profesor de Einstein. El propio Einstein criticó al principio este formalismo por considerarlo superfluo con frases como “Desde que los matemáticos han invadido la teoría de la relatividad ni yo mismo la entiendo” pero al desarrollar la relatividad general se adhirió totalmente a él.

aparece naturalmente y  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} < 0$  significa que no se puede alcanzar el punto (evento)  $Q$  partiendo de  $P$ . Nuestra aproximación a la relatividad nos lleva a unirnos a los físicos. Un matemático purista podría todavía objetar que la definición habitual se hace en una variedad diferenciable (véase más adelante) pero se puede contraatacar diciendo que  $V \times V$  lo es.

**Definición:** Se dice que  $G$  es un *tensor métrico* si es un tensor dos veces covariante y sus componentes  $g_{ij}$  conforman una matriz simétrica no singular.

**Ejemplo.** El producto escalar de toda la vida es un tensor métrico cuyas componentes con la base usual vienen dadas por la delta de Kronecker:  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  en otro caso. En  $\mathbb{R}^4$  quizá más famoso incluso que el producto escalar usual está la métrica de Minkowski cuyas únicas componentes no nulas son  $g_{11} = -1$ ,  $g_{22} = g_{33} = g_{44} = c^{-2}$  donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

## Ejercicios de la sección 1

- 1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
  - i) Si  $T = T(\vec{x}, \vec{y})$  y  $S = S(\vec{x}, \vec{y})$  son tensores, ¿lo es  $R(\vec{x}, \vec{y}) = T(\vec{x}, \vec{y}) \cdot S(\vec{x}, \vec{y})$ ?
  - ii) ¿Es  $T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$  una aplicación bilineal?
  - iii) ¿Es el producto tensorial conmutativo?
  - iv) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en  $\mathbb{R}^3$  con la base canónica le asigna la primera coordenada de su producto vectorial?
  - v) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en  $\mathbb{R}^2$  con la base canónica le asigna el área del paralelogramo que determinan?
  - vi) ¿Cuántas componentes tiene un tensor de tipo  $(r, s)$  con  $V = \mathbb{R}^m$ ?
  - vii) ¿Por qué si las componentes de dos tensores coinciden en una base deben coincidir en todas?
- 2) Demostrar que, fijada una base, todo tensor dos veces covariante es de la forma  $T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$  con  $A$  una matriz.
- 3) Hallar cuántas componentes nulas y cuántas no nulas tiene el tensor determinante. Estudiar también cuántas son positivas.
- 4) Si multiplicamos tensorialmente unos cuantos elementos de  $\mathcal{B}$  y otros de  $\mathcal{B}^*$ , hallar cuántas componentes no nulas tiene el tensor resultante. Usar este hecho para probar que todo tensor se puede escribir como combinación lineal de estos productos tensoriales.
- 5) Para  $V = \mathbb{R}^3$  consideremos un tensor de tipo  $(0, 3)$ , otro de tipo  $(1, 2)$  y otro de tipo  $(2, 1)$ , cuyas componentes, digamos  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\epsilon_{jk}^i$  y  $\epsilon_k^{ij}$ , en la base canónica son: 0 si  $i, j, k$  no es una reordenación de 1, 2, 3; 1 si  $i, j, k$  es una permutación par de 1, 2, 3 (esto es, se ordena con un número par de intercambios) y  $-1$  si  $i, j, k$  es una permutación impar de 1, 2, 3. Dados  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  y  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$ , explicar qué objetos matemáticos bien conocidos representan las cantidades  $\epsilon_k^{ij} \partial F^k / \partial x^j$ ,  $\epsilon_{jk}^i v^j w^k$  y  $\epsilon_{ijk} u^i v^j w^k$ .

6) Sea un endomorfismo  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ , con  $A = (a_j^i)$ , en  $\mathbb{R}^n$ .

a) Dar una demostración tensorial de que la traza  $a_i^i$  es invariante por cambios de base.

b) Probar que  $a_i^i a_j^j - a_j^j a_i^i$  también es invariante e identificar esta cantidad en términos de trazas de matrices.

7) Sea  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  una base de  $\mathbb{R}^m$  y sean  $g_{ij}$  las componentes del tensor métrico usual, es decir,  $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ . Demostrar que

$$|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)| = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

*Indicación:* Cambiar a una base ortonormal y escribir  $g_{ij}$  en términos de la matriz de cambio de base.

## 1.2. Repaso de Geometría III

El lector después de haber pasado por [Di] o [GoJ] debería haber sacado la conclusión de que el gran cambio del curso de Geometría III con respecto al de Geometría II, extendido en parte en el Cálculo III, es que ahora se consideran los objetos de la geometría diferencial, las variedades, sin referencia a ningún espacio exterior<sup>5</sup>. Ya no falta que exista  $\mathbb{R}^3$  para que podamos hablar de la superficie esférica.

La idea de variedad diferenciable  $n$ -dimensional es la de un objeto geométrico compuesto por parches que son similares a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Partimos de un espacio topológico  $M$  al que exigimos que tenga la propiedad de Hausdorff y una base numerable (segundo axioma de numerabilidad [Mu]). La primera propiedad es natural si queremos poder tratar separadamente los puntos, y la segunda va también en este sentido, porque permite asegurar la existencia de particiones de la unidad [Wa], que son totalmente necesarias para hacer el análisis local típico de la geometría diferencial [Ja], [Di], [Sp2].

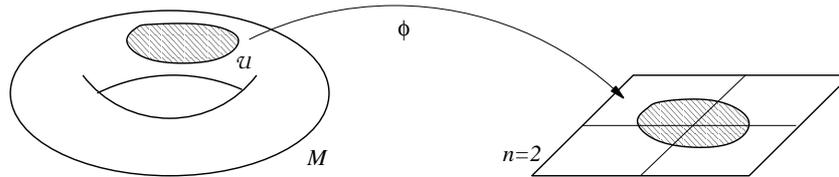
Una carta nos dice la manera de allanar un parche de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición:** Una *carta*  $n$ -dimensional de  $M$  es un par  $(\mathcal{U}, \phi)$  donde  $\mathcal{U}$  es un abierto de  $M$  y  $\phi$  es una función  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es homeomorfismo sobre su imagen.

<sup>5</sup>Quizá al lector le parezca baldío y rebuscado este empeño al saber que existe un teorema bello, simple e interesante (que en una forma más fuerte se debe a H. Whitney) que prueba que las variedades siempre se pueden meter dentro de algún  $\mathbb{R}^n$  y por tanto pueden considerarse como subvariedades y ser tratadas con los métodos de Cálculo III (véase [Sp1] Cap. 2, Th. 17). De hecho un profundo teorema debido a J. Nash (uno de los pocos matemáticos que tienen película) afirma que esta inclusión se puede hacer sin cambiar las distancias (comprender este último enunciado requiere esperar un poco hasta que definamos el tensor métrico en variedades).

Que todo esto sea posible no quiere decir que sea adecuado. Incluso desde el punto de vista intuitivo, es mucho más fácil imaginar el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (véase [Di] Ej. 2.2.11) como un círculo con los puntos antipodales de la frontera identificados que como una subvariedad de  $\mathbb{R}^4$ , que es el primer  $\mathbb{R}^n$  en el que se puede meter bien.

**Notación:** A veces, con el abuso obvio, se llama carta a la función  $\phi$ . Con frecuencia se denota con  $x^i$  la coordenada  $i$ -ésima de  $\phi$ , es decir  $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ , éstas son las llamadas *funciones coordenadas*. El uso de superíndices está relacionado con el convenio introducido en la primera sección. Para indicar que un abierto  $\mathcal{U}$ , típicamente de una carta, contiene al punto  $p$  escribiremos  $\mathcal{U}(p)$ .



Un punto puede estar tapado por varios parches, diferentes abiertos de cartas, debemos asegurarnos de que el análisis no se estropea bajando por una  $\phi$  o por otra.

**Definición:** Se dice que dos cartas  $n$ -dimensionales de  $M$ ,  $(\mathcal{U}, \phi)$  y  $(\mathcal{V}, \psi)$ , son *compatibles* si  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  es  $C^\infty$  con inversa  $C^\infty$ . Se incluye como caso especial en el que  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son disjuntos.

Para no entretenernos saltaremos al último peldaño. Por razones técnicas es conveniente pensar en todas las posibles cartas  $n$ -dimensionales compatibles entre sí y se dice que la colección correspondiente  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ,  $M = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ , es una *estructura diferenciable  $n$ -dimensional*. Con esto llegamos al objetivo: la definición de variedad<sup>6</sup>.

**Definición:** Se dice que un espacio topológico  $M$  con las propiedades anteriores, es una *variedad diferenciable  $n$ -dimensional* si está dotado de una estructura diferenciable de dimensión  $n$ .

La filosofía subyacente es que como una variedad es un espacio topológico abstracto todas las operaciones de análisis que queramos hacer se llevarán a cabo bajando a  $\mathbb{R}^n$  por una carta.

Por ejemplo, se dice que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  si para cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  la función  $f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  lo es y se define para cada  $p \in \mathcal{U}$  la *derivada parcial  $i$ -ésima* en la variedad como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = D_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))$$

<sup>6</sup>**Sólo para lectores interesados:** Una vez que uno ha puesto la definición en términos suficientemente raros hay una pregunta extraña pero natural. ¿Es posible tener en una esfera o en otro espacio topológico de toda la vida con la topología usual diferentes estructuras diferenciables? En la esfera usual  $S^2$  se sabe que sólo hay una estructura diferenciable pero J. Milnor probó que en la de 7 dimensiones,  $S^7$ , la situación es muy distinta, de hecho hay 28 posibilidades. Sólo una nos resulta familiar y por ello se dice que el resto son *esferas exóticas*.

Esto muestra que las variedades  $C^0$  (con cambios de carta continuos) son bien diferentes de las variedades  $C^\infty$  aquí definidas. Por otro lado hay un teorema que afirma que las variedades  $C^1$  son en realidad como las  $C^\infty$  eliminando “cartas malas” (véase [Hi] §2.10 para el enunciado preciso).

donde el símbolo  $D_i$  significa la derivada parcial usual con respecto a la  $i$ -ésima variable. En general, si  $M$  y  $N$  son variedades, se puede hablar de funciones  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow N$  si para cada par de cartas  $(\mathcal{U}, \phi)$ ,  $(\mathcal{V}, \psi)$ , respectivamente de  $M$  y de  $N$  se cumple que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \psi(\mathcal{V})$ . Las funciones  $C^\infty$  entre variedades que tienen inversa  $C^\infty$  se llaman *difeomorfismos*.

La propia notación usual para las funciones coordenadas, dándoles nombre de punto,  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , nos recuerda que la versión operativa de los puntos de una variedad es su reflejo en  $\mathbb{R}^n$  después de aplicar la función de una carta.

Nota: Éste es un curso de geometría diferencial, no de análisis, por ello daremos por supuesto que la regularidad no constituye ninguna obstrucción en las definiciones. A partir de ahora supondremos, sin indicarlo cada vez, que todas las funciones entre variedades que consideramos son  $C^\infty$ .

Un problema técnicamente más complejo es la definición del espacio tangente, que en el caso de subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  es muy fácil (recuérdese el curso de Cálculo III). No es una mera adaptación porque allí los vectores tangentes eran “pelos” orientados que se salían de la subvariedad, mientras que concebimos las variedades como una entidad única, sin referencia a un posible “exterior”. Hay varias maneras de superar este obstáculo (véase [Ja]). Aquí mencionaremos las definiciones matemáticas que corresponden a ver los vectores tangentes como velocidades de curvas y como derivadas direccionales. La segunda es más abstracta, introduciendo implícitamente el concepto de *derivación* [ON], pero en Geometría III se mostraba más útil en las demostraciones.

**Definición:** Se llama *espacio tangente* de  $M$  en un punto  $p$  al conjunto cociente  $T_p(M) = \mathcal{K}_p(M) / \sim$  donde  $\mathcal{K}_p(M) = \{\text{Funciones } c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ con } c(0) = p\}$  y  $\sim$  identifica las funciones (curvas) tales que  $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$  con  $(\mathcal{U}(p), \phi)$  una carta. Se llama *vector tangente* de  $M$  en  $p$  a cualquiera de sus elementos.

**Definición:** Se llama *vector tangente* de  $M$  en  $p$  a cualquier operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $v : \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$  para todo  $f, g \in \mathcal{E}_p(M)$  donde  $\mathcal{E}_p(M)$  es el anillo de funciones  $M \rightarrow \mathbb{R}$  definidas en un entorno suficientemente pequeño de  $p$ . Se llama *espacio tangente* de  $M$  en un punto  $p$  al conjunto formado por los vectores tangentes.

El nexa entre ambas definiciones es que a cada  $c \in \mathcal{K}_p(M)$  se le puede asignar el operador  $v : f \mapsto (f \circ c)'(0)$  (véase [GoJ] §3.2).

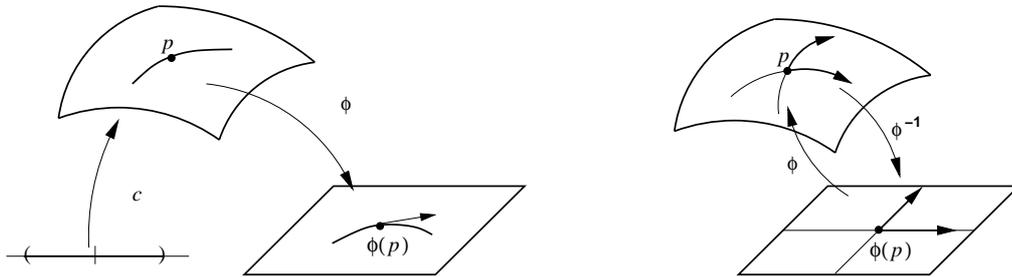
A partir de las curvas que corresponden a los ejes coordenados (una vez que bajamos a  $\mathbb{R}^n$ ) se obtienen unos vectores tangentes que denotaremos con el extraño nombre  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ . Para ser rigurosos, si  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  es la base canónica, fijada una carta  $(\mathcal{U}(p), \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , con la primera definición se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = [c_i] \quad \text{con} \quad c_i(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t\vec{e}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Denominar a estos vectores con el mismo símbolo que el de las derivadas parciales no es casual pues con la segunda definición no son más que la derivadas parcial  $i$ -ésimas en la variedad, es decir

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : f \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^k} \Big|_p.$$

Por razones obvias se suelen denotar estos vectores tangentes con la notación abreviada  $\partial_i \Big|_p$  o incluso  $\partial_i$  si no se quiere indicar la carta o el punto.



Como se vio en cursos pasados:

**Proposición 1.2.1** *El espacio tangente  $T_p(M)$  tiene una estructura natural de espacio vectorial cuya dimensión es la de la variedad diferenciable  $M$ .*

**Proposición 1.2.2** *Para cada punto  $p$  de una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $M$ , el conjunto  $\{\partial_1 \Big|_p, \partial_2 \Big|_p, \dots, \partial_n \Big|_p\}$  es una base de  $T_p(M)$ .*

Una vez que tenemos estos resultados y hemos acumulado la miseria debajo de la alfombra de la notación, nos podemos despreocupar de la dificultad y abstracción de los conceptos definidos a la hora de hacer operaciones. Podemos sumar y multiplicar por números coordenada a coordenada como nos enseñaron en primero y uno puede escribir sin remordimientos cosas como:  $(2\partial_1 \Big|_p + 3\partial_2 \Big|_p) + 4(\partial_1 \Big|_p - 2\partial_2 \Big|_p) = 6\partial_1 \Big|_p - 5\partial_2 \Big|_p$ .

Con  $f : M \longrightarrow N$  podemos pasar curvas en curvas lo cual induce una aplicación  $T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ . Aunque ésta es la idea intuitiva es más sintético proceder tomando en cuenta la segunda definición de espacio tangente.

**Definición:** Sea  $f : M \longrightarrow N$ . Se llama *aplicación tangente* de  $f$  en  $p$  y se denota con  $df \Big|_p$ , a la aplicación lineal  $T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$  que aplica un elemento de  $T_p(M)$  (considerado con la segunda definición), digamos  $v(\cdot)$  en  $v(\cdot \circ f)$ .

Ahora todo funciona como con la diferencial de toda la vida, siempre componiendo con las cartas.

**Proposición 1.2.3** Sea  $f : M \longrightarrow N$  y sean  $(\mathcal{U}(p), \phi)$  y  $(\mathcal{V}(f(p)), \psi)$  cartas de  $M$  y  $N$  respectivamente en los puntos indicados. La matriz de la aplicación tangente  $df|_p$  en las bases  $\{\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^m|_p\}$  y  $\{\partial/\partial y^1|_{f(p)}, \dots, \partial/\partial y^n|_{f(p)}\}$  correspondientes a estas cartas es la matriz jacobiana de  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  en  $\phi(p)$ .

En otras palabras, quieran lo que quieran decir los símbolos  $\partial/\partial x^i$ , ya sean derivadas de clases de curvas o derivaciones que actúan sobre funciones, el caso es que formalmente se transforman por medio de una matriz jacobiana, es decir, como en los otros cursos cuando el mismo símbolo tenía otro significado.

Dada una carta  $(\mathcal{U}(p), \phi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$  tiene sentido considerar  $dx^i|_p$ , las aplicaciones tangentes de las funciones coordenadas como funciones de  $M$  en  $\mathbb{R}$  con la estructura de variedad obvia. Usando las definiciones de vector tangente y aplicación tangente se puede probar que

$$dx^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i.$$

Dicho de otra forma,

$$\{dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p\} \quad \text{es la base dual de} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}.$$

Si a uno le gusta poner nombres, ahí van un par de ellos:

**Definición:** Dada una carta  $(\mathcal{U}(p), \phi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$ , al espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  generado por  $\{dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p\}$  se le denomina *espacio cotangente* de  $M$  en  $p$  y se denota con  $T_p^*(M)$ , por ser el dual de  $T_p(M)$ . Los elementos de  $T_p^*(M)$  se llaman *uno formas* (o *covectores*).

Como cabía esperar, en lo sucesivo descargaremos la notación para las aplicaciones tangentes y las bases introducidas de  $T_p(M)$  y  $T_p^*(M)$  omitiendo el punto cuando no sea relevante. Por ejemplo, escribiremos por ejemplo  $dx^1$  en lugar de  $dx^1|_p$ .

Una vez más insistimos en que todos los espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  son lo mismo, y una vez fijadas las bases las operaciones se realizan coordenada a coordenada como nos enseñaron en primero cuando casi todo era con vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Los elementos del dual no albergan nada nuevo y siguen funcionando como se indicó en la sección anterior (y en el curso de primero) por mucho que pongamos  $d$  y  $\partial$  por todos los lados. En un ejemplo:

$$(2dx^1 + 3dx^2) \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = 1 \quad \text{porque} \quad (2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

## Ejercicios de la sección 2

1) Comprobar que para definir la circunferencia unidad bastan dos cartas. Utilícese un argumento topológico para probar que una no es suficiente.

2) En la superficie esférica unidad en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  considérense las cartas  $(S^2 - \{N\}, \phi_N)$  y  $(S^2 - \{S\}, \phi_S)$  que dan las proyecciones estereográficas en  $z = 0$  desde los polos norte N y sur S respectivamente.

- Hallar una fórmula para  $\phi_N$  y  $\phi_S$ .
- Demostrar que son cartas compatibles.

3) Estudiar si con la estructura de variedad correspondiente a las cartas del problema anterior las funciones  $f_1, f_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f_1(x, y, z) = |z - 1|$  y  $f_2(x, y, z) = |x|$  son  $C^\infty$ .

4) Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por un giro de ángulo  $\alpha$ . Describir el efecto de la aplicación tangente sobre  $\partial_1$  en los siguientes casos:

- En ambas circunferencias se emplea la carta  $(S^1 - \{(-1, 0)\}, \phi_1)$  donde  $\phi_1$  asigna a cada punto el ángulo que determina con  $OX$ , normalizado en  $(-\pi, \pi)$ .
- En la primera se emplea  $(S^1 - \{(-1, 0)\}, \phi_1)$  y en la segunda  $(S^1 \cap \{x > 0\}, \phi_2)$  con  $\phi_2(x, y) = y$ .

5) Comprobar usando las definiciones dadas en la sección que realmente

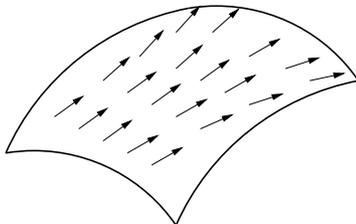
$$dx^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i.$$

¿Cómo se deduce de aquí que los  $dx^i|_p$  son linealmente independientes? ¿Y que todo elemento de  $T_p^*(M)$  es una combinación lineal de los  $dx^i|_p$ ?

## 1.3. Tensores en el espacio tangente

Nuestra intención es llenar una variedad de tensores, uno en cada plano tangente, conservando cierta suavidad entre ellos, lo que requiere cierta noción de proximidad.

La manera más sintética de concretar este punto pasa por dar una estructura de variedad al conjunto



$$TM = \bigcup_p T_p(M).$$

El objeto resultante es el llamado *fibrado tangente* (véase [Di] §4.1). Una vez que tenemos esta estructura podemos hablar de planos tangentes cercanos y de tensores cercanos. En vez de seguir este camino,

sin duda más directo e invariante y que nos introduce a la teoría de fibrados,

elegiremos una definición que involucra cartas y componentes. Para ir poco a poco, llenaremos primero de “pelos” tangentes a la variedad.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional. Un *campo de vectores*  $C^\infty$  en  $M$  es una aplicación que asigna a cada punto  $p \in M$  un vector de  $T_p(M)$ , de manera que en cada carta se escribe como  $\sum a^i(p) \partial_i|_p$  con  $a^i$  funciones  $C^\infty$ .

Se podría definir de la misma forma campos de uno formas, de tensores métricos, etc. Veamos el caso general.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional. Un *campo tensorial*  $C^\infty$  de tipo  $(r, s)$  en  $M$ , o simplemente un *tensor* de tipo  $(r, s)$  en  $M$ , es una aplicación que asigna a cada punto  $p \in M$  un tensor de tipo  $(r, s)$  con  $V = T_p(M)$ ,  $V^* = T_p^*(M)$  y que en cada carta tiene componentes  $C^\infty$ .

Hay otro caso particular de gran interés en este curso.

**Definición:** Un campo tensorial  $C^\infty$  de tensores métricos en una variedad  $M$  se dice que es una *métrica*.

Siguiendo el convenio que veníamos manejando en el caso  $r = s = 0$ , un tensor de tipo  $(0, 0)$  en  $M$  le asigna a cada punto una constante, es decir, es simplemente una función  $C^\infty$ .

Las componentes de un tensor  $T$  de tipo  $(r, s)$  en una variedad definen en cada carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  funciones  $C^\infty$  de  $\mathcal{U}$  en  $\mathbb{R}$  dadas por

$$p \in \mathcal{U} \mapsto T(p)(dx^{i_1}, dx^{i_2}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}|_p, \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}|_p).$$

Habitualmente expresaremos estas componentes en términos de las funciones coordenadas, que a su vez dependen del punto  $p$ .

Ejemplo: En  $S^1$  tenemos la carta  $(S^1 - \{(-1, 0)\}, \theta)$  donde  $\theta = \theta(x, y)$  da el argumento (ángulo) de cada punto  $(x, y) \in S^1$  en el rango  $(-\pi, \pi)$ . La fórmula

$$T = (x + y) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

define un campo de vectores  $C^\infty$  en (la subvariedad)  $S^1 - \{(-1, 0)\}$  porque  $f : S^1 - \{(-1, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x + y$  es  $C^\infty$ , ya que  $f \circ \theta^{-1}(t) = \cos t + \sin t$  es  $C^\infty$  como función de  $(-\pi, \pi)$  en  $\mathbb{R}$ . Como  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ , podemos escribir

$$T = (\cos \theta + \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

No hay un gran abuso en dar la componente en términos de la función coordenada  $\theta$  pues a fin de cuentas  $\theta = \theta(x, y)$ . Si uno se pusiera muy pesado y quisiera ver la dependencia completa en el punto  $(x, y)$  debería escribir

$$T = (\cos \theta(x, y) + \operatorname{sen} \theta(x, y)) \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(x, y)}.$$

Dadas dos cartas  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^m))$ ,  $(\mathcal{U}', \phi' = (x'^1, \dots, x'^m))$  que se solapan,  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ , la función  $\phi \circ \phi'^{-1}$  pasa de  $(x'^1, \dots, x'^m)$  a  $(x^1, \dots, x^m)$  y por razones obvias la matriz de su diferencial se suele escribir  $\partial x^i / \partial x'^j$  y su inversa  $\partial x'^i / \partial x^j$ . En cada carta se tendrán campos  $\partial / \partial x^1, \dots, \partial / \partial x^m$ ,  $dx^1, \dots, dx^m$  (usando  $\phi$ ) y  $\partial / \partial x'^1, \dots, \partial / \partial x'^m$ ,  $dx'^1, \dots, dx'^m$  (usando  $\phi'$ ) que dan las bases del espacio tangente y cotangente.

**Lema 1.3.1** *Con la notación anterior*

$$1) \frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad 2) dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j.$$

*Demostración:* Si consideramos la aplicación tangente de la función  $\operatorname{Id} : M \rightarrow M$ , 1) es consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.3. Para dar una prueba independiente, nótese que la regla de la cadena asegura que para cada función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple,  $D(f \circ \phi'^{-1}) = D(f \circ \phi^{-1}) \cdot D(\phi \circ \phi'^{-1})$  y empleando (1.1) se tiene el resultado, ya que las componentes de las matrices fila  $D(f \circ \phi'^{-1})$  y  $D(f \circ \phi^{-1})$  representan la acción de  $\partial / \partial x'^j$  y  $\partial / \partial x^i$  sobre  $f$ .

Para comprobar 2) basta ver que ambos miembros aplicados a cualquier  $\partial / \partial x'^l$  dan el mismo resultado. Para el primer miembro éste es, por definición,  $\delta_l^i$  y para el segundo

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \left( \frac{\partial}{\partial x'^l} \right) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \left( \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \delta_k^j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \delta_l^i$$

donde en el primer paso se ha usado 1) y en el último que la primera matriz es inversa de la segunda.  $\square$

Estas relaciones prueban que para cualquier tensor

$$T(dx'^{i_1}, \dots, dx'^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x'^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x'^{j_s}})$$

coincide con

$$T\left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^k} dx^k, \dots, \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^k} dx^k, \frac{\partial x^l}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial}{\partial x^l}, \dots, \frac{\partial x^l}{\partial x'^{j_s}} \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

Por tanto, cuando cambiamos de carta (o parametrización) las componentes de un tensor de tipo  $(r, s)$  en una variedad cambian por la fórmula

$$(1.2) \quad T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \left( \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \right) \cdot \left( \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}} \right) T_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$$

Esta fórmula es tan característica de los tensores que en muchos libros, sobre todo en los más orientados a la Física, se definen los tensores y campos de tensores como conjuntos de números o funciones sujetos a esta regla de transformación, que a veces se llama *tensorialidad* por antonomasia. No hay que asustarse con una expresión tan compleja. En primer lugar, es fácil de recordar notando que los índices repetidos se deben “simplificar”. Y por otra parte, no tiene un significado profundo, simplemente representa lo que ocurre cuando cambiamos de base las variables de un tensor; lo que hay de singular es que los cambios de carta corresponden a cambios de base en el espacio tangente y cotangente cuya matriz es un poco fea: la jacobiana (o su inversa). Ahora podemos apreciar por qué la contracción está bien definida, basta aplicar la regla de la cadena para darse cuenta de que la contracción de un tensor se transforma como un tensor (ejercicio).

Ejemplo: En cada punto de  $\mathbb{R}^2$  tenemos un tensor métrico en el plano tangente dado por  $dx \otimes dx + dy \otimes dy$  con las coordenadas usuales (omitimos por brevedad el punto), esto es un campo de tensores métricos (nótese que no es más que el producto escalar usual en cada punto), es decir, una métrica. Si ahora cambiamos a coordenadas polares  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  entonces podemos calcular los nuevos coeficientes del tensor métrico usando la fórmula anterior, para  $(x^1, x^2) = (x, y)$  y  $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ , o simplemente sustituir, según el lema anterior,

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

para obtener

$$\begin{aligned} &(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + \\ &(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \otimes (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta. \end{aligned}$$

En general los tensores no se comportan bien al derivarlos componente a componente porque en (1.2) aparecerían derivadas segundas que estropean la tensorialidad. Más adelante introduciremos una derivada especial que tiene carácter tensorial. Veamos un ejemplo trivial en el que sí se puede derivar y nos debería hacer dudar del nombre “vector” gradiente.

Ejemplo: Una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es por definición un tensor de tipo  $(0, 0)$ , su única componente es la propia función. Sus derivadas parciales definen un tensor porque

$$\frac{\partial f}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Comparando con (1.2) vemos que las componentes del gradiente en variedades (que obviamente generaliza al habitual) corresponden a un tensor de tipo  $(0, 1)$ , no un tensor  $(1, 0)$  que representaría un vector. Esto es natural porque  $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$  es una uno forma.

Si todavía queda algún escéptico, tómese  $f(x, y, z) = x + y + z$  definida en  $\mathbb{R}^3$  con la carta trivial. La transformación (cambio de carta)  $x' = 2x, y' = 2y, z' = 2z$  pasa el vector de  $T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^3)$  de coordenadas  $(1, 1, 1)$  al de coordenadas  $(2, 2, 2)$ . El gradiente de  $x + y + z$  es  $(1, 1, 1)$  pero el de  $x'/2 + y'/2 + z'/2 (= x + y + z$  en las nuevas coordenadas) es  $(1/2, 1/2, 1/2)$ . Por mucho que nos empeñemos el vector gradiente no es un vector<sup>7</sup> en sentido estricto.

Una vez entendido todo esto, los elementos de la relatividad especial deberían ser fáciles.

Después de los trabajos de Lorentz y Einstein, Minkowski dio un interesante giro en la manera de entender la relatividad especial introduciendo el concepto de *espacio-tiempo* que geoméricamente no es más que  $\mathbb{R}^4$  con la métrica de Minkowski mencionada en la primera sección. Para acercarnos rápidamente al significado físico, nos desprendemos de dos coordenadas y consideramos  $\mathbb{R}^2$  con una carta  $(\mathbb{R}^2, \phi = (t, x))$  y la métrica

$$G = -dt \otimes dt + c^{-2}dx \otimes dx$$

donde físicamente  $t$  indica el tiempo,  $x$  el espacio y  $c$  es una constante que representa la velocidad de la luz en el vacío (en el sistema internacional es alrededor de  $2,99 \cdot 10^8 m/s$  pero hay otras unidades, llamadas relativistas, con las que vale 1 para que la fórmula de  $G$  quede bonita). La reformulación de Minkowski de la relatividad se basa en el postulado de que  $G$  debe permanecer invariante para todos los *observadores inerciales* (intuitivamente los que no están sometidos a fuerzas). Al igual que los movimientos del plano eran las transformaciones que dejaban invariante el producto escalar usual  $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ , para la relatividad simplemente<sup>8</sup> había que pensar en un producto escalar extraño del que se deducía matemáticamente a partir de unos postulados básicos lo que Einstein había obtenido con experimentos imaginarios con varillas y espejos. Minkowski afirma orgulloso en 1907 (véase [Ei-Lo-Mi-We]) “A partir de ahora el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo, están condenados a desvanecerse en meras sombras y sólo una especie de unión de ambos conservará una realidad independiente”.

En términos geométricos, si un observador inercial utiliza para medir espacios y

---

<sup>7</sup>R. P. Feynman, premio Nobel de Física, dedica toda la sección 2-5 de su magnífico libro [Fe-Le-Sa] a demostrar al lector que el vector gradiente es un vector. ¿Dónde ha quedado el argumento de autoridad? El truco está en que Feynman sólo considera transformaciones dadas por matrices ortogonales (realmente sólo giros) y recuérdese que estas matrices cumplen  $A = (A^{-1})^t$ , por tanto intercambiar índices y numeradores por denominadores no tiene efecto sobre (1.2). Geométricamente el gradiente es un vector normal, y sigue siéndolo cuando sólo hacemos movimientos en  $\mathbb{R}^n$  pero como hemos visto, el gradiente no se comporta como un vector por cambios de carta generales.

<sup>8</sup>Como se ha indicado en una nota anterior este “simplemente” fue al principio discutido incluso por el propio Einstein, pero el desarrollo de la relatividad general mostró que el planteamiento de Minkowski no sólo era matemáticamente elegante, sino que era el camino más natural y sencillo para comprender los avances posteriores.

tiempo una carta  $(\mathbb{R}^2, \phi' = (t', x'))$  con  $t' = t'(t, x)$ ,  $x' = x'(t, x)$  se debe cumplir

$$-dt \otimes dt + c^{-2}dx \otimes dx = -dt' \otimes dt' + c^{-2}dx' \otimes dx'.$$

Efectuando el cambio de carta e igualando coeficientes,

$$-1 = -\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + c^{-2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial x} = c^{-2} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial x}, \quad c^{-2} = -\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 + c^{-2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2.$$

Cuya solución general es

$$\begin{pmatrix} \partial t'/\partial t & \partial t'/\partial x \\ \partial x'/\partial t & \partial x'/\partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + c^{-2}\lambda^2} & c^{-2}\lambda \\ \lambda & \sqrt{1 + c^{-2}\lambda^2} \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda = \lambda(t, x),$$

salvo la indeterminación en el signo de la raíz que no consideramos por corresponder a una sencilla simetría. También componiendo con una traslación podemos suponer  $\phi' \circ \phi(0, 0) = (0, 0)$ . Para seguir, pidamos un poco de ayuda a la interpretación física: los sistemas inerciales tienen velocidades relativas constantes unos con respecto de otros porque si hubiera aceleraciones estarían sometidos a fuerzas. Si  $v$  es la velocidad relativa, al segundo observador le parecerá que las partículas con  $(t, x) = (t, vt)$  están quietas. En términos matemáticos estamos pidiendo  $x'(t, vt) = 0$ , que derivando implica  $\partial x'/\partial t + v\partial x'/\partial x = 0$  y combinado con las ecuaciones anteriores permite deducir  $\lambda = -v/\sqrt{1 - c^{-2}v^2}$ . En definitiva, con las simplificaciones supuestas, los cambios de carta entre observadores inerciales son las llamadas *transformaciones de Lorentz*

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Esto es contraintuitivo porque todos diríamos que si un observador  $O'$  se mueve a velocidad  $v$  delante de  $O$ , debería cumplirse  $x' = x - vt$  y por supuesto  $t' = t$ . La relación anterior contradice estas ideas preconcebidas. También se sigue que no hay sistemas inerciales con  $v \geq c$ . En los fenómenos que podemos observar, normalmente  $v^2/c^2$  es prácticamente cero y por ello las transformaciones de Lorentz escapan al alcance inmediato de nuestros sentidos.

### Ejercicios de la sección 3

1) Considerando  $\mathbb{R}^3$  como variedad, escribir la uno forma  $x dx + y dy + z dz$  en coordenadas esféricas.

2) En un ejemplo de la sección se definió un campo de vectores sobre  $S^1 - \{(-1, 0)\}$ . Extenderlo a un campo de vectores  $C^\infty$  en  $S^1$  comprobando que lo es empleando alguna carta compatible.

**3)** Se dice que un tensor de tipo  $(0, 2)$  es *simétrico* si  $T_{ij} = T_{ji}$  donde  $T_{ij}$  son sus componentes.

a) Demostrar que este concepto de simetría está bien definido, es decir, que no depende de la carta empleada para calcular las componentes.

b) Comprobar que sin embargo no se puede extender a tensores de tipo  $(1, 1)$ , concretamente, construir un ejemplo para el que  $T_j^i = T_i^j$  se cumpla usando una carta pero no otra.

\*c) ¿Qué matrices simétricas lo siguen siendo en cualquier otra base?

**4)** Dar un ejemplo concreto en  $\mathbb{R}^2$  con la carta trivial que muestre que las derivadas parciales de las componentes de un campo de vectores no tienen carácter tensorial: no se transforman como las componentes de un tensor de tipo  $(1, 1)$ .

**5)** Según habíamos visto, el cambio a polares lleva la métrica usual de  $\mathbb{R}^2$ ,  $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ , a  $dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$ . Hallar ahora un cambio de coordenadas (de carta) en  $\mathbb{R}^2$  que pase la *métrica de Minkowski normalizada* en  $\mathbb{R}^2$ ,  $dx \otimes dx - dy \otimes dy$ , a  $dr \otimes dr - r^2 d\theta \otimes d\theta$ . *Indicación:* Los dos problemas son similares salvo el “cambio”  $y \mapsto y\sqrt{-1}$ ,  $\theta \mapsto \theta\sqrt{-1}$ .

**6)** Sea  $M$  una variedad bidimensional. Un campo de uno formas en  $M$  se expresa en cada carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, x^2))$  como  $T = T_1 dx^1 + T_2 dx^2$ . Sea  $\mathcal{D}$  el operador que asigna a  $T$  el tensor de tipo  $(0, 2)$  en  $M$  dado por

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \otimes dx^2 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right) dx^2 \otimes dx^1.$$

Demostrar que  $\mathcal{D}$  está bien definido, es decir, que no depende de la carta escogida.

## 1.4. Formas diferenciales

Los contenidos de esta sección están ligados al nombre de É. Cartan (no confundir con su hijo H. Cartan, también matemático renombrado), quien introdujo el concepto de forma diferencial tal como ahora lo conocemos y además definió una nueva operación, la derivada exterior, que resulta fundamental para escribir y describir algunos resultados de geometría diferencial, incluido el teorema de Stokes que veremos en el próximo capítulo. La estructura algebraica subyacente en la que se basó se llama álgebra exterior y fue introducida por H. Grassman con anterioridad.

Aquí no nos pararemos en las estructuras e iremos directamente a la definición.

**Definición:** Se llama *k-forma alternada* a un tensor  $k$  veces covariante,  $T$ , que es antisimétrico en cualquier par de argumentos, es decir

$$T(\dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots) = -T(\dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots).$$

El conjunto de  $k$ -formas alternadas sobre un espacio vectorial  $V$  se denota con  $\text{Alt}^k(V)$ .

Las formas diferenciales corresponden al caso en que  $V$  es el espacio tangente de una variedad.

**Definición:** Una  $k$ -forma diferencial es un campo de  $k$ -formas alternadas en una variedad. El conjunto de  $k$ -formas diferenciales sobre una variedad  $M$  se denota con  $\Omega^k(M)$ .

En analogía con lo que se hacía en la teoría general de tensores, se conviene que  $\text{Alt}^0(V)$  son las constantes, esto es,  $\mathbb{R}$  y por tanto  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ . El caso  $k = 1$  es también un poco singular porque las definiciones no ponen ninguna restricción y decir 1-forma alternada es lo mismo que decir tensor una vez covariante. Nótese que esto es coherente con nuestra denominación de “uno formas” en la sección de repaso. Habitualmente se suelen representar las formas diferenciales (y también a veces las formas alternadas) con letras griegas minúsculas, especialmente  $\omega$  y  $\eta$ . Evidentemente si  $m > \dim V$  toda  $m$ -forma alternada es nula, en particular en una variedad  $n$ -dimensional  $\Omega^m(M) = \{0\}$  para  $m > n$ .

El conjunto  $\text{Alt}^k(V)$  tiene una estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones habituales de suma y multiplicación por números reales. En el caso de  $\Omega^k(M)$  esos números reales dependerán del punto sobre el que estemos considerando el espacio tangente y por tanto son funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que, como siempre, supondremos  $C^\infty$ . La inconveniencia de que estas funciones no formen un cuerpo estropea la estructura de espacio vectorial.

Los siguientes ejemplos se podrían deducir de resultados posteriores. Ahora nos servirán para entender un poco mejor los conceptos.

Ejemplo: Hallar todos los elementos de  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ .

Si  $T \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$  y  $\vec{v}_1 = a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2$ ,  $\vec{v}_2 = a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2$ , entonces usando la linealidad y  $T(\vec{x}, \vec{x}) = 0$

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= a_1^1 a_2^1 T(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_1^1 a_2^2 T(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_1^2 a_2^1 T(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_1^2 a_2^2 T(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \\ &= (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) T(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = T(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2). \end{aligned}$$

Entonces el único tensor que hay en  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$  es el determinante salvo multiplicar por una constante,  $T(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , es decir,  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^2) = \{\lambda \det\}$ . Nótese que  $T(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  es una constante una vez fijada una base y también el determinante depende de la base elegida. Si se quiere una formulación independiente de las coordenadas de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  en una base de  $\mathbb{R}^2$ , podemos elegir una base del dual  $\{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2\}$  y decir que todo elemento de  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$  es de la forma

$$T = \lambda \tilde{\varphi}^1 \otimes \tilde{\varphi}^2 - \lambda \tilde{\varphi}^2 \otimes \tilde{\varphi}^1.$$

Esto es exactamente lo mismo que antes porque si  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  es la base cuya base dual es  $\{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2\}$ ,  $\tilde{\varphi}^i(\vec{v}_j) = a_j^i$ .

De la misma forma, si  $M$  es una variedad de dimensión 2, entonces en cada carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  los elementos de  $\Omega^2(M)$  son de la forma

$$\omega = f dx^1 \otimes dx^2 - f dx^2 \otimes dx^1$$

con  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Podemos leer el resultado del ejemplo anterior diciendo que si  $\{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2\}$  es una base de  $V^*$  y  $\dim V = 2$ , entonces  $\{\tilde{\varphi}^1 \otimes \tilde{\varphi}^2 - \tilde{\varphi}^2 \otimes \tilde{\varphi}^1\}$  es una base (con un solo elemento) de  $\text{Alt}^2(V)$ . Intentemos hacer un ejemplo en dimensión mayor.

**Ejemplo:** Hallar una base de  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ .

Escribamos como antes  $\vec{v}_j = a_j^i \vec{e}_i$ . El desarrollo de  $T(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  da lugar a nueve términos. Olvidándonos de los tres con coeficientes nulos  $T(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$  y agrupando  $T(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$  con su negativo  $T(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$ , se llega a

$$T(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix} T(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^1 \\ a_2^3 & a_2^1 \end{vmatrix} T(\vec{e}_3, \vec{e}_1) + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} T(\vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

De nuevo determinantes, que son menores de orden dos de la matriz de coordenadas de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ . Empleando la base dual  $\{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\varphi}^3\}$  tenemos que estos menores son  $M_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ,  $M_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  y  $M_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  donde

$$M_1 = \tilde{\varphi}^2 \otimes \tilde{\varphi}^3 - \tilde{\varphi}^3 \otimes \tilde{\varphi}^2, \quad M_2 = \tilde{\varphi}^3 \otimes \tilde{\varphi}^1 - \tilde{\varphi}^1 \otimes \tilde{\varphi}^3, \quad M_3 = \tilde{\varphi}^1 \otimes \tilde{\varphi}^2 - \tilde{\varphi}^2 \otimes \tilde{\varphi}^1.$$

Y podemos escribir  $T = \lambda^1 M_1 + \lambda^2 M_2 + \lambda^3 M_3$ . Por otro lado  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son formas alternadas (empléese el lema) y es fácil ver que son linealmente independientes haciéndolas actuar sobre  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . En resumen, hemos demostrado que  $\{M_1, M_2, M_3\}$  es una base de  $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ . Como curiosidad, nótese que  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  dan las coordenadas del producto vectorial.

Para desarrollos posteriores va a ser conveniente cambiar de nombre a los determinantes.

**Definición:** Dados  $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \dots, \tilde{\varphi}^k \in V^*$  su *producto exterior*,  $\tilde{\varphi}^1 \wedge \tilde{\varphi}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^k$ , se define como la forma de  $\text{Alt}^k(V)$  dada por

$$(\tilde{\varphi}^1 \wedge \tilde{\varphi}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^k)(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \det(\tilde{\varphi}^i(\vec{v}_j))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

La definición se extiende de la manera obvia a uno formas.

Con esta notación tenemos en el primero de los ejemplos  $T = \lambda \tilde{\varphi}^1 \wedge \tilde{\varphi}^2$  y  $\omega = f dx^1 \wedge dx^2$ , mientras que en el segundo  $T = \lambda^1 \tilde{\varphi}^2 \wedge \tilde{\varphi}^3 + \lambda^2 \tilde{\varphi}^3 \wedge \tilde{\varphi}^1 + \lambda^3 \tilde{\varphi}^1 \wedge \tilde{\varphi}^2$ . Todavía más, resulta que no hay en el mundo de las formas alternadas nada muy diferente de los determinantes.

**Proposición 1.4.1** Sea  $\{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \dots, \tilde{\varphi}^n\}$  una base de  $V^*$ , entonces

$$\{\tilde{\varphi}^{i_1} \wedge \tilde{\varphi}^{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

es una base de  $\text{Alt}^k(V)$ .

*Demostración:* Sea  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  es una base  $V$  cuya base dual es  $\{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \dots, \tilde{\varphi}^n\}$ . Consideremos el tensor

$$T = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \tilde{\varphi}^{i_1} \wedge \tilde{\varphi}^{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^{i_k}.$$

Si  $T$  fuera el tensor nulo para ciertos coeficientes, calculando  $T(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  se tendría  $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ , por tanto los elementos del conjunto son linealmente independientes.

Por otro lado, si  $\omega \in \text{Alt}^k(V)$  y sus componentes en la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  son  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$  entonces eligiendo  $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$  se tiene que  $T$  y  $\omega$  tienen las mismas componentes  $i_1 i_2 \dots i_k$  siempre que  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . En el resto de los casos también deben coincidir por la antisimetría de las formas alternadas al intercambiar dos argumentos.  $\square$

Evidentemente algo similar ocurre en  $\Omega^k(M)$ .

**Corolario 1.4.2** *Cualquier elemento de  $\Omega^k(M)$  se puede escribir como*

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Nota: Como explicamos en la sección anterior, las componentes  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  son en principio funciones de  $p \in M$  pero habitualmente esa dependencia se expresa a través de las funciones coordenadas y escribiremos  $f_{i_1 i_2 \dots i_k} = f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

Es natural definir

$$(\tilde{\varphi}^{i_1} \wedge \tilde{\varphi}^{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^{i_k}) \wedge (\tilde{\varphi}^{j_1} \wedge \tilde{\varphi}^{j_2} \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^{j_l}) = \tilde{\varphi}^{i_1} \wedge \tilde{\varphi}^{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^{i_k} \wedge \tilde{\varphi}^{j_1} \wedge \tilde{\varphi}^{j_2} \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}^{j_l}.$$

Con ello y la Proposición 1.4.1 o el Corolario 1.4.2 habremos extendido por la distributiva la definición del *producto exterior* a una operación

$$\wedge : \text{Alt}^k(V) \times \text{Alt}^l(V) \longrightarrow \text{Alt}^{k+l}(V) \quad \text{y} \quad \wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \longrightarrow \Omega^{k+l}(M).$$

Para respetar los convenios se debe interpretar que el producto exterior por números, que son 0-formas, es el producto usual (por ejemplo  $2 \wedge \omega = \omega \wedge 2 = 2\omega$ ).

En los textos se suele dar una definición más invariante del producto exterior que muestra su relación con el producto tensorial [Sp2]. Nuestra definición es cuestionable pero permite deducir sin dificultad dos propiedades básicas: la asociativa

$$\omega \wedge (\eta \wedge \lambda) = (\omega \wedge \eta) \wedge \lambda$$

y la anticonmutativa (o *superconmutativa*, si uno es físico)

$$(1.3) \quad \omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

donde  $\omega \in \text{Alt}^k(V)$ ,  $\eta \in \text{Alt}^l(V)$  o  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$ .

Ejemplo: Sean  $\omega = dx + y dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$  y  $\eta = z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$  definidas en la carta trivial  $(\mathbb{R}^3, \phi = (x, y, z))$ , entonces

$$\omega \wedge \eta = z dx \wedge dx \wedge dy + yz dz \wedge dx \wedge dy, \quad \eta \wedge \omega = z dx \wedge dy \wedge dx + zy dx \wedge dy \wedge dz.$$

Se cumple  $dx \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dx = 0$  porque corresponden a determinantes con dos filas iguales. De la misma forma  $dz \wedge dx \wedge dy = -dx \wedge dz \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$  porque los determinantes cambian de signo al intercambiar dos de sus filas. Con ello hemos comprobado  $\omega \wedge \eta = (-1)^{1 \cdot 2} \eta \wedge \omega$  en consonancia con (1.3).

Si las formas alternadas y las formas diferenciales no son más que combinaciones de determinantes, ¿por qué no escribimos simplemente esos determinantes y nos olvidamos de estas definiciones tan raras? La respuesta es que los determinantes aparecen en algunos teoremas, por ejemplo en el de Stokes, de una manera complicada y más vale inventar una notación para poder proceder simbólicamente. No hay nada nuevo en esta forma de actuar y los propios determinantes son un buen ejemplo: la relación  $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$  es a la vez bonita, simple y no trivial (¿alguien recuerda la prueba?) pero si no existiera una notación especial para el determinante y escribiéramos todo el desarrollo, digamos por ejemplo en el caso  $3 \times 3$ , ¿nos diría algo esa relación? ¿merecería los adjetivos anteriores?<sup>9</sup>

En la siguiente definición no usaremos a propósito el convenio de sumación para mayor claridad.

**Definición:** Dado un elemento de  $\Omega^k(M)$  que en una carta es de la forma

$$\omega = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

se llama *derivada exterior* de  $\omega$  al elemento  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$  dado por

$$d\omega = \sum_j \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial f_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(en el caso especial  $k = 0$ ,  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ ).

---

<sup>9</sup>La utilidad o conveniencia de una notación o un modo de cálculo no son en absoluto evidentes a priori ni siquiera para los expertos pues a veces dependen de desarrollos ulteriores de las Matemáticas. Por ejemplo, cuando Grassman creó el álgebra exterior que después fue retomada por Cartan para desarrollar la teoría de formas diferenciales, los matemáticos de su tiempo no le prestaron mucha atención, tanto es así que en los últimos años de su vida prácticamente dejó las Matemáticas y se dedicó a investigar en Lingüística.

En principio no está claro con esta definición que  $d$  se aplique a todo elemento de  $\Omega^k(M)$  y, todavía peor, que sea coherente con los cambios de carta. Es posible evitar este último problema comenzando la casa por el tejado con un tratamiento axiomático: se imponen las propiedades de la Proposición 1.4.3 en las que no aparecen cartas y se prueba que sólo hay un operador decente  $d$  con esas propiedades. Al calcular su expresión en coordenadas se obtiene la fórmula anterior [Bi-Go]. Daremos una breve demostración directa sin entrar mucho en detalles porque en el siguiente capítulo tendremos una visión más clara de este punto (véase una prueba más sencilla y natural en [GoG] §1.3).

Por la antisimetría podemos suponer que en la definición anterior la sumación es sobre  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . Las cantidades  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  son componentes de un tensor  $k$  veces covariante y por tanto responden a los cambios de carta por medio de la fórmula:

$$f_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_k}}{\partial x^{i_k}} f'_{j_1 j_2 \dots j_k}$$

donde hay que entender que si no se cumple  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  entonces  $f'_{j_1 j_2 \dots j_k}$  es  $\text{sgn}(\sigma) f'_{\sigma(j_1) \sigma(j_2) \dots \sigma(j_k)}$  con  $\sigma$  la permutación que ordena  $j_1, j_2, \dots, j_k$ . Al derivar con respecto de  $x^j$  no tenemos una relación similar entre las derivadas de  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  y de  $f'_{j_1 j_2 \dots j_k}$  porque aparecen derivadas parciales segundas de los cambios de carta. Sin embargo estos términos no influyen en la expresión de  $d\omega$  porque la antisimetría del producto de uno formas asegura  $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0$ .

Por último veamos dos propiedades importantes que de hecho determinan la derivada exterior. La primera muestra la relación entre los definiciones de producto exterior y derivada exterior y la segunda será crucial para definir la cohomología de de Rham.

**Proposición 1.4.3** Sean  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\eta \in \Omega^l(M)$ , entonces

$$1) \quad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \quad 2) \quad d(d\omega) = 0.$$

*Demostración:* Por el Corolario 1.4.2, empleando la linealidad de  $d$  y la distributiva, podemos limitarnos al caso  $\omega = f dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $\eta = g dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \frac{\partial(fg)}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^m} g dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + (-1)^k \frac{\partial g}{\partial x^m} f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^m \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

donde se ha usado (1.3). El primer sumando es  $d\omega \wedge \eta$  y el segundo  $(-1)^k \omega \wedge d\eta$ .

Es fácil ver que  $d(d\omega) = 0$  se cumple para  $k = 0$ :

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

porque  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$  y las derivadas parciales cruzadas coinciden. Por otro lado, de 1) se deduce con un pequeño cálculo que  $d(d(\omega \wedge \eta)) = d(d\omega) \wedge \eta - \omega \wedge d(d\eta)$ . La prueba se sigue por inducción ya que el corolario anterior permite escribir toda forma como productos exteriores de funciones y diferenciales de funciones<sup>10</sup>.  $\square$

Ejemplo: Sean  $\omega, \eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$  definidas en la carta trivial  $(\mathbb{R}^3, \phi = (x, y, z))$  por

$$\omega = x dx + yz dy + x^2 y dz, \quad \eta = xy dz.$$

Comprobar las relaciones de la proposición anterior.

Comencemos por la segunda haciendo el cálculo muy despacio y con paréntesis innecesarios:

$$\begin{aligned} d\omega &= (dx \wedge dx) + (z dy \wedge dy + y dz \wedge dy) + (2xy dx \wedge dz + x^2 dy \wedge dz) \\ &= 2xy dx \wedge dz + (x^2 - y) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

En la segunda derivada exterior ya procedemos más rápido:

$$d(d\omega) = 2x dy \wedge dx \wedge dz + 2x dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Calculemos ahora los tres términos que participan en la primera relación. La derivada del producto:

$$d(\omega \wedge \eta) = x^2 dy \wedge dx \wedge dz + y^2 z dx \wedge dy \wedge dz = (y^2 z - x^2) dx \wedge dy \wedge dz.$$

La derivada del primero por el segundo, para lo cual aprovechamos el cálculo de  $d\omega$ :

$$d\omega \wedge \eta = (2xy dx \wedge dz + (x^2 - y) dy \wedge dz) \wedge (xy dz) = 0.$$

Y el primero por la derivada del segundo:

$$\begin{aligned} \omega \wedge d\eta &= (x dx + yz dy + x^2 y dz) \wedge (y dx \wedge dz + x dy \wedge dz) \\ &= y^2 z dy \wedge dx \wedge dz + x^2 dx \wedge dy \wedge dz = (x^2 - y^2 z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Entonces se tiene  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ , como esperábamos.

<sup>10</sup>Por ejemplo, para  $k = 2$  una forma diferencial es suma de cosas del tipo  $f dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$  y si suponemos el resultado probado para  $k = 0$  y  $k = 1$ , se tiene  $d(d(f dx^{i_1} \wedge dx^{i_2})) = d(d(f dx^{i_1})) \wedge dx^{i_2} - f dx^{i_1} \wedge d(dx^{i_2}) = 0$ . Con nuestros convenios el caso especial  $k = 1$ , el primer paso de la inducción, no es conflictivo porque  $f \wedge dx^{i_1} = f dx^{i_1}$ .

## Ejercicios de la sección 4

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

- i) Si  $\omega(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2$ , ¿cuánto vale  $\omega(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ ?
- ii) Si  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional y  $\omega \in \Omega^{n-3}(M)$  y  $\eta \in \Omega^1(M)$ , ¿cuánto vale  $d\omega \wedge \eta \wedge d\eta$ ?
- iii) ¿Cuál es la dimensión de  $\text{Alt}^k(V)$ ?
- iv) Si  $\omega = \tilde{\varphi}^1 \wedge \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi}^3 \wedge \tilde{\varphi}^4$  con  $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\varphi}^3, \tilde{\varphi}^4 \in V^*$ , ¿cómo se pueden simplificar las expresiones  $\omega \wedge \omega$  y  $\omega \wedge \omega \wedge \omega$ ?

2) Para  $n > 1$  definamos en  $\mathbb{R}^n$  con la base usual el *producto vectorial generalizado* de  $n - 1$  vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$  como cero si son linealmente dependientes, y como el vector  $\vec{w}$  que cumple

$$\vec{x} \cdot \vec{w} = \det(\vec{x}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}) \quad \text{para todo } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

si son linealmente independientes. Nótese que para  $n = 3$  el producto vectorial usual tiene esta propiedad y está caracterizada por ella.

a) Demostrar que este producto vectorial está bien definido. Es decir, que no pueden existir dos  $\vec{w}$  con la propiedad anterior. Probar también que el producto vectorial generalizado es siempre ortogonal a cada uno de los vectores de partida.

b) Demostrar que la función  $M_i$  que asigna a  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1})$  la  $i$ -ésima coordenada de su producto vectorial generalizado cumple  $M_i \in \text{Alt}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ .

c) Expresar  $M_i$  en términos de productos exteriores de elementos de la base dual de la usual. *Indicación:* Tómese como  $\vec{x}$  el  $i$ -ésimo vector de la base canónica.

3) Si  $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ , es decir, si  $\omega$  es una función, entonces los coeficientes de  $d\omega$  vienen dados por el gradiente (usamos la carta trivial). Encontrar relaciones similares con el rotacional y la divergencia en  $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$  y  $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ .

4) Comprobar en  $\mathbb{R}^3$  (con la carta trivial) la relación  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$  para las formas  $\omega = x^2y^2z^2dy + x^3dz$  y  $\eta = zdy + dz$ .

5) Sea  $\omega = dx \wedge dy \in \Omega(\mathbb{R}^2)$ . Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  calcular  $\omega(df(\frac{\partial}{\partial x}), df(\frac{\partial}{\partial y}))$  donde  $df$  es la aplicación tangente.

6) Sea  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  formas alternadas. Probar que son linealmente dependientes sobre  $\mathbb{R}$  si y sólo si  $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = 0$ . *Indicación:* Si fueran independientes, serían base de un subespacio de  $V^*$  y tendrían una base (bi-)dual en  $V$ .

7) Sea  $\omega = \sum f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(M)$  donde  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . Demostrar que la componente  $j_1, j_2, \dots, j_{k+1}$ , con  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ , del tensor  $d\omega$  es

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial f_{j_1 \dots \widehat{j_s} \dots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}$$

donde el circunflejo indica que se omite ese índice.

8) Probar que un tensor  $k$  veces covariante es una  $k$ -forma alternada si y sólo si se anula siempre que se aplique a  $k$  vectores linealmente dependientes.

# Capítulo 2

## Topología diferencial

### 2.1. El teorema de Stokes

La pregunta que conduce al teorema de Stokes<sup>1</sup> desde el punto de vista matemático es muy natural: ¿cuál es el teorema fundamental del cálculo en varias variables? A este nivel, sobreentendemos “varias variables” como variedades, pero como orgullosos habitantes de  $\mathbb{R}^n$  en primera aproximación, nos sentiremos más cómodos haciendo algunas cuentas en el ámbito puramente euclídeo. El punto de partida es el teorema fundamental del cálculo en  $I = [0, 1]$

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'.$$

En  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$  uno podría aplicar este resultado dos veces para expresar  $\int_{I^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  en términos de los valores de  $f$  en los vértices de  $I^2$  y lo mismo podríamos hacer en  $I^n$  con derivadas  $n$ -ésimas. Sin embargo lo que queremos es una fórmula con derivadas primeras, como hay varias derivadas parciales tendremos que escribir una combinación de ellas, pero entonces la integral doble nos lleva en todo caso no a la función sino a una integral suya. ¿Qué tipo de generalización estamos buscando? El teorema fundamental del cálculo se puede interpretar diciendo que al integrar  $f'$  en  $I$  se obtiene (una diferencia de)  $f$  evaluada en la frontera de  $I$ , queremos algo en ese sentido interpretando que para “evaluar” en la frontera en dimensiones superiores hay que integrar porque hay infinitos puntos en ella. Por ejemplo, en  $I^2$  se cumple

$$\int_0^1 f_1(x, 0) dx + \int_0^1 f_2(1, y) dy - \int_0^1 f_1(x, 1) dx - \int_0^1 f_2(0, y) dy = \int_{I^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

---

<sup>1</sup>En realidad el teorema de Stokes no se debe a Stokes y, apurando, históricamente no es un solo resultado sino un compendio de teoremas de varios autores resumidos en una fórmula simple. El nombre proviene en parte de que un caso particular (también llamado teorema de Stokes) apareció en una competición matemática organizada por G. Stokes (ver [Sp2] VII-VIII), un físico y matemático del siglo XIX conocido sobre todo por su contribución a la mecánica de fluidos.

Llamando  $C$  a la frontera de  $I^2$  y despreocupándonos de las esquinas, tras las fórmulas de cursos pasados que recordamos en la sección anterior se puede escribir esto como:

$$\int_C \vec{F} \, dy = \int_{I^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{con} \quad \vec{F} = (f_1, f_2)$$

donde la orientación en  $C$  es la habitual, contraria al sentido horario. Nótese que podría ocurrir que  $\partial f_2/\partial x - \partial f_1/\partial y$  fuera extremadamente sencillo, por ejemplo cero, y que sin embargo no supiéramos calcular por separado las cuatro integrales en las que descompone  $\int_C \vec{F}$ .

En  $I^3$  también podemos encontrar una combinación apropiada de las derivadas parciales sobre el borde de  $I^3$ . En general el teorema de Stokes responde al esquema:

$$\int_{\text{borde}} \text{funciones} = \int_{\text{variedad}} \text{derivadas de funciones.}$$

Y esta fórmula adquirirá un aspecto muy simple con la notación de las formas diferenciales y gracias a ella su demostración es el teorema fundamental del cálculo<sup>2</sup>. Aunque sólo fuera para escribir está magnífica fórmula generalizadora, la introducción de las formas diferenciales estaría plenamente justificada.

Pero antes de nada hay unas preguntas básicas que tomar en consideración, las últimas líneas anticipan la solución a la tercera:

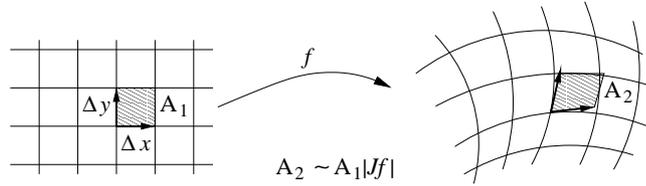
- ¿Cómo se integra en una variedad?
- ¿Cómo se define el borde una variedad?
- ¿Qué tipo de derivadas hay que considerar?

Vayamos con la primera. Ciertamente la respuesta no es inmediata porque en los cursos de análisis de primero o en segundo aparecieron integrales sobre curvas y superficies y las fórmulas que las definían no tenían aparentemente demasiado en común. Por ejemplo, ¿por qué al integrar sobre una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  había que hacer cálculos con el vector normal y sin embargo para curvas había que emplear el vector tangente? Ahora que hemos repasado los rudimentos de la geometría diferencial sabemos que hagamos lo que hagamos lo crucial es que las definiciones no dependan de las cartas empleadas. Tratando de averiguar por qué se integra como se integra, pensemos primero en las sencillas integrales en  $\mathbb{R}^n$  (no tan sencillas después del estudio exhaustivo en el curso de teoría de la medida). Si  $f$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , bajo las condiciones técnicas de rigor, por ejemplo  $g$  con soporte compacto, se tiene la fórmula de cambio de variable

$$\int g = \int g \circ f |\det(Jf)|$$

<sup>2</sup>En [Sp2] p.96 leemos: “El teorema de Stokes goza de tres importantes atributos que son propios de la mayoría de los grandes teoremas: 1) Es trivial. 2) Es trivial porque los términos que aparecen en él han sido definidos de manera adecuada. 3) Tiene consecuencias significativas”.

donde  $Jf$  es la matriz jacobiana de  $f$ . La explicación intuitiva es muy sencilla: en cuadráticos infinitesimales  $f$  se aproxima por una aplicación lineal de matriz  $Jf$  y el determinante justamente mide su variación de volumen.



Si queremos dar una definición invariante de la integral necesitamos objetos que se multipliquen por el determinante jacobiano al cambiar de coordenadas. Las formas diferenciales satisfacen este requerimiento y su razón de ser original es que constituyen los objetos matemáticos que se pueden integrar. Nótese que si

$$\omega = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega(\mathbb{R}^n) \quad \text{con } g = g(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

y hacemos el cambio  $x^j = f^j(y^1, y^2, \dots, y^n)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , entonces  $dx^j = \frac{\partial f^j}{\partial y^i} dy^i$  y sustituyendo y utilizando las propiedades de los determinantes

$$\omega = \det(Jf) g \circ f dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Entonces tiene sentido definir la integral de  $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ , digamos de soporte compacto<sup>3</sup> si queremos evitar problemas con la existencia, como

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Antes de seguir, generalicemos los cambios de variable incluso cuando  $f$  no es un difeomorfismo.

**Definición:** Sean  $M$  y  $N$  variedades y  $f : M \rightarrow N$ . Se llama *imagen recíproca* (o *pullback*) a la aplicación lineal  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  dada por

$$f^*\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \omega(df(\vec{v}_1), df(\vec{v}_2), \dots, df(\vec{v}_k)) \quad \text{para } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in T_p(M).$$

Si  $\vec{v}_j \in T_p(M)$  entonces  $df(\vec{v}_j) \in T_{f(p)}(N)$ , por tanto si  $\omega$  está soportada en un entorno de un punto,  $f^*\omega$  lo está en entornos de sus preimágenes for  $f$ . En coordenadas todo está más claro,

$$\omega = g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \Rightarrow f^*\omega = g_{i_1 i_2 \dots i_n} \circ f d(x^{i_1} \circ f) \wedge d(x^{i_2} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_n} \circ f).$$

<sup>3</sup>Cuando hablamos del soporte de  $\omega = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$  o de su no anulación en un punto nos referimos a los conceptos análogos para  $g$ . Esto es coherente porque los cambios de carta multiplican  $g$  por una función no nula.

Si  $f$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  con  $\det(Jf) > 0$ , la fórmula de cambio de variable es

$$(2.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f^* \omega.$$

**Ejemplo:** Consideremos  $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  con la carta trivial y  $N = S^1 \cap M$  con la carta  $(N, \theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo normalizado en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Si  $f : M \rightarrow N$  es la proyección radial  $f(x, y) = (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})$  y  $\omega = g(\theta) d\theta \in \Omega^1(N)$ , entonces

$$\begin{aligned} f^* \omega &= g(\theta(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})) d\theta(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= g(\arctan \frac{y}{x}) d(\arctan \frac{y}{x}) = g(\arctan \frac{y}{x}) \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Introdujimos en un ejemplo del capítulo anterior las transformaciones de Lorentz como un cambio de carta  $L : (t, x) \rightarrow (t', x')$  en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ ,  $x' = \gamma(-vt + x)$  con  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  que dejaba invariante la métrica de Minkowski. Veamos que también  $dt' \wedge dx'$  queda invariante por la imagen recíproca:

$$L^*(dt' \wedge dx') = \gamma^2(dt - vc^{-2}dx) \wedge (-v dt + dx) = \gamma^2(dt \wedge dx + v^2 c^{-2} dx \wedge dt) = dt \wedge dx.$$

En el próximo capítulo veremos que una métrica en una variedad de dimensión  $n$  lleva asociada una  $n$ -forma, lo que explica la invariancia.

La imagen recíproca es claramente  $\mathbb{R}$ -lineal, ésta y otras propiedades menos evidentes se recogen a continuación. La última de ellas podría haberse usado para probar que la definición de la derivada exterior no depende de la carta escogida, porque  $(\phi \circ \psi^{-1})^* d\omega = d((\phi \circ \psi^{-1})^* \omega)$  (véase [GoJ] y [Bu-Gi] p. 243 para otra demostración).

**Lema 2.1.1** *La imagen recíproca satisface las siguientes propiedades:*

- 1)  $f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda f^*\omega + \mu f^*\eta \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- 2)  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ ,
- 3)  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ ,
- 4)  $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ .

*Demostración:* 1) Se sigue de la definición.

2) Recordando la definición de producto exterior la propiedad se vuelve tautológica: da igual aplicar  $df$  a unos vectores y ponerlos en un determinante que ponerlos en un determinante y después aplicar  $df$  a cada uno de ellos.

3) Por la regla de la cadena  $d(g \circ f) = dg \circ df$ . Nótese que el orden es el correcto. Por ejemplo para una forma  $\omega(dg(df(\vec{v}))) = f^*(\omega(dg(\cdot)))(\vec{v}) = f^*(g^*\omega)(\vec{v})$ .

4) Si  $\omega \in \Omega^0(M)$ , es decir, si  $\omega$  es una función, es consecuencia de 3). Por el Corolario 1.4.2 cada  $k$  forma diferencial con  $k \geq 1$  se puede escribir como suma de términos del tipo  $\omega \wedge d\eta$  ( $\eta$  puede ser una función coordenada) con  $\omega \in \Omega^l(M)$  y  $\eta \in \Omega^m(M)$ ,

$l + m + 1 = k$ . Procedemos por inducción aplicada a cada uno de estos sumandos. Por la Proposición 1.4.3 y 2) se tiene

$$f^*(d(\omega \wedge d\eta)) = f^*(d\omega \wedge d\eta) = f^*d\omega \wedge f^*d\eta.$$

Por la hipótesis de inducción esto es  $d(f^*\omega) \wedge d(f^*\eta)$  que puede escribirse como

$$d(f^*\omega) \wedge d(f^*\eta) = d(f^*\omega \wedge d(f^*\eta)) = d(f^*(\omega \wedge d\eta))$$

donde se ha usado de nuevo la Proposición 1.4.3, la hipótesis de inducción y 2).  $\square$

Retomando el tema de la integración, podemos utilizar las cartas para definir la integral de una forma en un parche de una variedad. Concretamente, si  $(\mathcal{U}, \phi)$  es una carta de una variedad  $m$ -dimensional,  $M$ , y  $\omega \in \Omega^n(M)$ , digamos de soporte compacto incluido en  $\mathcal{U}$  para que no haya problemas al integrar, entonces se define

$$(2.3) \quad \int_{\mathcal{U}} \omega = \int_{\phi(\mathcal{U})} (\phi^{-1})^* \omega.$$

El segundo miembro, es una integral como la de (2.1). Por (2.2) con  $f = \phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$  y 3) del Lema 2.1.1, al cambiar la carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  por otra  $(\mathcal{V}, \tilde{\phi})$  el resultado es el mismo si  $\det(Jf) > 0$  (suponiendo que el soporte de  $\omega$  está en  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ).

Evidentemente la definición tiene sus limitaciones, pero si nos restringimos a variedades definidas por una sola carta obtenemos una versión unificada de las integrales que conocíamos hasta ahora. Sean  $C$ ,  $S$  y  $B$  una curva, una superficie y una región sólida definidas como subvariedades de  $\mathbb{R}^3$ , esto significa que la inclusión,  $i$ , en  $\mathbb{R}^3$  es una función  $C^\infty$ . En cada uno de los casos  $i^*$  pasará respectivamente 1-formas, 2-formas y 3-formas en  $\mathbb{R}^3$  a formas diferenciales que se pueden integrar en  $C$ ,  $S$  y  $B$  (cuyas dimensiones son 1, 2 y 3). Es decir, para curvas y superficies la definición natural de integral es<sup>4</sup>

$$\int_C i^*(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz), \quad \int_S i^*(F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy)$$

y para una región sólida

$$\int_B i^*(f dx \wedge dy \wedge dz).$$

---

<sup>4</sup>El uso de superíndices en los coeficientes no es muy coherente con los convenios del capítulo anterior y viene motivado por el uso que se hace en Física de estas integrales para integrar campos vectoriales. En rigor, para curvas los  $F^i$  no son componentes de un vector sino de un covector (una forma) y para superficies, son un objeto todavía más complicado. Al igual que en el caso del gradiente que comentamos en el capítulo anterior, resulta que si uno se limita a movimientos del plano estas distinciones son irrelevantes.

Esta última integral no es otra cosa que  $\int_B f$  con el significado clásico y no entraña ningún misterio. Las otras dos dan lugar a las fórmulas bien conocidas para integrar campos en curvas y superficies y las denotaremos simplemente como  $\int_C \vec{F}$  y  $\int_S \vec{F}$ . Para adaptar la primera a  $\mathbb{R}^2$  basta omitir el término con  $dz$ .

Ejemplo: Supongamos que  $C$  tiene una sola carta  $(C, \phi)$  con  $\phi^{-1}(C)$  el intervalo  $I = (a, b)$ , comprobemos que la fórmula anterior para  $\int_C$  es la de cursos pasados. Escribiremos  $\sigma = i \circ \phi^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , esto es lo que se llama una parametrización de la curva, nótese de  $\text{Im } \sigma = C$ .

Por (2.3) y el Lema 2.1.1

$$\int_C i^*(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz) = \int_I \sigma^*(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz).$$

Si  $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  y  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$  esto se puede escribir como

$$\int_I ((F^1 \circ \sigma)\sigma^{1'} + (F^2 \circ \sigma)\sigma^{2'} + (F^3 \circ \sigma)\sigma^{3'}) = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

De la misma forma si  $(S, \phi)$  es una carta global de  $S$  y  $\Phi = i \circ \phi^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización se puede probar también la fórmula clásica (ejercicio)

$$\int_S i^*(F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy) = \int_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) dudv$$

donde  $\vec{N}(u, v)$  es el vector normal  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ .

De nuestra definición se sigue que las integrales de línea y superficie no dependen de las parametrizaciones (de las cartas) escogidas una vez fijada una orientación siempre que los cambios de carta tengan jacobiano positivo. Además abre la puerta para poder considerar integrales en dimensiones superiores. ¿Cómo habría que integrar en una hipersuperficie  $H$  de  $\mathbb{R}^4$ ? Según el esquema anterior la fórmula es  $\int_H i^*(F^1 dy \wedge dz \wedge dt + F^2 dx \wedge dt \wedge dz + F^3 dt \wedge dx \wedge dy + F^4 dz \wedge dy \wedge dx)$ . Por supuesto tanto en la integración sobre superficies en  $\mathbb{R}^3$  como en ésta, la ordenación de los productos exteriores es arbitraria y modificarla equivale a cambiar de signo algunos  $F^i$ . La elegida aquí es sin embargo natural motivada por su interpretación física como flujos.

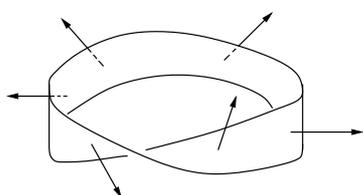
Para tener una definición completa de integral tenemos que resolver los problemas del signo del jacobiano al cambiar de carta y eliminar el extraño requerimiento que la forma diferencial viva en sólo uno de los abiertos de las cartas. Lo primero se resuelve por decreto, simplemente aceptamos la derrota y prefijamos un signo para los cambios de carta. Físicamente muchas veces ese signo expresa una dirección de lo que estamos integrando. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}$  no queremos hablar de la integral sobre  $[a, b]$  de una función sino de su integral de  $a$  a  $b$  ó de  $b$  a  $a$ . Las definiciones relevantes son:

**Definición:** Se dice que dos cartas  $(\mathcal{U}_1, \phi_1)$  y  $(\mathcal{U}_2, \phi_2)$  con  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$  tienen la misma orientación si  $\det(J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})) > 0$ . Una variedad  $M$  es orientable si existe una colección de cartas  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$  con  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = M$  tales que cada par de ellas con  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$  tienen la misma orientación. En ese caso se dice que la colección de cartas conforma un atlas orientado.

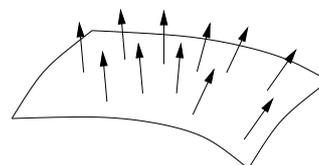
**Definición:** Una orientación de una variedad orientable  $M$  es una clase de equivalencia de la relación entre atlas orientados:  $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es atlas orientado.

Ejemplo: Las cartas  $(S^1 \cap \{y > 0\}, \phi_1)$  y  $(S^1 - \{(0, 1)\}, \phi_2)$  con  $\phi(x, y) = -x$  y  $\phi_2(x, y) = x/(1 - y)$  determinan un atlas orientado de  $S^1$  y por tanto una orientación, ya que para  $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  se cumple  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(t) = t/(\sqrt{1 - t^2} - 1)$  que tiene derivada positiva.

Existen variedades no orientables, la más famosa de las que podemos ver a simple vista es la *banda de Möbius*: una banda retorcida y pegada para formar un anillo (que suponemos sin borde para respetar la definición de variedad). Es conocido de cursos anteriores que la orientación en superficies de  $\mathbb{R}^3$  está ligada a la existencia de campos de vectores normales y visualmente está claro que no es posible determinar una orientación porque al dar toda una vuelta los vectores normales cambian de sentido (véase [Ga-Ru] p. 110 o [GoG] para una demostración rigurosa). Aquí no entraremos en estas consideraciones.



Banda de Möbius (no orientable)



Superficie orientable

Para no depender de una hipótesis tan extraña como que la forma diferencial viva en sólo uno de los abiertos de las cartas, los diferentes parches se pegan con un artificio teórico bien conocido: las *particiones de la unidad*. Recuérdese que una *partición de la unidad* subordinada a un recubrimiento abierto  $\bigcup \mathcal{U}_\beta = M$  es una colección de funciones  $\{\psi_\alpha\}$ ,  $C^\infty$  y  $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ , tales que: 1) En cada punto  $p \in M$  sólo hay un número finito de ellas con  $\psi_\alpha(p) \neq 0$  y su suma es uno. 2) Cada  $\psi_\alpha$  tiene soporte incluido en alguno de los  $\mathcal{U}_\beta$ .



Con esto ya estamos por fin preparados para tener una definición completa de integral sobre una variedad:

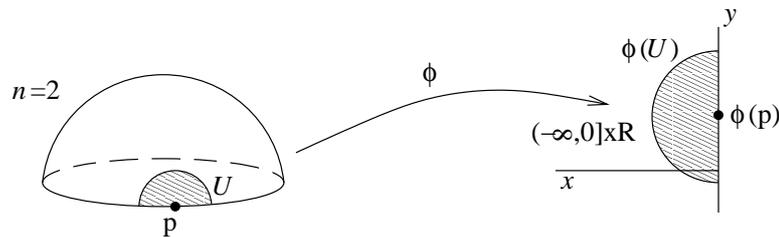
Dada una partición de la unidad  $\{\psi_\alpha\}$  subordinada al recubrimiento definido por los abiertos de todas las cartas de un atlas orientado, se define

$$(2.4) \quad \int_M \omega = \sum_\alpha \int \psi_\alpha \omega$$

donde cada  $\psi_\alpha \omega$  ya tiene el soporte compacto en el abierto de una carta y se puede por tanto integrar con (2.3). Siendo exigente, la notación  $\int_M \omega$  es un poco inadecuada porque el valor de la integral no depende sólo de  $\omega$  y  $M$  sino también de la orientación que se asigne a  $M$ ; este defecto viene heredado de la notación usual para las integrales de línea y superficie que está demasiado asentada como para cambiarla. No es difícil probar que fijada una orientación, el segundo miembro de (2.4) no depende del atlas orientado elegido ni de la partición de la unidad, es decir, que la definición es buena.

Insistimos en que las particiones de la unidad son únicamente un artificio teórico, en la práctica diaria de cursos de análisis pasados nunca se integró “de verdad” usando particiones de la unidad, simplemente se dividían las subvariedades en porciones, cada una con su carta, y si había trozos sin cubrir estaban parametrizados por conjuntos de medida cero y por tanto eran irrelevantes. No es posible copiar este método práctico en la definición teórica general porque las dificultades topológicas y de teoría de la medida serían insuperables debido a la posible estructura indómita de las fronteras de los abiertos de las cartas.

Ya sabemos integrar, con lo que hemos resuelto el primer paso para escribir el enunciado del teorema de Stokes. El segundo problema es la definición del borde de una variedad. El haber repetido tantas veces que las variedades se consideran objetos intrínsecos sin referencia a nada exterior deja poco espacio para asociar un borde a una variedad. El truco está en definir simultáneamente la variedad y su borde diciendo que esta nueva entidad conjunta está hecha con parches de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  que es como un  $\mathbb{R}^n$  con borde.



**Definición:** Una *variedad con borde* de  $n$ -dimensional es el objeto obtenido cuando en la definición de variedad en vez de considerar cartas  $(U, \phi)$  con  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se toman con  $\phi : U \rightarrow (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  y las mismas propiedades.

Los abiertos de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  con la topología relativa no son simplemente abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , por ello el concepto de variedad con borde es más general que el de variedad.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad con borde  $n$ -dimensional. Se llama *borde* de  $M$ , y se suele denotar con  $\partial M$ , al conjunto de puntos  $p \in M$  tales que existe una carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  (en el sentido anterior) con  $\phi(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

Nota: No puede ser que  $\phi(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  para cierta carta y  $\tilde{\phi}(p) \notin \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  para otra porque entonces  $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$  transformaría un entorno abierto en  $\mathbb{R}^n$  de  $\phi(p)$  en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que no es abierto, y eso está prohibido por la Topología de segundo para funciones continuas en  $\mathbb{R}^n$ . La notación  $\partial M$  que a primera vista es ya una exageración del uso de símbolos relacionados con la  $d$  de derivar, queda justificada con el enunciado del teorema de Stokes (y mucho más con el de de Rham, que no veremos este curso) porque esta  $\partial$  resulta una especie de dual de la  $d$  aplicada a formas diferenciales.

Dos propiedades que se siguen fácilmente a partir de estas definiciones son:

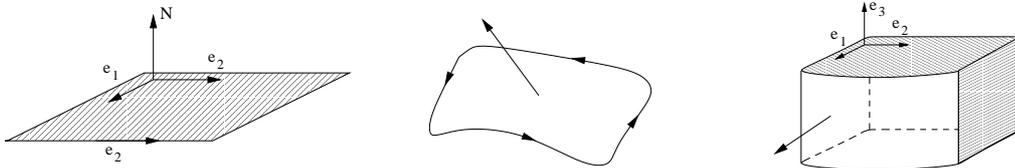
1. Una variedad es una variedad con borde tal que  $\partial M = \emptyset$ .
2. Si  $M$  es una variedad con borde, usando restricciones de las cartas,  $M - \partial M$  y  $\partial M$  tienen estructura de variedad de dimensión  $n$  y  $n - 1$ , respectivamente (porque  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  lo es a  $\mathbb{R}^{n-1}$ ).

La orientación de una variedad con borde para dimensión mayor que 1 tiene definiciones y propiedades análogas a las de una variedad usual.

Cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  con  $\mathcal{U} \cap \partial M \neq \emptyset$  de un atlas orientado  $\mathcal{A}$  de  $M$  se puede restringir para obtener una carta de  $\partial M$ . De este modo a partir de  $\mathcal{A}$  se obtiene un atlas orientado<sup>5</sup> en  $\partial M$ .

**Definición:** Sea  $M$  una variedad con borde orientada  $n$ -dimensional,  $n > 1$ . Se llama *orientación inducida* de  $\partial M$  a la que adquiere al restringir las cartas de un atlas orientado en  $M$ .

Si se considera  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$  metido en  $\mathbb{R}^3$  a altura  $z = 0$ , con la carta proyección la representación geométrica de la orientación en el interior es la normal hacia arriba y en el borde, el sentido ascendente del eje  $OY$ .



<sup>5</sup>El lector atento exigirá una justificación de este punto: Nótese que si  $(\mathcal{U}_1, \phi_1), (\mathcal{U}_2, \phi_2) \in \mathcal{A}$  con  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \partial M \neq \emptyset$  entonces el cambio de carta  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$  aplica puntos de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  en puntos de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Esto significa que en ellos  $f^1 = 0$  y  $J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = D_1 f^1 \cdot J(f^2, \dots, f^n)$ . Como  $f^1$  aplica un subconjunto de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  en  $(-\infty, 0]$ , no puede ser que  $D_1 f^1(0, y^2, \dots, y^n) < 0$  porque en este caso  $f^1(t, y^2, \dots, y^n)$  sería decreciente y cuando  $t \rightarrow 0^-$  los puntos de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  no se aplicarían en 0. En definitiva,  $J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) > 0$  implica que el jacobiano cuando las cartas se restringen al borde,  $J(f^2, \dots, f^n)$ , es también positivo.

Cada superficie en  $\mathbb{R}^3$  es localmente similar a este caso y se obtiene la bien conocida regla mnemotécnica de que la orientación inducida es aquella que al pasear por el borde con la cabeza en la dirección de la normal deja la superficie a la izquierda. Esto es una variante de la regla de la mano derecha o la *regla del sacacorchos*. En el caso de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^2$  incluido en  $\mathbb{R}^3$ , con un razonamiento similar, se tiene que si consideramos la carta trivial la orientación inducida en el borde viene dada por la normal exterior.

El caso unidimensional es especial porque en el borde aparecerían variedades cero dimensionales que corresponden a puntos, y para ellos la definición de orientación no tiene sentido.

Si  $M$  es unidimensional,  $M - \partial M$  es siempre orientable y por convenio diremos que  $p \in \partial M$  tiene orientación  $+1$  si existe una carta  $(\mathcal{U}(p), \phi)$  con la misma orientación que las del atlas orientado elegido y que tiene orientación  $-1$  en caso contrario. Geométricamente en  $\mathbb{R}^n$ ,  $M$  es una curva y una orientación indica un sentido en el que se recorre, en cada porción conexa el punto de partida tiene orientación  $-1$  y el de llegada  $+1$ .



En la demostración del teorema de Stokes no consideraremos el caso de dimensión 1 pero se puede obtener respetando el convenio de que la integral sobre un punto es el valor de la función (forma de  $\Omega^0$ ) en dicho punto multiplicado por la orientación.

Un último convenio, bastante natural, antes de dar el enunciado es que sobreentendemos que la integral sobre el conjunto vacío es nula.

**Teorema 2.1.2 (Teorema de Stokes)** *Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional orientable con borde y  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  con soporte compacto, entonces*

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega$$

donde  $i : \partial M \rightarrow M$  es la inclusión y  $\partial M$  tiene la orientación inducida por la de  $M$ .

*Demostración:* Hagamos primero unas simplificaciones técnicas. Dada una partición de la unidad  $\{\psi_\alpha\}$  subordinada a un recubrimiento de  $M$ , sea  $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$ , entonces claramente

$$\sum_\alpha \int_{\partial M} i^* \omega_\alpha = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

Por otra parte, la Proposición 1.4.3 y  $\sum_\alpha d\psi_\alpha = d1 = 0$  aseguran

$$\sum_\alpha \int_M d\omega_\alpha = \sum_\alpha \int_M d\psi_\alpha \wedge \omega + \sum_\alpha \int_M \psi_\alpha d\omega = \int_M d\omega.$$

Entonces basta hacer la demostración cuando  $\omega$  tiene su soporte dentro del abierto de una sola carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ . Además por el Corolario 1.4.2 podemos también suponer que

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n$$

donde  $\widehat{dx^j}$  significa que ese término se omite.

Por definición

$$d\omega = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

De acuerdo con (2.3) la integral  $\int_M d\omega$  es

$$\int_{\phi(\mathcal{U})} (\phi^{-1})^* d\omega = (-1)^{j-1} \int_{\phi(\mathcal{U})} D_j g$$

donde  $D_j g$  significa la  $j$ -ésima derivada parcial de la función  $g = f \circ \phi^{-1}$ . Por supuesto como el soporte de  $g$  está en  $\phi(\mathcal{U})$ , podemos extenderla sin problemas a  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  como cero. El teorema fundamental del cálculo prueba

$$\int_M d\omega = 0 \quad \text{si } j \neq 1 \quad \text{y} \quad \int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(0, t_2, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n \quad \text{si } j = 1.$$

Por otro lado

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_{\mathcal{V}} (\tilde{\phi}^{-1})^* i^* \omega$$

donde  $\mathcal{V} = \phi(\mathcal{U}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$  y  $\tilde{\phi}$  es la restricción de  $\phi$  al borde. Nótese que  $(\phi^{-1}(\mathcal{V}), \tilde{\phi})$  es una carta de  $\partial M$  con  $\phi^{-1}(\mathcal{V})$  conteniendo al soporte de  $i^* \omega$  y se puede reemplazar  $\mathcal{V}$  por  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Como  $x^i \circ \tilde{\phi}^{-1}$  es la identidad,  $x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1} = 0$  en  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  y obtenemos cero a no ser que el término con  $j = 1$  no aparezca. Por tanto

$$\int_{\partial M} i^* \omega = 0 \quad \text{si } j \neq 1 \quad \text{y} \quad \int_{\partial M} i^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(0, t_2, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n \quad \text{si } j = 1,$$

lo cual completa la prueba.  $\square$

Como primeras consecuencias veamos que los tres teoremas clásicos sobre integrales vectoriales se pueden obtener sin esfuerzo. Contraviniendo la política seguida hasta ahora, se indica la regularidad suficiente para aplicarlos. En estos teoremas cuando hablamos de una superficie con borde nos referimos a una subvariedad bidimensional de  $\mathbb{R}^3$  con borde; de la misma forma una región con borde en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  denota una subvariedad con borde de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  con dimensión máxima.

**Corolario 2.1.3** (Teorema de Green) Sea  $D$  una región acotada en  $\mathbb{R}^2$  con borde, entonces para todo campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{F} = (P, Q) \in C^1$ , se cumple

$$\int_{\partial D} \vec{F} = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

donde se considera en  $\partial D$  la orientación inducida por la de  $D$ .

*Demostración:* Tómesese  $\omega = P dx + Q dy$  en el Teorema 2.1.2.  $\square$

**Corolario 2.1.4** (Teorema de Stokes) Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con borde, entonces para todo campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F} \in C^1$  en  $S$ , se cumple

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_S \text{rot } \vec{F}$$

donde se considera en  $\partial S$  la orientación inducida por la de  $S$ .

*Demostración:* Tómesese  $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$  en el Teorema 2.1.2.  $\square$

**Corolario 2.1.5** (Teorema de la divergencia de Gauss) Sea  $V$  una región acotada en  $\mathbb{R}^3$  con borde, entonces para todo campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F} \in C^1$  en  $V$ , se cumple

$$\int_{\partial V} \vec{F} = \int_V \text{div } \vec{F}$$

donde se considera en  $\partial V$  la orientación inducida por la de  $V$ .

*Demostración:* Tómesese  $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$  en el Teorema 2.1.2.  $\square$

Una sorprendente consecuencia permite calcular el área de una región en  $\mathbb{R}^2$  conociendo su borde.

**Corolario 2.1.6** Sean  $D$  y  $\partial D$  como en el teorema de Green, entonces el área de  $D$  es

$$A(D) = \int_{\partial D} \vec{F} \quad \text{con} \quad \vec{F}(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x).$$

*Demostración:* Se sigue directamente del teorema de Green.  $\square$

Ejemplo: Comprobar que si  $r = f(\theta)$  con  $f \in C^1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , define una curva cerrada en polares ( $f(0) = f(2\pi)$ ), entonces el área de la región limitada por ella es

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

Basta usar la parametrización  $\sigma(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$ , en el Corolario 2.1.6 para obtener

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-f(\theta) \sin \theta, f(\theta) \cos \theta) \cdot (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta) d\theta,$$

y después de operar se obtiene la fórmula pedida.

**Ejemplo:** Imaginemos un pequeño cuadradito de área  $A$  paralelo a la superficie de un líquido y situado a una profundidad  $h$ . El peso del líquido encima de él será  $mg = Ah\rho g$  con  $\rho$  la densidad (masa = volumen  $\cdot$  densidad). Si pudiéramos quitar repentinamente toda esa columna de agua, por acción y reacción la que está debajo saltaría hacia arriba con una fuerza  $Ahg$ . Es decir, a profundidad  $h = -z$  hay una fuerza por unidad de superficie (una “presión vectorial”) dada por  $\vec{P} = (0, 0, \rho z g)$ . Si sumergimos totalmente un patito de goma o a Arquímedes,  $A$ , en el baño, sufrirá un empuje hacia arriba igual a la “suma” de todas estas fuerzas a lo largo de la superficie de contacto,  $S = \partial A$ . En términos matemáticos, definamos el *empuje* como  $\int_S \vec{P}$ . Por el teorema de la divergencia esto es  $\rho g \int_A 1 = \rho g \text{Vol}(A) = g \text{Masa}(A)$ . En definitiva, un cuerpo sumergido en un líquido sufre un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen del líquido que desaloja: el *Principio de Arquímedes*.

## Ejercicios de la sección 1

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

- i) Si  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ¿cuánto vale  $f^*(dx \wedge dy)$ ?
- ii) Si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow L$ , ¿cuándo tiene sentido  $g^* \circ f^*$ ?
- iii) ¿Es cierto que  $d(f^*\omega \wedge d(f^*\eta)) = d(d(f^*\omega) \wedge f^*\eta)$  para  $\omega, \eta \in \Omega^2(M)$ ?
- iv) ¿Por qué una variedad es una variedad con borde?
- v) ¿Por qué  $\partial(\partial M) = \emptyset$ ?
- vi) Si  $\partial M$  es orientable, ¿debe serlo  $M$ ?

2) Comprobar la relación  $f^*d\omega = d(f^*\omega)$  cuando  $f$  es el cambio de polares a rectangulares  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  y  $\omega = y dx + xy dy$ .

3) En  $S^1$  consideramos las cartas  $(S^1 - \{(0, 1)\}, \phi_1)$  y  $(S^1 - \{(0, -1)\}, \phi_2)$  dadas por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur, respectivamente. Probar que ambas cartas no tienen la misma orientación. Efectuar alguna modificación leve de alguna de ellas para que sí conformen un atlas orientado.

4) Sea  $C$  la curva cerrada en  $\mathbb{R}^2$  que viene parametrizada en coordenadas polares como  $r = f(\theta)$  donde  $f$  es  $2\pi$ -periódica y  $\theta \in [0, 2\pi]$  (se supone la orientación compatible con esta parametrización). Calcular  $\int_C i^*\omega$  donde  $\omega = (-y dx + x dy)/(x^2 + y^2)$ .

5) Sea  $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ . Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie e  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión, comprobar que la fórmula para  $\int_S i^*\omega$  coincide con la estudiada en cursos anteriores para integrar el campo vectorial  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$  sobre  $S$ ,  $\int_S \vec{F}$ .

6) Sea  $\mathcal{U} \subset S^2$ , donde  $S^2$  es la superficie esférica unidad en  $\mathbb{R}^3$ . Explicar por qué  $A(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} i^*\omega$  con  $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$  es una definición natural para el área de  $\mathcal{U}$ . Calcular  $A(S^2)$ . *Indicación:* Utilícese la fórmula para calcular integrales de superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

7) Comprobar el teorema de Stokes cuando  $\omega = j^*(z dx + x dy + y dz)$  y  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ , donde  $j : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión.

8) Hallar el área limitada por la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  usando el teorema de Green. Dar también un argumento geométrico sencillo para deducirla a partir del área del círculo.

9) Sea  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}/\|\vec{x}\|^3$  para  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ .

a) Calcular  $\int_{S^2} \vec{F}$  donde en  $S^2$ , la esfera unidad, se supone la orientación correspondiente a la normal exterior. ¿Por qué la integral no se anula si  $\text{div } \vec{F} = 0$ ?

b) Sea  $M = \{a \leq \|\vec{x}\| \leq b\}$ ,  $0 < a < b$ . Calcular  $\int_{\partial M} \vec{F}$ .

c) Calcular  $\int_S \vec{F}$  para cualquier superficie esférica en  $\mathbb{R}^3$  con  $\{\vec{0}\} \notin S$ .

10) Sea  $\omega = (z + 2xyze^{x^2}) dx + (ze^{x^2} + 2ye^{y^2}) dy + ye^{x^2} dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ . Calcular su integral a lo largo de la curva definida por la intersección del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y la superficie esférica unidad.

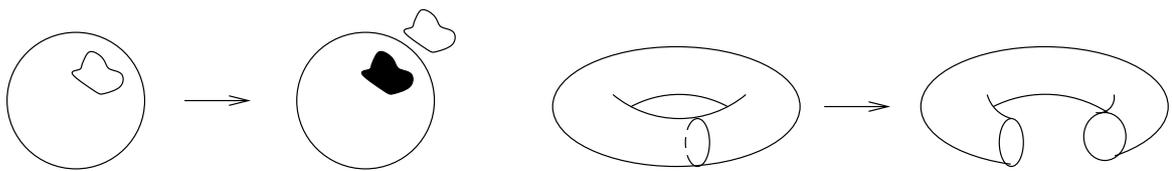
## 2.2. Cohomología de de Rham

En la Topología de segundo se estudiaban ampliamente dos propiedades que se conservaban por aplicaciones continuas: la conexión y la compacidad. Esta última propiedad, a pesar de tener una definición y un significado más complejo, en  $\mathbb{R}^n$  es equivalente a ser cerrado y acotado, gracias al teorema de Heine-Borel. La conexión intuitivamente es la propiedad de “ser de una pieza” y resultaba útil en los ejercicios de aquel curso para probar que no eran homeomorfos algunos subespacios de  $\mathbb{R}^n$  (por supuesto con la topología usual).



Por ejemplo, un aspa y el borde de un cuadrado no son homeomorfos porque si quitamos el punto central del aspa se desconecta en cuatro trozos, mientras que cualquiera que fuera la imagen de ese punto en el borde del cuadrado, al omitirla no lo desconectaría.

En cierto modo, la conexión es infalible cuando tratamos de distinguir objetos de dimensión uno pero es poco poderosa en dimensiones mayores. ¿Por qué son topológicamente diferentes la esfera  $S^2$  y el toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ ? A la luz del ejemplo anterior parece natural tratar de quitar una curva cerrada en lugar de un punto (si no nos salimos del ambiente estrictamente topológico, esto causa un sinnúmero de problemas, como la existencia de curvas de Peano) y nos percatamos de que  $S^2$  se desconecta mientras que en el toro hay curvas cerradas que no desconectan.



Éste es el *orden de conexión* introducido por E. Betti en tiempos tan lejanos como 1871. Más tarde, acabando el siglo XIX, H. Poincaré puso en rigor esta idea y por medio de estructuras combinatorias asoció grupos a las variedades, los grupos de homología, que fueron evolucionando y distanciándose de su origen combinatorio a lo largo de las primeras décadas del siglo XX. Algunos resultados, por ejemplo los de J.W. Alexander y G. de Rham, mostraron que los duales de estos grupos podrían ser más naturales y surgieron los grupos de cohomología.

En esta sección trataremos la cohomología de de Rham, la cual está asociada a formas diferenciales en variedades. Un estudio más general de las teorías homológicas y cohomológicas ha desaparecido completamente de la licenciatura desde hace años, e incluso puede que del tercer ciclo. El lector interesado puede consultar por ejemplo [Gr-Ha] quizá después de leer [Ko] a modo de introducción.

Para dar una idea del tipo de técnicas que vamos a usar, consideremos  $\eta = j^*\omega$  donde  $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la inclusión y

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Un cálculo prueba que  $\int_{S^1} \eta = 2\pi$ , con la orientación habitual, lo cual impide que exista  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $df = \eta$ , en este caso la integral sería nula por el teorema de Stokes aplicado a  $F$  ya que  $\partial S^1 = \emptyset$ . Sin embargo para cualquier forma  $g dx \in \Omega^1(\mathbb{R})$  se tiene  $g dx = d(\int_0^x g)$ . La conclusión es que  $S^1$  y  $\mathbb{R}$  no son lo mismo (no son difeomorfos). El resultado es muy barato, se podría haber deducido simplemente de la compacidad, lo notable es que hayamos podido emplear formas diferenciales y el teorema de Stokes.

Para generalizar esta idea distinguimos las formas diferenciables “integrables” de las que no lo son, notando además que la “integrabilidad” implica que la derivada exterior sea cero, por la propiedad  $d(d\omega) = 0$ .

**Definición:** Se dice que  $\omega \in \Omega^k(M)$  es una *forma diferencial cerrada* si  $d\omega = 0$  y se dice que es una *forma diferencial exacta* si existe  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ ,  $k \geq 1$ , tal que  $\omega = d\eta$ .

La diferencia entre formas cerradas y exactas es la base para definir los grupos de cohomología.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad, para cada entero no negativo  $k$  se llama  *$k$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham* al espacio vectorial cociente

$$H^k(M) = \{k\text{-formas cerradas}\} / \{k\text{-formas exactas}\}.$$

**Nota:** Equivalentemente,  $H^k(M)$  es el cociente del núcleo de  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  entre la imagen de  $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ . Sobreentendemos que  $\Omega^{-1}(M) = \{0\}$  y por

tanto para  $k = 0$  la imagen, las 0-formas exactas, son el espacio trivial  $\{0\}$ . A pesar de que  $H^k(M)$  hereda la estructura de espacio vectorial de  $\Omega^k(M)$ , se habla normalmente de “grupos de cohomología” porque en el ámbito general de la cohomología [Gr-Ha] (no tratado aquí) sólo se tiene una estructura de grupo. Cada elemento de  $H^k(M)$  es una clase de equivalencia de formas diferenciales que representaremos como  $[\omega]$  con  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Para las variedades que nos son más familiares (esferas, toros, etc.) se cumple  $\dim H^k(M) < \infty$ , en este caso se dice que  $M$  es de *tipo finito* y que  $\dim H^k(M)$  es el  $k$ -ésimo número de Betti.

Podemos reescribir el ejemplo diciendo que  $H^1(\mathbb{R})$  es el grupo trivial y  $H^1(S^1)$  no lo es. En el resto de la sección desarrollaremos un método para calcular en muchos casos los grupos de cohomología, en particular los de  $\mathbb{R}^n$  y  $S^n$ . Antes de ello nos ocuparemos de la relación con propiedades topológicas. Un primer resultado se sigue directamente a partir de la definición.

**Lema 2.2.1** *Si  $M$  es conexa  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$  y si  $M$  tiene un número finito  $K$  de componentes conexas  $M_1, M_2, \dots, M_K$ , se cumple*

$$H^k(M) \cong H^k(M_1) \oplus H^k(M_2) \oplus \dots \oplus H^k(M_K).$$

*En particular  $H^0(M) \cong \mathbb{R}^K$ .*

*Demostración:* La fórmula  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$  para  $M$  conexa se sigue de que una función con derivada cero en un abierto conexo debe ser constante.

Por otro lado cada  $\omega \in \Omega^k(M)$  se escribe de forma única como  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_K$  donde  $\omega_j$  se anula fuera de  $M_j$  (basta definir  $\omega_j = \omega$  en  $M_j$  y cero en el resto). Es fácil ver que esta descomposición da lugar al isomorfismo.  $\square$

Introduzcamos o recordemos el concepto de homotopía de aplicaciones y de variedades. Para este minicurso rápido de cohomología casi es más relevante la idea visual que los detalles, sobre todo para los que no hayan estudiado el grupo fundamental en la Topología de segundo.

**Definición:** Sean  $f, g : M \rightarrow N$ . Se dice que  $f$  y  $g$  son *homótopas* (de manera  $C^\infty$ ) si existe una función  $C^\infty$  llamada *homotopía*,  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ , tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ .

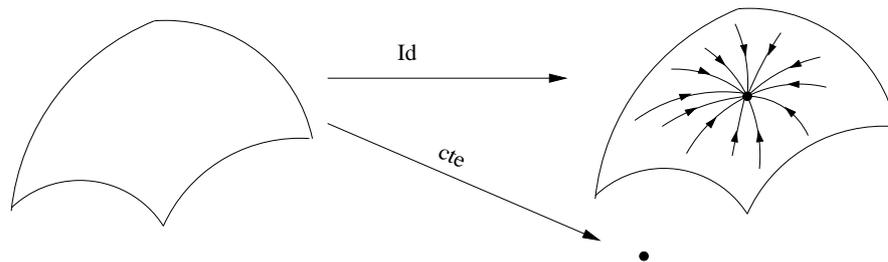
Nota: La función  $H$  se podría extender a  $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  utilizando argumentos básicos de análisis. En algunas demostraciones utilizaremos la versión extendida.

Para los que hayan estudiado el grupo fundamental en segundo, allí se consideró el caso el que  $M = S^1$ ,  $N = \mathbb{R}^2$  y la idea geométrica correspondiente es que una homotopía establece una manera de deformar un lazo (una curva cerrada parametrizada) en otro.

Para poder definir el grupo fundamental se exigía que uno de los puntos quedase fijo en toda la transformación, el llamado punto base, pero con vistas a la cohomología nada similar será necesario.

Las dos definiciones siguientes son una especie de homotopía de variedades.

**Definición:** Se dice que una variedad es *contractible* o *contractible a un punto* si la identidad en ella es homótopa a una aplicación constante.



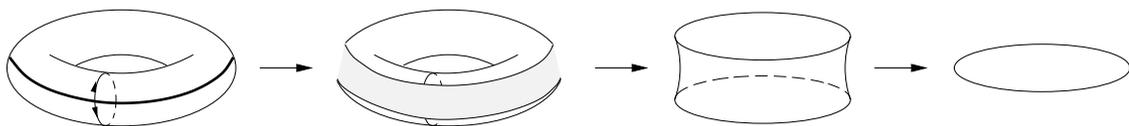
La siguiente definición generaliza a la anterior cuando un punto se cambia por una variedad.

**Definición:** Se dice que dos variedades  $M$  y  $N$  son *homótopas* o que son del mismo *tipo de homotopía*, si existen dos funciones  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow M$  tales que  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son funciones homótopas a las identidades en  $N$  y  $M$ .

Más allá de la definición, es útil saber que geoméricamente si podemos meter  $M$  dentro de  $N$  y “aplastar”  $N$  a  $M$ , tendremos que  $M$  y  $N$  serán homótopas (se dice que  $M$  es un *retracto* de  $N$ ).

Ejemplo: La variedad  $M = \mathbb{T} - C_1$  donde  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  es un toro y  $C_1$  es su ecuador (círculo máximo) es homótopa a  $S^1$ .

Identifiquemos  $S^1$  con la circunferencia interior  $C_2$  de  $M$ . Consideremos la inclusión  $f : S^1 \rightarrow M$  y la función  $g : M \rightarrow S^1$  que a cada punto de  $M$  le asigna el punto de  $C_2$  (esto es, de  $S^1$ ) en su mismo meridiano. Está claro que  $g \circ f$  es la identidad y por otra parte la identidad en  $M$  es homótopa a  $f \circ g$  porque podemos ir moviendo cada punto  $p \in M$  a lo largo de un meridiano para que se acerque a  $g(p)$ .



¿Por qué estos conceptos son relevantes? Pues gracias a algunos resultados, cuya prueba pospondremos, que ligan las homotopías con los grupos de cohomología y los *pullbacks*.

Una función  $f : M \rightarrow N$  induce  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  que es una aplicación lineal que conmuta con la derivada exterior (Lema 2.1.1), por consiguiente  $f^*$  actúa también como una aplicación lineal  $H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ . Para no sobrecargar la notación, seguiremos escribiendo  $f^*$  para indicar la acción del *pullback* sobre los grupos de cohomología.

**Proposición 2.2.2** Sean  $M$  y  $N$  variedades,

a) Si  $f, g : M \rightarrow N$  son funciones homótopas entonces  $f^*$  y  $g^*$  son idénticas actuando sobre los grupos de cohomología.

b) Si  $M$  y  $N$  son homótopas entonces sus grupos de cohomología son isomorfos.

En palabras, este resultado nos dice que la acción del *pullback* es invariante por homotopías y que  $H^k(M)$  no cambia al pasar de  $M$  a otra variedad homótopa. Esto es sorprendente teniendo en cuenta la definición de la cohomología de de Rham en términos de formas diferenciales. Podemos leer topología diferencial en unos espacios vectoriales de dimensión finita, lo que hace falta ahora es que seamos capaces de hallarlos.

Con amplitud de miras un punto puede verse como una variedad 0-dimensional. Su espacio tangente es trivial (0-dimensional) y por tanto las  $k$ -formas,  $k \geq 1$ , son todas nulas, en particular  $H^k(\{p\}) \cong \{0\}$ . Entonces el apartado b) de la proposición anterior para  $N = \{p\}$  da lugar a la siguiente consecuencia con nombre propio:

**Corolario 2.2.3 (Lema de Poincaré)** Sea  $M$  es una variedad contractible, entonces  $H^k(M) \cong \{0\}$  para  $k \geq 1$ .

Nótese que una variedad contractible en particular es conexa por arcos, por tanto  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ .

Con ello deducimos nuestros primeros grupos de cohomología.

Ejemplo: Se cumple  $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$  y  $H^k(\mathbb{R}^n) \cong \{0\}$  si  $k \geq 1$ .

Evidentemente  $H^k(M) \cong \{0\}$  si  $k$  es mayor que la dimensión de  $M$ . En variedades orientables compactas se puede ir un poco más allá de esta trivialidad y tratar el caso en que  $k$  coincide con la dimensión. La demostración dada aquí es una simplificación de la incluida en [Ga-Ru], no es de especial relevancia y puede omitirse.

**Teorema 2.2.4** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional orientable, compacta y conexa. Para  $\omega \in \Omega^n(M)$  la aplicación

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega$$

establece un isomorfismo entre  $H^n(M)$  y  $\mathbb{R}$ .

*Demostración:* Nótese en primer lugar que la aplicación está bien definida porque  $\int_M \omega = \int_M (\omega + d\eta)$  gracias al Teorema de Stokes ( $\partial M = \emptyset$ ).

Sea  $\omega_0$  una forma arbitraria que tiene soporte contenido en el abierto de una carta  $(\mathcal{U}_0, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  y cumple  $\int_M \omega_0 = 1$  (es fácil asegurar su existencia pasando el problema a  $\mathbb{R}^n$ ). Vamos a probar que para cualquier  $\eta \in \Omega^n(M)$  se cumple que  $\eta - \omega_0 \int_M \eta$  es exacta, de ello se deduce que el núcleo de la aplicación es trivial ( $\int_M \eta = 0$  implica  $[\eta] = 0$ ) y por tanto el resultado (la sobreyectividad es clara,  $[\lambda\omega_0] \mapsto \lambda$ ).

Para probar que  $\eta - \omega_0 \int_M \eta$  es exacta, empleando particiones de la unidad es suficiente considerar el caso en que  $\eta$  tiene su soporte compacto incluido en el abierto  $\mathcal{V}$  de una carta. De hecho podemos suponer que ésta es  $(\mathcal{U}_0, \phi)$  porque siempre se puede tomar una cadena finita de abiertos  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k = \mathcal{V}$  con  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1} \neq \emptyset$  (recuérdese que  $M$  es compacta y conexa) y escribir

$$\eta - \omega_0 \int_M \eta = (\eta - \omega_k \int_M \eta) + \sum_{i=1}^k (\omega_i - \omega_{i-1}) \int_M \eta$$

donde  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  son como  $\omega_0$ , con  $\int_M \omega_i = 1$ , pero con soporte en  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i-1}$ . Si sabemos probar el resultado en cada carta, cada uno de los términos entre paréntesis, que son  $\omega_i - \omega_{i-1} \int_M \omega_i$ , representa una forma exacta.

Escribiendo  $\omega = \eta - \omega_0 \int_M \eta$ , todo se reduce a demostrar que si  $\omega \in \Omega^n(M)$  tiene soporte contenido en  $\mathcal{U}_0$  y verifica  $\int_M \omega = 0$  entonces es exacta. En coordenadas  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  y lo que necesitamos es el siguiente resultado de análisis: Si  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$  entonces existen  $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que  $f = \sum_{i=1}^n \partial_i g_i$ .

Procedemos por inducción. Si  $n = 1$  basta tomar  $g_1(x^1) = \int_{-\infty}^{x^1} f(t) dt$ . Aplicando la hipótesis de inducción a  $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) - \phi(x^1, \dots, x^n) \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, x^{n+1})$  donde  $x^{n+1}$  está fijado y  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\int \phi = 1$ , se obtienen  $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  tales que  $\sum_{i=1}^n \partial_i g_i = \tilde{f}$ . Definiendo  $g_{n+1} = \phi(x^1, \dots, x^n) \int_{-\infty}^{x^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{u}, t) d\vec{u} dt$  se cumple  $\sum_{i=1}^{n+1} \partial_i g_i = f$ , además  $g_{n+1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  porque  $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f = 0$ .  $\square$

Ejemplo: Para  $S^1$  se cumple  $H^0(S^1) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$  y  $H^k(S^1) \cong \{0\}$  si  $k > 1$ . Habíamos visto que  $\int_{S^1} i^* \omega \neq 0$  con  $\omega = (-ydx + xdy)/(x^2 + y^2)$ , por tanto  $[i^* \omega]$  es un generador de  $H^1(S^1)$  según el teorema anterior. De la misma forma se cumple  $\int_{S^n} i^* \omega \neq 0$  cuando

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$$

(la integral da el “área” de  $S^n$ ) y entonces  $[i^* \omega]$  genera  $H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$ .

Ejemplo:  $H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}) \cong \mathbb{R}$ . No se puede aplicar directamente el teorema a  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  porque no es compacto pero  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  y  $S^n$  tienen el mismo tipo de homotopía

porque podemos aplastar  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  en  $S^n$  con  $f(\vec{x}) = \vec{x}/\|\vec{x}\|$  e incluir  $S^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  con  $g(\vec{x}) = \vec{x}$ , la composición  $g \circ f$  es homótopa a la identidad en  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  por medio de  $F(\vec{x}, t) = t\vec{x} + (1-t)\vec{x}/\|\vec{x}\|$ . Por la Proposición 2.2.2,  $H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$ . Recuérdese que  $H^n(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \{0\}$  entonces se deduce que  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  no son difeomorfos, un resultado que había escapado a los métodos de cursos anteriores. Todavía más, aunque no lo probaremos aquí,  $H^k(M)$  sólo depende de la topología de  $M$  y de ello se deduce que  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}$  no son homeomorfos.

Los resultados anteriores distan mucho de ser generales. Lo que nos gustaría es un método para calcular la cohomología cuando se construye una variedad pegando trozos (no disjuntos). La buena noticia es que tal método existe, incluso se puede dar un tinte combinatorio a la computación de modo que fórmulas como la archiconocida de Euler  $V + C = A + 2$  y sus generalizaciones revelen su naturaleza cohomológica [GoG]. El gran triunfo de la cohomología frente a los grupos de homotopía de orden superior<sup>6</sup> es justamente esta posibilidad de hacer cálculos. La mala noticia es que una versión completa y justificada de los cálculos cohomológicos podría ser el contenido de todo un curso y necesita unos prerrequisitos que aquí sólo podemos esbozar de forma fragmentaria. Uno de los principales elementos del lenguaje está recogido en la siguiente definición.

**Definición:** Se dice que una colección finita de grupos abelianos  $A_j$  y de homomorfismos  $f_j : A_j \longrightarrow A_{j+1}$  determinan una *sucesión exacta*, y se suele representar con

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1},$$

si  $\text{Im } f_j = \text{Ker } f_{j+1}$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

En nuestro caso los grupos que consideraremos serán de hecho espacios vectoriales pero, como ya hemos mencionado, en otras cohomologías no está garantizada esta estructura adicional. Típicamente  $A_0$  y  $A_n$  son los grupos triviales, que denotaremos simbólicamente por 0, y por tanto  $f_0$  y  $f_n$  son los homomorfismos triviales.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 0$$

se suele llamar *sucesión exacta corta*. Nótese que  $f_1$  debe ser inyectiva y  $f_2$  sobreyectiva con lo cual  $A_3 = \text{Im } f_2$  y  $A_1 \cong \text{Ker } f_2$  (porque  $\text{Im } f_1 = \text{Ker } f_2$ ). Centrándonos en el caso de espacios vectoriales las sucesiones exactas limitan las posibilidades para las dimensiones.

<sup>6</sup>En la Topología de segundo se logró un éxito parcial al distinguir algunos objetos de dimensión dos por medio del grupo fundamental formado por clases de lazos. Tal grupo se generaliza tomando "laços"  $k$  dimensionales pero los avances en este terreno han sido poco alentadores. Ni siquiera se han conseguido calcular completamente los grupos generalizados de todas las esferas  $S^n$ .



El llamado *homomorfismo de conexión*<sup>7</sup>  $\delta : H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^{k+1}(M)$  es más complicado de definir. Dada  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ , por la sucesión exacta anterior existe  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(\mathcal{U}) \oplus \Omega^k(\mathcal{V})$  tal que  $s(\omega_1, \omega_2) = \omega$ . Si hubiéramos partido de  $d\omega$  hubiéramos podido elegir  $(d\omega_1, d\omega_2)$ , entonces si  $\omega$  es cerrada,  $(d\omega_1, d\omega_2) \in \text{Ker } s$  y existe, de nuevo por la sucesión exacta,  $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$  tal que  $r(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$ . Con todo esto, se define  $\delta([\omega]) = [\eta]$ . Evidentemente no está nada claro que  $\delta$  quede bien definida. Para comprobarlo es necesario verificar que  $[\eta]$  no depende del representante de  $[\omega]$  escogido (es decir, es invariante si  $\omega \leftrightarrow \omega + d\alpha$ ) y que tampoco se ve afectado por la elección de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Ambas cosas se consiguen empleando que el *pullback* y la derivada exterior conmutan.

El punto crucial en la comprobación de que la sucesión de Mayer-Vietoris es exacta es  $\text{Im } s = \text{Ker } \delta$ .

Si  $\omega \in \text{Im } s$ , entonces  $\omega = i_4^*([\omega_2]) - i_3^*([\omega_1])$  con  $\omega_1$  y  $\omega_2$  cerradas ( $[\omega_1]$  y  $[\omega_2]$  son clases de cohomología). En la definición de  $\delta$  se tiene  $(d\omega_1, d\omega_2) = (0, 0)$  y como  $r(0) = (0, 0)$ ,  $\text{Im } s \subset \text{Ker } \delta$ .

Sea ahora  $\omega \in \text{Ker } \delta$ , entonces según la definición de  $\delta$  existe  $\eta$  exacta, digamos  $\eta = d\alpha$ , tal que  $r(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$  con  $s(\omega_1, \omega_2) = \omega$ . Cambiando  $(\omega_1, \omega_2)$  por  $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = (\omega_1, \omega_2) - r(\alpha)$  se tiene  $(d\tilde{\omega}_1, d\tilde{\omega}_2) = (0, 0)$  porque  $d(r(\alpha)) = r(d\alpha)$  y  $s(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = \omega$  porque  $\text{Ker } r = \text{Im } s$ . Así pues  $\omega \in \text{Im } s$  y se concluye  $\text{Im } s \supset \text{Ker } \delta$ .

La comprobación de la exactitud de la sucesión en otros puntos es más sencilla. Véanse los detalles en [GoG].  $\square$

Ejemplo: Vamos a calcular los grupos  $H^k(S^1)$  (que ya conocíamos) usando la sucesión de Mayer-Vietoris.

Tomemos por ejemplo  $\mathcal{U} = S^1 - \{(0, 1)\}$ ,  $\mathcal{V} = S^1 - \{(0, -1)\}$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \\ \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}) \oplus H^1(\mathcal{V}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur,  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son difeomorfos a la recta real, que es contractible, y por tanto tienen grupos de cohomología triviales para  $k \geq 1$ , en particular  $H^1(\mathcal{U}) \cong H^1(\mathcal{V}) \cong \{0\}$  y la sucesión exacta anterior se puede reducir a:

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

Contando componentes conexas,  $H^0(S^1) \cong H^0(\mathcal{U}) \cong H^0(\mathcal{V}) \cong \mathbb{R}$  y  $H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cong \mathbb{R}^2$ . El Lema 2.2.5 permite concluir<sup>8</sup> que  $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ , por supuesto  $H^k(S^1) \cong \{0\}$  para  $k \geq 2$ .

<sup>7</sup>En álgebra homológica hay un procedimiento mecánico, llamado *snake lemma*, para crear homomorfismos de conexión como éste que permiten pasar de una sucesión exacta corta a otra larga a cambio de tomar cocientes. La definición general de los grupos de homología y cohomología está basada en esta idea.

<sup>8</sup>Recuérdese una vez más que un espacio vectorial real está caracterizado por su dimensión siempre que sea finita. Es decir, el único espacio vectorial real de dimensión  $k$  es, salvo isomorfismos,  $\mathbb{R}^k$ .

Este resultado se puede generalizar inductivamente.

Ejemplo: Los grupos de cohomología de  $S^n$  son

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para probarlo, tomamos de nuevo  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  iguales a  $S^n$  menos los polos norte y sur, entonces  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  son difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , respectivamente (por las proyecciones estereográficas) y el comienzo de la sucesión de Mayer-Vietoris es:

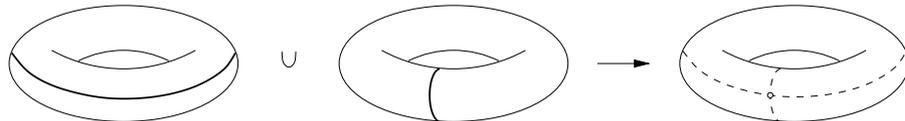
$$0 \longrightarrow H^0(S^n) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

que por el Lema 2.2.5 implica  $H^1(S^n) \cong \{0\}$ . Por otro lado, para  $k \geq 1$  en la sucesión de Mayer-Vietoris encontramos

$$0 \longrightarrow H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^{k+1}(S^n) \longrightarrow 0$$

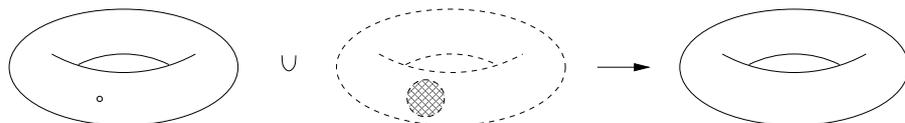
(porque  $H^k(\mathcal{U}) \cong H^k(\mathcal{V}) \cong \{0\}$ ). Además  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  y  $S^{n-1}$  son homótopos como habíamos visto, así pues  $H^{k+1}(S^n) \cong H^k(S^{n-1})$  para  $n > 1$ ,  $k \geq 1$ . Iterando esta fórmula todos los grupos de cohomología de  $S^n$  se relacionan con los de  $S^1$  y se obtiene el resultado indicado (ejercicio: escribir los detalles).

Ejemplo: Si  $M$  es el toro usual  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  menos uno de sus puntos, se tiene  $M = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  donde  $\mathcal{U}$  es  $\mathbb{T}$  menos el ecuador (el círculo máximo) y  $\mathcal{V}$  es  $\mathbb{T}$  menos un meridiano (véase también el esquema en la p.44 de [GoJ]).



Basta tener una mínima visión tridimensional para darse cuenta de que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  es difeomorfo a un rectángulo, por tanto  $H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cong \{0\}$  para  $k \geq 1$ . Por otro lado,  $\mathcal{U}$  es homótopo a  $S^1$  (se ha visto en un ejemplo anterior) y lo mismo ocurre con  $\mathcal{V}$ , por tanto  $H^k(\mathcal{U}) \cong H^k(\mathcal{V}) \cong \mathbb{R}$  para  $k = 0, 1$  y los grupos son triviales en otro caso. Entonces  $H^1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow H^2(M) \rightarrow H^2(\mathcal{U}) \oplus H^2(\mathcal{V})$  en la sucesión de Mayer-Vietoris implica  $H^2(M) \cong \{0\}$  y los Lemas 2.2.1 y 2.2.4 implican  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$  y  $H^1(M) \cong \mathbb{R}^2$ .

Ejemplo: Aunque no es el método más económico para calcular  $H^k(\mathbb{T})$  se puede emplear el ejemplo anterior y la descomposición  $\mathbb{T} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  con  $\mathcal{U} = M$  y  $\mathcal{V}$  un parche difeomorfo a un disco tapando el agujero de  $M$



Nótese que  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  son difeomorfos a  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , respectivamente. Utilizando los resultados anteriores (en particular  $H^0(\mathbb{T}) \cong H^2(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R}$ ) la sucesión de Mayer-Vietoris es, salvo isomorfismos,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

y por el Lema 2.2.5,  $H^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R}^2$ .

Vayamos ahora con algunas consecuencias topológicas de la teoría. Continuando con la política seguida hasta ahora, no se indica la regularidad. En principio deberíamos sobreenteder  $C^\infty$  sin embargo todos ellos siguen cumpliéndose para funciones continuas (esto está relacionado con que los grupos de cohomología sólo dependen de la topología de la variedad, pero no se prueba aquí).

**Proposición 2.2.7** *Sea  $B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| \leq 1\}$ . No existe  $f : B^n \longrightarrow S^{n-1}$  que deje todos los puntos de la frontera fijos.*

*Demostración:* Suponemos  $n > 1$ , para  $n = 1$  el resultado es inmediato porque  $S^0$  no es conexo. Sea  $i : S^{n-1} \longrightarrow B^n$  la inclusión. Si existiera tal  $f$ ,  $f \circ i$  sería la identidad en  $S^{n-1}$  y por tanto  $i^* \circ f^*$  lo sería en  $H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$ . Esto es imposible porque  $f^* : H^{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^{n-1}(B^n) \cong \{0\}$  ya que  $B^n$  es contractible a un punto  $\square$

**Proposición 2.2.8 (Teorema del punto fijo de Brouwer)** *Si  $g : B^n \longrightarrow B^n$ , con  $B^n$  como antes, entonces  $g$  deja algún punto fijo.*

*Demostración:* Si  $\vec{x} \neq g(\vec{x})$  para todo  $\vec{x} \in B^n$  entonces sea  $f$  la función que asigna a  $\vec{x}$  la intersección de  $S^{n-1} \subset B^n$  con la semirrecta que parte de  $g(\vec{x})$  y pasa por  $\vec{x}$ . Esta  $f$  contradice el resultado anterior porque  $f(\vec{x}) = \vec{x}$  para  $\vec{x} \in S^{n-1}$ .  $\square$

Con ayuda del teorema de Stokes el mismo resultado se puede generalizar.

**Proposición 2.2.9** *Sea  $M$  una variedad compacta orientable y con borde,  $\partial M \neq \emptyset$ . No existe  $f : M \longrightarrow \partial M$  que deje fijos todos los puntos de  $\partial M$ .*

*Demostración:* Por el Teorema 2.2.4 y el Lema 2.2.1,  $I([\omega]) = \int_{\partial M} \omega$  define un homomorfismo no trivial  $H^{n-1}(\partial M) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Por otra parte si existiera tal  $f$ ,  $f \circ i$  sería la identidad en  $\partial M$  y por el teorema de Stokes y las propiedades del *pullback*

$$I(\omega) = I(i^* f^* \omega) = \int_M d(f^* \omega) = \int_M f^*(d\omega) = 0$$

porque  $d\omega = 0$ . Esto contradice que  $I$  sea no trivial.  $\square$

**Proposición 2.2.10** Si  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  entonces  $f$  o  $-f$  dejan un punto fijo.

*Demostración:* Supongamos que para todo  $\vec{x} \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  se cumple  $\vec{x} \neq f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \neq -f(\vec{x})$ . Entonces  $\mathcal{B} = \{\vec{x}, f(\vec{x})\}$  es base de un subespacio vectorial de dimensión 2. Sea  $F(\vec{x}, t)$  el resultado de girar  $\vec{x}$  un ángulo de  $\pi t$  radianes en sentido positivo con respecto a esta base. Se tiene que  $F$  define una homotopía entre la identidad  $F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$  y la aplicación antipodal  $a(\vec{x}) = F(\vec{x}, 1) = -\vec{x}$ , por consiguiente  $a^*$  debe inducir la aplicación identidad en  $H^{2n}(S^{2n}) \cong \mathbb{R}$ . Por otro lado sabíamos que la  $n - 1$ -forma en  $S^{2n}$  dada por

$$\omega = i^* \left( \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{2n+1} \right) \in \Omega^{2n}(S^{2n})$$

es cerrada y no exacta, además  $a^*\omega = (-1)^{2n+1}\omega = -\omega$ . Esto contradice que  $a^*$  sea la identidad en  $H^{2n}(S^{2n})$ .  $\square$

**Corolario 2.2.11 (Teorema de la bola de pelo)** En  $S^{2n}$  no existe un campo de vectores no nulo en todo punto.

*Nota:* El nombre viene de que si pensamos que en  $S^2$  los vectores tangentes son pelos, no podríamos peinar una bola de pelo sin remolinos o discontinuidades.

*Demostración:* Interpretemos los vectores tangentes en sentido clásico, como flechas en  $\mathbb{R}^{2n+1} \supset S^{2n}$  que en cada punto son perpendiculares al radiovector. Si el campo fuera no nulo se podría normalizar, dando lugar a  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  con  $\vec{x} \cdot f(\vec{x}) = 0$ , en particular  $\vec{x} \neq \pm f(\vec{x})$  y el resultado se sigue de la proposición anterior.  $\square$

Terminemos demostrando la Proposición 2.2.2. Para ello emplearemos un resultado muy abstracto que conviene separar.

**Teorema 2.2.12** Sea  $M$  una variedad y sea  $i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  la inclusión  $i_t(x) = (x, t)$ . Para cada  $k \geq 0$  existe un operador lineal  $P : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  tal que  $P \circ d + d \circ P = i_1^* - i_0^*$ .

*Demostración:* Consideremos los elementos de  $\Omega^k(M \times \mathbb{R})$  que en una carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n, u))$  se escriben como

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{y} \quad \omega_2 = f du \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

Definimos

$$P\omega_1 = 0 \quad \text{y} \quad P\omega_2 = \left( \int_0^1 f(x^1, \dots, x^n, t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

El operador se extiende por linealidad a todo  $\Omega^k(M \times \mathbb{R})$  (recuérdese el Corolario 1.4.2). Basta por tanto probar el resultado para  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Un cálculo muestra

$$(i_1^* - i_0^*)(\omega_1) = (f(x, 1) - f(x, 0))dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad (i_1^* - i_0^*)(\omega_2) = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (P \circ d + d \circ P)(\omega_1) &= P(d\omega_1) = P\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= (f(x, 1) - f(x, 0))dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

donde se ha empleado el teorema fundamental del cálculo (en  $\mathbb{R}$  usamos la carta trivial). Además  $(P \circ d + d \circ P)(\omega_2)$  es igual a

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}\right) + d\left(\int_0^1 f(x, t) dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

El primer sumando es  $-\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x, t) dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$  que compensa exactamente al segundo sumando cuando se deriva bajo el signo integral. Entonces en ambos casos las acciones de  $P \circ d + d \circ P$  y de  $i_1^* - i_0^*$  coinciden.  $\square$

*Demostración de la Proposición 2.2.2:*

a) Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ ,  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ , que suponemos definida en  $M \times \mathbb{R}$ . con la notación del Teorema 2.2.12,  $f = F \circ i_0$ ,  $g = F \circ i_1$  y por el resultado allí probado, para  $\omega \in \Omega^k(M)$

$$(g^* - f^*)(\omega) = (i_1^* - i_0^*)(F^*\omega) = P(F^*d\omega) + d(P(F^*\omega)).$$

En esta última expresión, para cualquier forma cerrada el primer sumando se anula y el segundo sumando es una forma exacta, por ello  $g^* - f^*$  es la aplicación idénticamente nula cuando actúa sobre  $H^k(N)$ .

b) Por definición y por las propiedades del *pullback*, existen  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow M$  con  $f^* \circ g^*$  y  $g^* \circ f^*$  iguales a la identidad, por tanto  $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  tiene inversa, es decir, es un isomorfismo.  $\square$

Después de estos éxitos mejorando en el ámbito diferenciable lo que conseguía en la Topología de segundo cabe preguntarse acerca de la posible conexión entre ambos métodos. Un profundo resultado de W. Hurewicz relaciona los grupos de homotopía generalizados (introducidos por él mismo) con los de homología que a su vez están relacionados con los de cohomología. En particular, se puede deducir que  $H^1(M)$  no tiene más información que el grupo fundamental  $\pi_1(M, x_0)$  estudiado en segundo.

Otra pregunta natural relacionada es hasta donde llega el poder de los grupos de homología o incluso del humilde grupo fundamental. En el lado negativo, Poincaré encontró una variedad compacta no difeomorfa a la esfera  $S^3$  y que tiene los mismos grupos

de cohomología (incluso en una versión fuerte que supera a la cohomología de de Rham). Él mismo se preguntó si era posible encontrar una variedad tridimensional compacta y conexa que tuviera el mismo grupo fundamental que  $S^3$ , esto es, el trivial. Esta conjetura, llamada *Conjetura de Poincaré* ha resultado ser muy dura y sólo recientemente se ha conocido la respuesta afirmativa después del trabajo de G. Perelman y otros autores. Sorprendentemente el análogo en dimensiones superiores se resolvió antes (S. Smale y M. Freedman recibieron sendas medallas Fields por ello).

## Ejercicios de la sección 2

- 1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
  - i) Si  $M$  es variedad con borde, ¿está  $[\omega] \in H^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$  bien definido en general?
  - ii) Si  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional compacta orientable con dos componentes conexas, ¿es  $[\omega] \in H^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$  un isomorfismo?
  - iii) Si  $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta, ¿qué se puede decir de  $A$  y  $B$ ?
  - iv) ¿Es posible aplicar la sucesión de Mayer-Vietoris cuando  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  no son abiertos?
- 2) Demostrar que la aplicación  $H^k(M) \times H^l(M) \longrightarrow H^{k+l}(M)$  dada por  $([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$  está bien definida; es decir, que si  $[\omega'] = [\omega]$  y  $[\eta'] = [\eta]$  entonces  $[\omega' \wedge \eta'] = [\omega \wedge \eta]$ . Nota: Esto permite definir un anillo a partir de los grupos de cohomología.
- 3) Demostrar que  $M$  y  $M \times \mathbb{R}$  son variedades homótopas.
- 4) Sea  $M$  una subvariedad de  $N$  (es decir,  $i : M \longrightarrow N$  es una función  $C^\infty$ ). Se dice que  $M$  es un *retracto por deformación fuerte* de  $N$  si existe una homotopía  $F : N \times [0, 1] \longrightarrow N$  tal que para todo  $x \in N$  y  $a \in M$  se cumple  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) \in M$  y  $F(a, t) = a$ . Demostrar que  $M$  y  $N$  son homótopas y por tanto tienen los mismos grupos de cohomología.
- 5) Calcular los grupos de cohomología de  $\mathbb{R}^3$  menos el eje  $Z$ .
- 6) Calcular los grupos de cohomología del toro  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  expresándolo como una unión de dos cilindros curvados.
- 7) Sea  $f : \mathbb{T} \longrightarrow S^n$ . Demostrar que no existe  $g : S^n \longrightarrow \mathbb{T}$  tal que  $g \circ f$  sea la identidad. *Indicación:* Considerar la acción de  $f^*$  y  $g^*$  en  $H^1$ .
- 8) Calcular los grupos de cohomología de un toro doble, (es decir, una variedad difeomorfa a una esfera con dos asas). *Indicación:* Un toro menos un punto es difeomorfo a un toro menos un disco.
- 9) Calcular los grupos de cohomología de un toro menos dos puntos. *Indicación:* Esto es la intersección de dos toros menos un punto.
- 10) Calcular los grupos de cohomología de  $S^2$  menos dos puntos y de  $S^2$  menos tres puntos.
- 11) Comprobar que el teorema del punto fijo de Brouwer no es cierto si se reemplaza la bola cerrada por una bola abierta.



# Capítulo 3

## Geometría riemanniana

### 3.1. Métricas y geodésicas

En la geometría estudiada hasta ahora en este curso ha habido muy poco de *-metría*: nos ha preocupado sobre todo la invariancia por difeomorfismos y en este sentido hemos estado más cerca de la topología diferencial que de los problemas básicos de geometría elemental en los que se miden ángulos y longitudes o se calculan áreas y volúmenes. Al menos en subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  y con las ideas de cursos anteriores, sólo necesitamos una manera de medir ángulos y longitudes de los vectores del espacio tangente porque a distancias microscópicas de un punto no hay gran diferencia entre la subvariedad y su espacio tangente en dicho punto. En suma, lo que se necesita es un producto escalar que opere en el espacio tangente en cada punto. Un producto escalar es algo bilineal y simétrico que asigna a cada par de vectores un número real, es decir, un tensor simétrico de tipo  $(0, 2)$ . Si pedimos una condición de no degeneración, tenemos los conceptos de tensor métrico y métrica introducidos en el primer capítulo.

**Definición:** Una *variedad semiriemanniana* es una variedad dotada de una métrica.

Recuérdese que la condición de no degeneración que se pedía a una métrica  $G$  es que su matriz de componentes  $(g_{ij})$  fuera no singular. Esto no impide que ocurran cosas raras como  $G(\partial_1, \partial_1) = 0$  ó  $G(\partial_1, \partial_1) < 0$ . Tal comportamiento estrafalario (*¿*vectores con longitudes nulas o imaginarias?) es conveniente en relatividad pero extraño a nuestras ideas geométricas, por ello es natural dar una denominación específica a las variedades con *métricas definidas positivas*, es decir, con matriz  $(g_{ij})$  definida positiva en todo punto.

**Definición:** Una *variedad riemanniana* es una variedad semiriemanniana cuya métrica es definida positiva.

Una variedad semiriemanniana (o en particular riemanniana) es un par  $(M, G)$  con  $M$  una variedad y  $G$  una métrica, pero es habitual decir que  $M$  es una variedad semi-

riemanniana si la métrica se sobreentiende o no deseamos darla ninguna denominación particular.

Ejemplo: En  $\mathbb{R}^n$  con la carta trivial la métrica que corresponde al producto escalar usual es  $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$  (se ha usado el convenio de sumación) con  $g_{ij} = 1$  si  $i = j$  y 0 en otro caso. ésta es la *métrica usual* y la más empleada, pero hay una infinidad de formas de convertir  $\mathbb{R}^n$  en una variedad semiriemanniana.

La forma clásica de expresar una métrica, a veces denostada por los matemáticos, reemplaza productos tensoriales por productos habituales en un sentido formal. Así la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$  se escribiría  $dx^2 + dy^2$  y la métrica  $dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 10dy \otimes dy$  sería  $dx^2 + 2dxdy + 10dy^2$ .

**Definición:** Si  $(M, G)$  es una variedad semiriemanniana y  $f : N \rightarrow M$  es una inmersión<sup>1</sup>, se llama *métrica inducida* por  $f$  en  $N$  a  $f^*G(\vec{v}, \vec{w}) = G(df(\vec{v}), df(\vec{w}))$ . Si no se indica lo contrario, se sobreentiende que  $f$  es la inclusión.

Observación: La notación  $f^*G$  está motivada porque formalmente equivale a efectuar el *pullback* de cada uno de los “factores” que forman  $G$ . Es un ejercicio comprobar que  $f^*G$  realmente define una métrica en  $N$ .

Notación: Llamaremos también *métrica usual* a la inducida por la usual en subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ . Repasando los apuntes de Geometría II comprobamos que no es más que la generalización de la *primera forma fundamental*.

Ejemplo: Hallemos la métrica usual en el paraboloides  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ . Sin preocuparnos de en qué abierto se puede definir, lo más natural es dar la relación entre las variables a través de la carta en coordenadas polares (cilíndricas)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \\ dz = 2r dr \end{cases}$$

Por consiguiente, si  $G$  es métrica usual, la métrica inducida (en esta carta) es  $i^*G = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \otimes (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) + 4r^2 dr \otimes dr$ . Simplificando

$$i^*G = (4r^2 + 1)dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

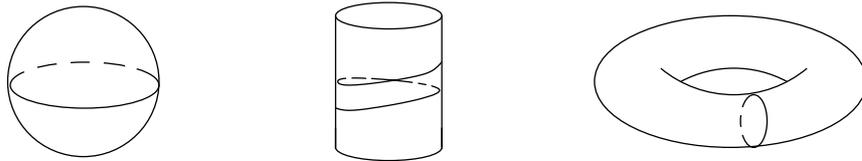
El mismo resultado se obtiene en notación clásica simplemente operando  $(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 + 4r^2 dr^2$  y se pongan como se pongan los matemáticos más puristas, esto es más sencillo.

<sup>1</sup>Recuérdese de cursos anteriores que una inmersión  $f : N \rightarrow M$  es una función tal que  $df$  es inyectiva. La inclusión es un caso especial de inmersión.

Una métrica sirve para hallar longitudes de vectores del espacio tangente, pero ¿cómo mediríamos la distancia entre puntos de una variedad riemanniana? Esta pregunta lleva al concepto de geodésica que nosotros introduciremos aquí con una orientación mecánica.

Supongamos que para calcular la distancia de  $p$  a  $q$  lanzamos desde  $p$  con velocidad 1 una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza y medimos el tiempo que tarda en llegar a  $q$ . Desde el principio atisbamos problemas topológicos, por ejemplo, si  $p$  y  $q$  no están en la misma componente conexa, la partícula nunca llega. Todavía peor, en  $\mathbb{R}^2 - \{(1, 1)\}$  si desde  $p = (0, 0)$  apuntamos a  $q = (2, 2)$  la trayectoria recta que seguiría la partícula tropieza con un agujero. Un boquete de grandes dimensiones proyectaría todavía una sombra mayor de puntos inalcanzables.

Olvidemos por ahora estas dificultades y supongamos que operamos localmente, en entornos pequeños, donde estos problemas de ocultamiento no aparecen. Nuestro interés pasa a ser entonces cómo se mueve una partícula ligada a una variedad sobre la que no actúan fuerzas externas. Con poco que recordemos el curso de Física, sabremos que  $\vec{F} = m\vec{a}$ . En ausencia de fuerzas,  $\vec{F} = \vec{0}$ , la aceleración  $\vec{a}$  que es la derivada segunda de la ecuación de movimiento es nula y la trayectoria<sup>2</sup> es una recta parametrizada linealmente por el tiempo. Pero esto sólo funciona en  $\mathbb{R}^3$ , si tuviéramos una partícula ligada a una esfera, digamos una canica atrapada entre dos peceras, nuestra intuición nos dice que (descartando la gravedad) al darle un impulso desde un punto inicial debe seguir círculos máximos con velocidad angular constante, y es fácil dar una explicación en términos de fuerzas centrífugas (véase §2.2 en [Ch]). En un cilindro la trayectoria sería en general una hélice (ésta pasa a ser una recta cuando lo desenrollamos sobre el plano) y en otras superficies, como el toro, tenemos cierta intuición acerca de algunas de las trayectorias aunque no sabemos cómo describirlas todas.



¿Cómo hallamos estas ecuaciones de movimiento? ¿Es posible hacerlo de manera invariante sin estar obligados a usar un sistema especial de coordenadas? Con relación a esta última pregunta, nótese que la ecuación  $\vec{F} = \vec{0}$  deja de tener validez en coordenadas polares, las rectas cartesianas en general no corresponden a funciones lineales de radios y ángulos; por ejemplo, la recta horizontal  $y = 1$  es  $r = 1/\sin \theta$  cuando usamos polares. Si nos obligamos a usar coordenadas cartesianas en este caso, ¿qué sistema de coordenadas

<sup>2</sup>La ecuación de movimiento es la fórmula para el espacio en función del tiempo y la trayectoria es el dibujo de la curva que sale al sustituir los valores de  $t$ . Así,  $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$  y  $c_2(t) = (\sin t^2, \cos t^2)$  serían dos ecuaciones de movimiento distintas con la misma trayectoria porque la misma circunferencia se recorre con velocidades bien distintas.

emplearíamos en el toro o la esfera? No hay ninguno con todos los privilegios. Debemos formular la mecánica de manera invariante, y eso empieza a oler a tensor.

Una partícula en  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  ó  $3$ ) sobre la que no actúan fuerzas tiene una energía cinética

$$E = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2.$$

Tomemos prestada la notación de los físicos heredada de Newton consistente en señalar una derivada con un punto sobre la función (y dos derivadas con dos puntos). Si para simplificar suponemos que la masa es  $m = 2$  (siempre se puede hacer cambiando de unidades), se tiene

$$E = G(\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$$

con  $G$  la métrica usual. Si ahora empleásemos una carta arbitraria  $(\mathcal{U}, \phi = (q^1, \dots, q^n))$  y describimos la trayectoria de la partícula con  $\vec{q} = \vec{q}(t)$ , la fórmula es todavía válida pero las componentes de la métrica  $G$  cambian de carta

$$E = G(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}) = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

La notación  $q^j$  también está tomada de la Física donde se dice que éstas son las *coordenadas generalizadas* de la partícula. Por ejemplo, como la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ ,  $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ , se escribe en polares como  $dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$ , entonces la energía en polares es  $E = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ . Quizá el lector reconozca esta fórmula de la dinámica de rotación.

Resulta que la Naturaleza es muy ahorrativa<sup>3</sup> y, al menos localmente, trata de economizar la energía y las partículas aquí consideradas se mueven entre puntos cercanos de forma que la suma (integral) de todas las energías en su trayectoria sea mínima. Esto conduce a un problema matemático muy importante y posiblemente nuevo para el lector: en lugar de buscar un valor de la variable que haga mínima una función, se busca una función que haga mínima una integral, esto es lo que se llama un problema de *cálculo de variaciones*<sup>4</sup>. Hallaremos la trayectoria de nuestras partículas resolviendo este problema con las coordenadas que nos apetezcan, o mejor, con las que más convenientes sean. Nótese que la minimización es intrínsecamente independiente de las coordenadas (por ejemplo, los valores máximos y mínimos que alcanza  $f(x)$  son los mismos que los que alcanzan  $f(x^3)$  o  $f(3x - \sin x)$ ).

---

<sup>3</sup>Se atribuye a Euler la frase: “Dado que el tejido del Universo es de la mayor perfección y la obra del más sabio Creador, nada en absoluto tiene lugar en el Universo sin que una regla de máximo o mínimo aparezca”.

<sup>4</sup>El origen de esta área se remonta al siglo XVII con el problema de la *braquistocrona* que consiste en el diseño de la forma del tobogán que une dos puntos por el que se puede bajar más rápido (véase el problema 23 en [Ch] §2.2).

**Proposición 3.1.1** *Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$  sea  $\mathcal{C} = \{F = (q^1, \dots, q^n) : q^j \in C^2([a, b]), F(a) = \vec{c}, F(b) = \vec{d}\}$ . Supongamos que  $\int_a^b \mathcal{L}$  con  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, F(t), \dot{F}(t))$  alcanza un máximo o un mínimo en  $\mathcal{C}$  para cierta  $F$ , entonces  $F$  es solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Observación: Esta notación clásica puede resultar desconcertante y requiere alguna explicación: la parcial con respecto a  $\dot{q}^k$  significa la parcial con respecto al  $k$ -ésimo lugar donde se sustituye  $\dot{F}(t)$  y la derivada total  $\frac{d}{dt}$  supone implícitamente que consideramos todas las variables como funciones de  $t$ . En física  $\mathcal{L}$  es el *lagrangiano* (esencialmente la diferencia entre la energía cinética y potencial). Aquí conservaremos esta notación.

*Demostración:* Si la integral alcanza un extremo en  $\mathcal{C}$  para  $F = F_0(t)$  entonces para cualquier otra función  $\alpha = \alpha(t)$  como  $F$  pero con  $\alpha(a) = \alpha(b) = \vec{0}$  se cumple que la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b \mathcal{L}(t, F_0(t) + \epsilon \alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon \dot{\alpha}(t)) dt$$

alcanza un extremo en  $\epsilon = 0$ . Nuestros conocimientos de Cálculo I llevan a  $f'(0) = 0$ . Derivando bajo el signo integral y con una integración por partes

$$0 = \int_a^b \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \alpha^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{\alpha}^k \right) = \int_a^b \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right) \alpha^k$$

donde  $\alpha^k$  son las componentes de  $\alpha$ . como éstas son arbitrarias, la única posibilidad para que la integral sea siempre nula es que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange.  $\square$

Ejemplo: Sea  $G$  la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{L}$  la energía cinética  $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ . En coordenadas cartesianas  $\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$  (se ha escrito ( $q^1 = x, q^2 = y$ )). Los cálculos para las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{x}) = 2\ddot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

y lo mismo con  $y$ . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

que se resuelven como  $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a_0, b_0)$ . Esto concuerda con nuestra idea de que en ausencia de fuerzas las trayectorias son rectilíneas (principio de inercia). En coordenadas polares, como habíamos visto,  $\mathcal{L} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$  y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} & \Rightarrow \ddot{r} = r \dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} & \Rightarrow r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones tan complicadas todavía representan las mismas trayectorias rectilíneas. Por ejemplo, podemos comprobar que  $r(t) = 1/\sin \theta(t)$  con  $\cot \theta(t) = t$ , correspondiente a la recta horizontal antes mencionada, es solución.

En Cálculo I, los máximos y mínimos locales estaban asociados a puntos críticos, pero puede haber puntos críticos que no correspondan necesariamente a extremos. De la misma forma el resultado anterior no asegura que obtengamos máximos o mínimos al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. Con la libertad que nos da teorizar, podemos cambiar los postulados y hacer del método lagrangiano un principio físico fundamental. Por la teoría de ecuaciones diferenciales tendremos una solución para cada punto inicial y cada vector de derivadas; físicamente es todo lo necesario: que la posición y velocidad inicial determinen la ecuación de movimiento de una partícula.

Es posible escribir una fórmula general para las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen en el caso en que  $\mathcal{L}$  proviene de una métrica. Los ejemplos nos mostrarán que esta fórmula no es demasiado útil en ejemplos concretos, sin embargo es conveniente disponer de ella en teoría.

Aprovechamos para introducir un nuevo convenio:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^k} \text{ se abrevia como } f_{,k}}$$

que se superpone con la notación anterior  $\partial_k f$ . éstas y otras convenciones a menudo redundantes son las que dan al cálculo tensorial un aspecto tan taquigráfico y misterioso, es la “debacle de los índices” según [Sp1t2].

**Definición:** Sea  $(g_{ij})$  la matriz formada de componentes de una métrica  $G$  y sea  $(g^{ij})$  su matriz inversa. Se llaman *símbolos de Christoffel* a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}).$$

Los  $g^{ij}$  son las componentes de un tensor dos veces contravariante. Esto es, existe un tensor tal que sus componentes en cualquier carta conforman la matriz inversa de la matriz de componentes de la métrica. Sin embargo los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  no son componentes de un tensor: al cambiar de carta no respetan las fórmulas de cambio de coordenadas vistas en el primer capítulo. Nótese que la simetría de los  $g_{ij}$  implica las relaciones  $g^{ij} = g^{ji}$  y  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

**Lema 3.1.2** Si  $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$  con  $g_{ij}$  las componentes de una métrica, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son  $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$ .

*Demostración:* Derivando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{d}{dt} (2g_{kj} \dot{q}^j) = 2g_{kj,i} \dot{q}^i \dot{q}^j + 2g_{kj} \ddot{q}^j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir, por tanto, como

$$2g_{kj}\ddot{q}^j - g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j = -2g_{kj,i}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

En el segundo miembro podemos renombrar arbitrariamente los índices de sumación  $i$  y  $j$ . Si los intercambiamos y sumamos las ecuaciones resultantes, se deduce

$$g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}(g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Multiplicando por  $g^{lk}$  se obtiene la ecuación del enunciado.  $\square$

**Definición:** Se dice que una curva parametrizada<sup>5</sup>  $c = c(t)$  en una variedad semiriemanniana  $n$ -dimensional es una *geodésica* si en cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  con  $\text{Im } c \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ , las funciones  $(\phi \circ c)(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por supuesto, se supone que los  $\Gamma_{ij}^k$  están evaluados en el punto  $c(t)$ .

Como hemos notado antes, el curso de ecuaciones diferenciales asegura que para cada punto y cada vector tangente hay una geodésica. Por otro lado, también el mismo curso nos hace sospechar acertadamente que rara vez tendremos soluciones explícitas de estos sistemas de ecuaciones diferenciales, en general no lineales.

Ejemplo: Calculemos los símbolos de Christoffel en  $\mathbb{R}^2$  en coordenadas polares y las correspondientes ecuaciones de las geodésicas.

La métrica usual en estas coordenadas era  $dr^2 + r^2d\theta^2$  (en notación moderna  $dr \otimes dr + r^2d\theta \otimes d\theta$ ). Entonces

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Como ambas matrices son diagonales, en la definición de los símbolos de Christoffel podemos suponer  $m = k$ , porque otro valor de  $m$  contribuiría con un sumando nulo. Por consiguiente

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kk}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}).$$

De aquí se deduce, tras cálculos aburridos pero triviales

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

---

<sup>5</sup>Con la denominación *curva parametrizada* nos referimos a curvas como las consideradas en el primer capítulo para definir el espacio tangente: aplicaciones de un intervalo real en la variedad con derivada no nula.

Con ello volvemos a encontrar las ecuaciones (3.1) para las geodésicas en concordancia con el Lema 3.1.2.

Cualquiera que haya pasado por los cálculos anteriores se percatará que la deducción de (3.1) fue más directa usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el Lema 3.1.2 nos asegura que de ellas podemos obtener los símbolos de Christoffel. Esto funciona bien como método de cálculo de los  $\Gamma_{ij}^k$  en casos sencillos. El lector incrédulo debería cronometrar cuánto tardaría en completar su cálculo el siguiente ejemplo a partir de la definición.

**Ejemplo:** Hallemos los símbolos de Christoffel en  $S^2$  cuando se usa la carta en esféricas  $\phi = (\theta, \varphi)$  con el significado habitual ( $x = \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = \cos \theta$ ).

Un cálculo (ejercicio) prueba que la métrica usual en esféricas es

$$i^*G = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$$

o en notación clásica  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ , lo que lleva a considerar  $\mathcal{L} = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$ . Y se obtiene inmediatamente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 4\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0.$$

Por consiguiente las ecuaciones de las geodésicas son

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

que comparadas con la definición implican  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos \theta / \sin \theta$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$  y que el resto de los símbolos de Christoffel son cero.

Dicho sea de paso, con estas ecuaciones tenemos que el ecuador parametrizado por la longitud de arco,  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = t$ , y los meridianos,  $\varphi = \text{cte}$ ,  $\theta = t$ , son geodésicas. El resto de los círculos máximos convenientemente parametrizados también lo son, simplemente con un argumento de simetría, pero no vemos esas soluciones a simple vista en la ecuación porque en coordenadas esféricas no tienen una ecuación sencilla.

En los cursos de Física básicos no se habla de la minimización de la energía sino de que la energía ni se crea ni se destruye, es constante. La traducción en nuestro lenguaje empleando una métrica es que los vectores tangentes a una geodésica obtenidos al derivar (las velocidades) tienen longitud constante. Esto se puede deducir fácilmente con material de una futura sección, no obstante jugaremos un poco con la ecuación para practicar y obtener una prueba a partir de la definición.

**Lema 3.1.3** Si  $c = c(t)$  es una geodésica, con la notación anterior se cumple que  $g_{ij}(t) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$  es constante, donde  $g_{ij}(t) = g_{ij}(x^1(t), \dots, x^n(t))$ .

*Demostración:* Derivando (no se indica la dependencia en  $t$ )

$$\frac{d}{dt} \left( g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) = g_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + 2g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2x^j}{dt^2}.$$

Por otro lado la ecuación de las geodésicas se puede escribir como (véase la demostración del resultado anterior o la definición de los símbolos de Christoffel)

$$g_{ij} \frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Sustituyendo  $g_{ij}d^2x^j/dt^2$  en la fórmula anterior, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) = \frac{1}{2}(g_{kj,i} - g_{ij,k}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

y esto es cero porque a cada sumando se le puede asignar su negativo intercambiando  $i$  por  $k$ .  $\square$

Dada una curva parametrizada en una variedad riemanniana  $M$ ,  $c : [a, b] \longrightarrow M$ , por analogía con la fórmula euclídea  $\int_a^b \|c'(t)\| dt$  se define su *longitud de arco* entre  $c(a)$  y  $c(b)$  de la forma obvia:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{G(c'(t), c'(t))} dt.$$

Deduciremos a partir del resultado anterior que las geodésicas en variedades riemannianas también son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la longitud de arco. Este hecho es geoméricamente muy significativo (si hay curvas que minimizan la longitud, son geodésicas) pero poco relevante para el resto del curso, más orientado al ámbito semiriemanniano.

**Proposición 3.1.4** *Las geodésicas son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L} = \sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}$ .*

*Demostración:* Derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} &= \mathcal{L}^{-1} g_{ij} \dot{q}^j, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= (2\mathcal{L})^{-1} g_{kj,i} \dot{q}^k \dot{q}^j, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) &= -\mathcal{L}^{-2} \frac{d\mathcal{L}}{dt} g_{ij} \dot{q}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij,k} \dot{q}^k \dot{q}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij} \ddot{q}^j. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.3  $d\mathcal{L}/dt = 0$  y empleando  $g_{ij,k}\dot{q}^k\dot{q}^j = (g_{ij,k} + g_{ik,j})\dot{q}^k\dot{q}^j/2$  se deduce

$$g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i})\dot{q}^k\dot{q}^j = 0.$$

que son ecuaciones que satisfacen las geodésicas.  $\square$

No resistimos incluir unos breves comentarios sobre la posibilidad de usar la métrica para definir una distancia en una variedad riemanniana conexa  $M$ .

Dados dos puntos  $p, q \in M$  siempre existe una curva parametrizada  $C^\infty$  a trozos<sup>6</sup> que conecta ambos puntos y tiene sentido definir

$$d_M(p, q) = \inf\{L(c) : c \text{ es } C^\infty \text{ a trozos con } c(0) = p \text{ y } c(1) = q\}.$$

Se puede probar (§4.7 [Bu-Gi], VI.4 [Ga-Ru]) que  $d_M$  es una distancia en  $M$  y que la topología métrica es la misma que la de  $M$ . Si  $M$  es completa, esto es, si con la topología métrica es un espacio topológico completo<sup>7</sup> entonces hay un mínimo: el ínfimo se alcanza para las geodésicas y reparametrizaciones suyas (Cor.4.7.6 [Bu-Gi], [ON]). La propiedad de ser completo no es gratuita, por ejemplo si  $M = \mathbb{R}^2$  el ínfimo en  $d_M((-1, -1), (1, 1))$  se alcanza para la recta que une los dos puntos pero, como apuntábamos al comienzo de la sección, en  $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  no se alcanza el ínfimo para ninguna curva (hay ínfimo pero no mínimo). Todavía más, el *teorema de Hopf-Rinow* ([Bu-Gi], [ON]) afirma que  $M$  es completa si y sólo si las geodésicas se pueden extender indefinidamente, es decir, si se pueden definir como curvas  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ .

Originariamente una métrica permite medir vectores tangentes y, según acabamos de ver, también longitudes de arcos de curvas. En general en una variedad semiriemanniana de dimensión  $n$  hay una forma natural de definir el volumen  $n$ -dimensional que coincide con lo esperado en el caso de subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión baja.

Si intentamos copiar el procedimiento de Cálculo III, debemos dividir en “cubitos elementales”  $n$ -dimensionales y sumar (integrar) sus volúmenes. Los “cubitos elementales” no son otra cosa que los cubos unitarios que tienen aristas que determinan bases ortonormales escalados a tamaño infinitesimal. La ortonormalidad de una base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  cuando tenemos una métrica  $G$  significa que  $G(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$  es 1 si  $i = j$  y cero en el resto de los casos y el concepto se extiende al caso semiriemanniano pidiendo  $G(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \pm 1$ . A través de la máquina que mide volúmenes de estos cubos unitarios se puede construir la que mide volúmenes en variedades riemannianas.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad semiriemanniana orientable  $n$ -dimensional. Se dice que  $\omega \in \Omega^n(M)$  es un *elemento de volumen* si  $\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \pm 1$  para cada base ortonormal  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  de cada  $T_p(M)$ ,  $p \in M$ .

**Definición:** Se llama *volumen  $n$ -dimensional* de una variedad semiriemanniana orientable conexa  $n$ -dimensional a  $\text{Vol}(M) = \left| \int_M \omega \right|$  donde  $\omega$  es un elemento de volumen de  $M$ .

<sup>6</sup>En realidad se puede pedir que sea simplemente  $C^\infty$ . Consideramos aquí la situación más general de regularidad  $C^\infty$  a trozos por coherencia con las referencias citadas.

<sup>7</sup>Véase la definición exacta en [Mu], intuitivamente podemos pensar que no le falta ningún punto límite.

La unicidad del elemento de volumen salvo cambios de signo en cada componente conexa es fácil y habitualmente diremos “el elemento de volumen” en lugar de “un elemento de volumen”. La existencia y el propio cálculo están incluidos en el siguiente resultado. El paso de una carta a toda la variedad es trivial usando la orientabilidad.

**Proposición 3.1.5** *Sea  $(M, G)$  una variedad semiriemanniana orientable. Supongamos que empleando la carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  las componentes de  $G$  son  $g_{ij}$ , entonces  $\omega = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$  es el elemento de volumen en  $\mathcal{U}$ .*

*Demostración:* Si expresamos los vectores de una base ortonormal  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  en términos de la base natural  $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ , tendremos  $\vec{v}_i = a_i^k \partial_k$  y por la ortonormalidad,  $G(a_i^k \partial_k, a_j^l \partial_l) = a_i^k g_{kl} a_j^l$  es 1 si  $i = j$  y cero en otro caso. Tomando determinantes es fácil ver que  $\det(a_k^l)^2 \cdot \det(g_{ij}) = 1$ . Por otro lado,  $(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n)(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \det(a_k^l)$ , entonces  $\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \sqrt{|\det(g_{ij})|} \det(a_k^l) = \pm 1$ .  $\square$

Ejemplo: Habíamos visto que la métrica usual en  $S^2$  es  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  donde  $\theta$  y  $\varphi$  son los ángulos en esféricas, entonces  $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$  es el elemento de volumen y el área de  $S^2$  (su volumen 2-dimensional) es  $\int_{S^2} \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi$ .

## Ejercicios de la sección 1

- 1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
  - i) Si una métrica es definida positiva, ¿lo es la métrica inducida?
  - ii) ¿Cómo se podría deducir de un ejemplo de esta sección que los símbolos de Christoffel no son tensores?
  - iii) ¿Por qué en dimensión 4 hay como mucho 40 símbolos de Christoffel distintos? ¿Cuántos hay en dimensión 5?
  - iv) ¿Por qué  $r = t$ ,  $\theta = t$  no es una geodésica en  $\mathbb{R}^2$  usando coordenadas polares?
- 2) Hallar la métrica inducida en el hiperboloide  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  usando la carta (definida en cierto abierto)  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ .
- 3) Probar que la métrica usual de  $S^2$  en esféricas es  $d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$ .
- 4) Sea  $G$  la métrica inducida en  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  usando la carta proyección  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  definida en  $\mathcal{U} = S^2 \cap \{z > 0\}$ . Demostrar que la base natural del espacio tangente  $\{\partial_1, \partial_2\}$  no es ortogonal en  $\mathcal{U}$ , esto es, que  $G(\partial_1, \partial_2)$  no es idénticamente nulo. Repetir el problema para la carta dada por los ángulos en esféricas. (Nota: Empleando la curvatura de Gauss es posible deducir que este hecho es común a cualquier carta de  $S^2$ ).
- 5) Hallar alguna carta del cilindro de radio 3 de manera que  $\{\partial_1, \partial_2\}$  sea ortonormal con la métrica inducida.

6) Demostrar que

$$r = (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)^{-1} \quad \text{con} \quad \theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{2} - t}$$

define una geodésica en  $\mathbb{R}^2$  con la métrica en polares  $dr^2 + r^2 d\theta^2$ . *Indicación:* No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas.

7) Calcular las geodésicas con  $\theta$  constante usando la métrica  $dr^2 - r^2 d\theta^2$ .

8) Calcular los símbolos de Christoffel para la métrica  $dr^2 + 4 \operatorname{senh}^2 r d\theta^2$  y hallar alguna de las geodésicas.

9) Calcular los símbolos de Christoffel para  $\mathbb{R}^3$  usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ . *Indicación:* Como  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  son ortogonales, de antemano sabemos que en la métrica no aparecerán los términos cruzados  $drd\theta$ ,  $drd\varphi$ ,  $d\theta d\varphi$ , lo cual simplifica los cálculos iniciales.

10) Calcular los símbolos de Christoffel y las geodésicas de  $\mathbb{R}^2$  con la métrica  $du^2 + 4vdudv + 8v^2 dv^2$ .

11) Calcular los símbolos de Christoffel y alguna geodésica del semiplano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  con la métrica de Poincaré  $y^{-2} dx^2 + y^{-2} dy^2$ .

12) Considérese la banda  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  con la métrica definida por

$$\frac{4}{(1-x^2)^2} dx^2 + xy dx dy + (1+x^2+y^2) dy^2.$$

Utilizar que la energía es constante para calcular las geodésicas horizontales de  $M$  sin necesidad de hallar los símbolos de Christoffel.

## 3.2. La métrica de Schwarzschild

La métrica de Minkowski  $G = -dt^2 + c^{-2} dx^2$  convierte a  $\mathbb{R}^2$ , con la carta identidad  $\phi = (t, x)$  en una variedad semiriemanniana. Como sus componentes son constantes (recuérdese que  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío) las ecuaciones de las geodésicas  $\gamma(\tau) = (t(\tau), x(\tau))$  serán  $\ddot{t} = \ddot{x} = 0$ . Imponiendo que partan desde el origen se tiene  $t(\tau) = a\tau$ ,  $x(\tau) = b\tau$  donde  $\tau$  es el parámetro de la geodésica, y de aquí  $x/t = b/a = \text{cte}$ . Mecánicamente esto significa que en el mundo de la relatividad restringida, igual que en el newtoniano más familiar, en ausencia de fuerzas las partículas se mueven con velocidad constante (principio de inercia). Para un rayo de luz  $b/a = c$  y se cumple  $G(\gamma', \gamma') = 0$ , por otro lado, según nos han dicho siempre, las partículas materiales viajan a velocidades menores que las de la luz, por consiguiente las geodésicas correspondientes verifican  $G(\gamma', \gamma') < 0$ . Multiplicando  $\tau$  por una constante adecuada de hecho se puede conseguir en el instante inicial  $G(\gamma', \gamma') = -1$  y el Lema 3.1.3 asegura que esto se cumplirá a lo largo de toda la geodésica. Denotando a la velocidad  $b/a$  con el nombre más natural  $v$ , esta normalización permite escribir las geodésicas anteriores, salvo signos convencionales,

como  $t(\tau) = \tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $x(\tau) = -v\tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  y estas fórmulas coinciden con las transformaciones de Lorentz para un observador que mide tiempo  $\tau$  y espacio 0, es decir, que viaja con la partícula. En resumen, bajo la normalización  $G(\gamma', \gamma') = -1$  el parámetro  $\tau$  de la geodésica se interpreta físicamente como el llamado *tiempo propio*, el tiempo medido desde la partícula material cuya trayectoria representa la geodésica  $\gamma$ .

Imaginemos ahora que en lugar de la métrica de Minkowski consideramos en  $\mathbb{R}^2$

$$G = -A(x^2) dt^2 + dx^2$$

con  $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  creciente. Al calcular las geodésicas, la igualdad  $\frac{d}{d\tau}(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t}) = 0$  implica  $A(x^2)\dot{t} = K = \text{cte}$  y sustituyendo en la segunda de las ecuaciones se deduce

$$x'' + K^2 x \frac{A'(x^2)}{(A(x^2))^2} = 0.$$

Si  $x(0) > 0$  y  $x'(0) = 0$ , es decir si inicialmente dejamos una partícula en reposo en la parte positiva del eje  $X$ , se cumplirá  $x''(0) < 0$ , la partícula se acelerará en dirección hacia el origen, y si comienza en la parte negativa se sigue  $x''(0) > 0$  con el mismo efecto. Los habitantes de este universo pensarían que en el centro de  $\mathbb{R}$  hay un sol que atrae a todas las partículas de modo que aquellas en reposo en  $(0, \infty)$  sufren una aceleración hacia la izquierda y las de  $(-\infty, 0)$  hacia la derecha.

La relatividad general es una teoría geométrica de la gravitación creada en 1915 por A. Einstein dentro de las líneas ilustradas en el ejemplo anterior, donde se concibe la gravedad como una métrica en la variedad que representa el espacio-tiempo. De esta forma deja de ser una fuerza asociada a un campo y deviene en una deformación en nuestra manera de medir el espacio y el tiempo. Según esta interpretación las partículas masivas se aceleran al acercarse la Sol porque allí las longitudes están más “contraídas”. Ciertamente el salto conceptual abstracto dado por Einstein fue formidable, sobre todo teniendo en cuenta que la geometría riemanniana y el cálculo tensorial no tenían gran difusión. No es de extrañar que inicialmente fueran matemáticos destacados los más activamente interesados en la nueva teoría.

La pregunta obvia es ¿qué razones físicas hay para seguir esta explicación tan estafalaria de la gravedad? No nos detendremos aquí mucho en esta cuestión (véase [Ch] §3.1) y nos limitaremos a citar una razón experimental y otra teórica. La primera es que con mediciones extremadamente precisas a escala astronómica se ha comprobado que la famosa fórmula  $-GMm/r^2$ , sobre la cual I. Newton construyó su inamovible edificio de la gravitación, no es del todo correcta mientras que las métricas de la relatividad general explican la levísima divergencia con los experimentos. La razón teórica es la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Por explicarlo con un ejemplo, si atraemos con un imán objetos de hierro, los que tienen mayor masa se acercarán más despacio o no

se moverán por efecto del rozamiento, sin embargo si la Estación Espacial, un astronauta o un alfiler son capturados por la atracción gravitatoria de la Tierra las ecuaciones de movimiento serán exactamente las mismas. ¿Cómo sabe la Tierra que debe atraer menos al alfiler para que se acerque a la misma velocidad? Pensando que la gravedad es una deformación del espacio-tiempo, algo intrínseco a la geometría del mundo en que vivimos, es natural que todos los objetos se comporten por igual.

En relatividad general la variedad a considerar debe representar las tres coordenadas de espacio y la de tiempo, por tanto es de dimensión 4. La métrica en cada punto para alguna carta debiera parecerse a la de Minkowski en  $\mathbb{R}^4$

$$-dt^2 + c^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Matemáticamente, fijado un punto  $p$ ,  $Q(\vec{v}) = G(\vec{v}, \vec{v})$  define una forma cuadrática en  $T_p(M)$  y el álgebra lineal nos dice que todas las formas cuadráticas de la misma signatura (número de autovalores positivos y negativos) son equivalentes por cambios de base. Entonces las métricas de relevancia física son las de signatura  $(1, 3)$ . Fijada una se dice que la variedad semiriemanniana resultante es una *variedad de Lorentz*. Las geodésicas representando rayos de luz (fotones) y partículas materiales son de los tipos recogidos en la siguiente definición.

**Definición:** Se dice que  $\gamma$  es una *geodésica nula* en una variedad semiriemanniana con métrica  $G$  si  $G(\gamma', \gamma') = 0$  y se dice que es una *geodésica temporal* si  $G(\gamma', \gamma') < 0$ . En este último caso cuando  $G(\gamma', \gamma') = -1$  se dice que está parametrizada por el *tiempo propio*.

Resumiendo, la relatividad general establece un diccionario físico-matemático

Relatividad		Geometría
espacio-tiempo	→	variedad de Lorentz $M$
gravedad	→	métrica en $M$
rayos luminosos	→	geodésicas nulas
partículas materiales	→	geodésicas temporales
tiempo propio	→	parámetro de geodésicas temporales normalizadas

La cuestión a resolver es cómo deducir la métrica que corresponde a la gravedad del mundo real. La respuesta no es nada fácil y pospondremos a un próximo capítulo su tratamiento matemático. Anticipamos que al igual que el potencial gravitatorio (fuera de una masa) es solución de una ecuación del tipo  $\Delta V = 0$ , en la relatividad general la métrica es solución de unas ecuaciones tensoriales muy feas que también contienen derivadas segundas.

Poco después de que dichas ecuaciones vieran la luz, K. Schwarzschild las resolvió en el caso radial que físicamente corresponde a la deformación del espacio-tiempo en el exterior de una masa esférica estática y homogénea despreciando la influencia de otras masas.

**Definición:** Sea  $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$  con las funciones coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  siendo  $r, \theta, \phi$  las coordenadas esféricas habituales. Se llama *métrica de Schwarzschild* a

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + c^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + c^{-2} r^2 d\theta^2 + c^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

donde  $r_0$  es una constante, llamada *radio de Schwarzschild*, que físicamente representa  $2Gm/c^2$  con  $G$  la constante de gravitación universal y  $m$  la masa<sup>8</sup>.

Para estudiar movimientos radiales, los que en términos espaciales sólo dependen del radio  $r$  (la “distancia” al origen), nos podemos olvidar de  $\theta$  y  $\varphi$  y para mayor simplicidad considerar que el espacio-tiempo está representado por  $(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

**Definición:** En  $M = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  se llama *métrica de Schwarzschild bidimensional* a

$$(3.2) \quad -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + c^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Una primera sorpresa es que aparte de la singularidad natural en  $r_0 = 0$  (también existe en la fuerza de Newton) haya otra en  $r = r_0$ . ¿Por qué no nos percatamos de ella? En el sistema internacional  $G = 6,670 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$  y  $c = 2,9979 \cdot 10^8 m/s$  y con unos datos astronómicos cerca calculamos que para la Tierra, Júpiter y el Sol los valores de  $r_0$  son respectivamente  $8,87mm$ ,  $2,82m$  y  $2,96km$ . Entonces para notar esa singularidad la Tierra debería tener el tamaño de una canica, Júpiter debería caber en nuestra habitación o el Sol tendría que poderse recluir en una ciudad.

Los avances astronómicos han mostrado que tales objetos, tan diferentes de los astros que nos rodean y bien conocidos en ciencia ficción, existen realmente. Cuando el radio de una estrella se reduce por un colapso más allá de  $r_0$  entonces la singularidad aparece y se dice que es un *agujero negro* [Ha-El], [Hu-To]. La esfera  $r = r_0$  en la que la métrica es singular se llama *horizonte de sucesos* del agujero negro. En principio habría que omitir esta esfera de la variedad que representa el espacio-tiempo aunque veremos más adelante que la singularidad no es tan crítica como parece.

Una cuestión básica es cómo cae un objeto que parte del reposo por efecto de la gravedad. El problema matemático consiste en calcular las geodésicas de (3.2).

<sup>8</sup>En breve veremos que ésta es la única interpretación posible de  $r_0$  si queremos recuperar la concordancia aproximada con la teoría de Newton.

**Proposición 3.2.1** Si  $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau))$  es una geodésica de (3.2) parametrizada por el tiempo propio y tal que  $r(0) = R_0 > r_0$ ,  $r'(0) = 0$ , entonces

$$r(\tau) = R_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right) \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{2c}{R_0} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}$$

y  $V(x)$  es la función inversa de  $f(x) = x + \sin x$ .

Observación: Para masas y distancias “normales”  $K_0$  es muy pequeño y entonces  $V(K_0\tau)$  es  $K_0\tau/2$  con gran aproximación, de donde se infiere que la aceleración inicial es  $r''(0) \sim -R_0 K_0^2/8$ . Si se quiere que esto se parezca a la fórmula de Newton  $-Gm/R_0^2$ , se debe cumplir  $R_0 K_0^2 = 8GM/R_0^2$  que después de operar lleva a  $r_0 = 2GMc^{-2}$ , por eso la única manera de interpretar físicamente  $r_0$  es como  $2Gm/c^2$  si se quiere que la nueva teoría concuerde en el límite con la newtoniana.

*Demostración:* Las componentes de la métrica no dependen de  $t$ , entonces

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\dot{t} = \text{cte}$$

y por la definición del tiempo propio  $-(1-r_0/r)\dot{t}^2 + c^{-2}(1-r_0/r)^{-1}\dot{r}^2 = -1$ . Combinando estas dos ecuaciones se tiene  $\dot{r}^2 = r_0 c^2 (r^{-1} - \text{cte})$  y  $r'(0) = 0$  implica que esta constante es  $R_0^{-1}$ . En resumen, hay que resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

bajo la condición inicial  $r(0) = R_0$ . Con un cambio de variable  $v = V(K_0\tau)$  o equivalentemente  $\tau = (v + \sin v)/K_0$ , la ecuación anterior es por la regla de la cadena

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = \frac{c^2 r_0}{K_0^2} (1 + \cos v)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

y por sustitución directa  $r(v) = R_0 \cos^2(v/2) = R_0(1 + \cos v)/2$  es solución de esta ecuación.  $\square$

Consideremos ahora los rayos luminosos en las direcciones radiales.

**Proposición 3.2.2** Si  $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau))$  es una geodésica nula de (3.2) con  $r(0) = R_0 > r_0$ ,  $t(0) = 0$ , entonces

$$\pm ct = r - R_0 + r_0 \log\left(\frac{r - r_0}{R_0 - r_0}\right)$$

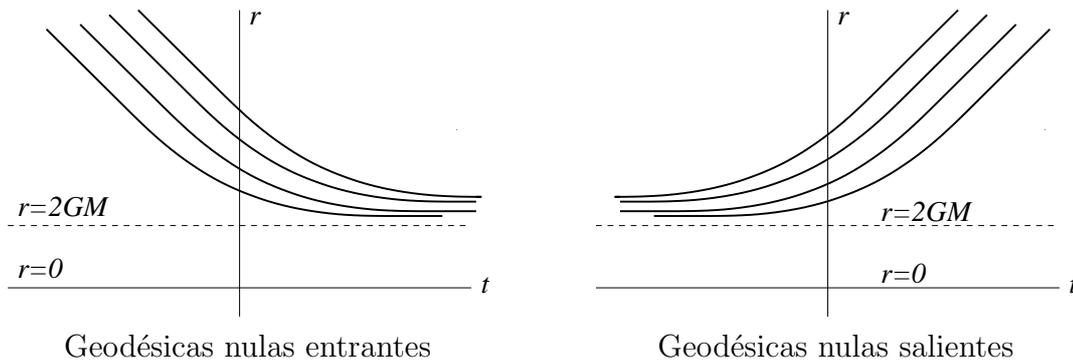
donde el signo coincide con el del  $r'(0)/t'(0)$ , es decir, es positivo si es saliente y negativo si es entrante.

*Demostración:* Por ser una geodésica nula se tiene

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + c^{-2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0$$

y por la regla de la cadena  $c^2(dt/dr)^2 = (1 - r_0/r)^{-2}$ . empleando las condiciones iniciales se tiene  $\pm ct = \int_{R_0}^r (1 - r_0/x)^{-1} dx$  y la integral es elemental.  $\square$

Un subproducto de la prueba es que la “velocidad”  $dr/dt$  de un rayo de luz es  $c(1 - r_0/r)$ , por consiguiente se ralentiza cuanto más próximo está al horizonte de sucesos y en el límite la velocidad es nula. Esto concuerda con la imagen clásica de un agujero negro como una estrella con una gravedad tan poderosa que ni la luz puede escapar. Curiosamente P.S. Laplace ya teorizó sobre tales objetos a finales del XVIII (véase [Ha-El]). Más allá de esta idea clásica, un poco imperfecta, la gráfica de las curvas del enunciado muestra que las geodésicas nulas no atraviesan el horizonte de sucesos.



Por otro lado la Proposición 3.2.1 implica que una partícula sólo necesita un tiempo finito para llegar al horizonte de sucesos porque  $\cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right)$  toma todos los valores entre 0 y 1. En otras palabras: una partícula puede alcanzar el horizonte de sucesos de un agujero negro en un segundo medido por un observador subido a ella pero los observadores estáticos exteriores si tuvieran instrumentos infinitamente precisos percibirían indefinidamente las señales previas a su entrada en el horizonte de sucesos sin detectar que ésta se efectúa. Esta situación choca fuertemente con nuestro sentido común y Einstein trató de evitarla en [Ei] probando que bajo ciertas hipótesis que pudieran darse en la formación de cúmulos estelares, el horizonte  $r = r_0$  debería estar “tapado” con masa sugiriendo así que los agujeros negros eran un modelo matemático sin realidad física.

Desde el punto de vista geométrico es posible remediar los problemas y paradojas que plantea la singularidad en  $r = r_0$  utilizando unas sorprendentes cartas que permiten eliminarla (véase [Ha-El] §5.5).

Parte de las confusiones en la relatividad general se deben a interpretar  $t$  y  $r$  como “verdaderos” tiempos y espacios medidos por todos los observadores. La relatividad del

tiempo es particularmente contraintuitiva y adquiere una dimensión más profunda que en la relatividad especial por presentarse incluso para observadores estáticos.

Consideremos que desde  $r = r_A$  parte una geodésica (una señal luminosa, una partícula) hacia  $r_B$ . Al sumarle una cantidad constante  $\Delta t$  a  $t(\tau)$  tendremos también una geodésica que representa la misma señal emitida en otro tiempo. Para un observador estático ( $r'(0) = 0$ ) en  $r_A$  se cumple  $-1 = -(1 - r_0/r)(\frac{dt}{d\tau}(0))^2$  y entonces si  $\Delta t$  es pequeño el intervalo  $\Delta\tau_A$  (de tiempo propio) que medirá es, aproximando  $dt/d\tau$  por  $\Delta t/\Delta\tau_A$ ,

$$\Delta\tau_A = (1 - r_0/r_A)^{1/2}\Delta t.$$

Es decir, que  $t$  difiere del tiempo (propio) medido por los observadores, a veces se dice que  $t$  es el *tiempo de Schwarzschild*. Si razonamos de la misma forma con un observador en  $r_B$  deduciremos

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - r_0/r_A}{1 - r_0/r_B}}.$$

Esta fórmula implica que si un fenómeno oscilatorio ocurre en las cercanías de una gran masa gravitatoria, cuanto más lejos estemos menos frecuencia detectamos. De manera ingenua pero representativa podemos pensar que las masas atraen a los frentes de onda y cuando la atracción gravitatoria se debilita aumenta la distancia entre los nodos. En el caso de las radiaciones electromagnéticas, especialmente para el espectro luminoso de las estrellas, este fenómeno se llama *corrimiento hacia el rojo gravitatorio* (hay otro famoso corrimiento hacia el rojo debido a la expansión del Universo) y se ha detectado astronómicamente aunque no es nada fácil de cuantificar con precisión porque es muy complicado medir la masa y el radio de una gran estrella lejana.

Nótese que si  $r_A$  está muy próximo a  $r_0$  un instante para el primer observador se transforma en una eternidad para el segundo, porque el tic del reloj se junta más al tac cuanto mayor sea la gravedad, de ahí el extraño comportamiento de los objetos que se acercan al horizonte de sucesos.

Terminaremos esta sección deduciendo un efecto que durante algún tiempo fue el único débil apoyo experimental<sup>9</sup> a la relatividad general creada por Einstein.

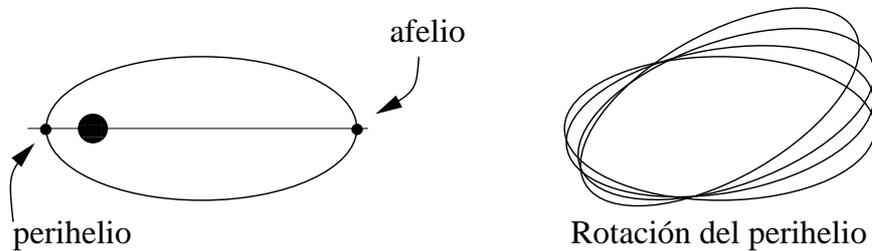
Según enunció J. Kepler en su primera ley y probó Newton a partir de su ley de gravitación, los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Los puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol se llaman *perihelio* y *afelio*, respectivamente. Debido a la influencia de otros planetas y objetos astronómicos las órbitas

---

<sup>9</sup>Es de observar que el fenómeno que describiremos no es una deducción inesperada y apriorística de la relatividad general, bien al contrario, incluso en versiones previas erróneas de la relatividad general, Einstein buscó obtener como consecuencia este fenómeno conocido en el siglo XIX. Al igual que la desviación gravitatoria de los rayos luminosos, pero en mucha menor medida, su verificación experimental no estuvo históricamente libre de dudas.

no son exactamente elípticas pero el ingenio de los astrónomos permitió cuantificar estas perturbaciones en concordancia con la gravitación de Newton.

En el siglo XIX se estudió con suma precisión la órbita de Mercurio, el planeta más afectado por la gravedad del Sol, y se observó que no era una elipse estática sino que el perihelio iba rotando levemente de revolución en revolución cierto ángulo que con los datos actuales es de  $574''$  por cada siglo. Sorprendentemente una minúscula parte de esta rotación, concretamente  $43''$  por siglo (al principio se pensó que algo menos) no era debida a la influencia de otros planetas. A pesar de ser una cantidad casi inapreciable (habría que esperar casi 10000 años para detectar una variación de un grado) permaneció como un problema menor pero insidioso durante años. Se sugirió que quizá existiera un nuevo planeta o gran asteroide, llamado provisionalmente Vulcano, entre el Sol y Mercurio.



Vamos a probar que la métrica de Schwarzschild tiene órbitas casi-elípticas que presentan una rotación del perihelio coincidiendo con la esperada en el caso de Mercurio. Con este propósito no podemos emplear la simplificación (3.2) porque ahora buscamos geodésicas confinadas en el plano de la eclíptica  $\theta = \pi/2$  con  $r$  y  $\varphi$  variando. Nos ocuparemos primero de la relación entre estas dos funciones sin fijarnos en la dependencia en  $\tau$ .

**Proposición 3.2.3** *Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild incluidas en el plano  $\theta = \pi/2$  verifican que  $r$  y  $\varphi$  están relacionados mediante*

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = Ar^4 + Br^3 - r^2 + r_0r$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales y de  $r_0$ .

*Demostración:* Las componentes de la métrica de Schwarzschild no dependen de  $t$  ni de  $\varphi$ , entonces por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = C_1, \quad r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = C_2$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes. Sustituyendo los valores de  $\dot{t}$  y  $\dot{\varphi}$  (y  $\dot{\theta} = 0$ ) en  $\mathcal{L}$  se deduce

$$-C_1^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} + c^{-2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + c^{-2}C_2^2r^{-2} = -1$$

y operando

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2(C_1^2 - 1) + \frac{c^2 r_0}{r} - \frac{C_2^2}{r^2} + \frac{r_0 C_2^2}{r^3}.$$

Dividiendo entre  $(d\varphi/d\tau)^2 = C_2^2/r^4$  se obtiene el resultado.  $\square$

Seguiremos ahora [Fo-Ni] con un argumento debido a C. Møller que es bastante directo y general no necesitando la hipótesis de que la órbita sea casi circular lo cual no sería aplicable a Mercurio.

El cambio  $u = 1/r$  en la proposición anterior conduce a

$$(3.3) \quad (u')^2 = A + Bu - u^2 + r_0 u^3.$$

El perihelio y el afelio corresponden a los valores extremos de  $u$ , digamos  $u_p$  y  $u_a$ , en lo que la derivada se anula, por consiguiente el polinomio  $P$  del segundo miembro de (3.3) es divisible por  $(u - u_p)(u - u_a)$ . Además  $P$  tiene como suma de sus raíces  $r_0^{-1}$  por las fórmulas de Vieta y esto es suficiente para determinar la tercera raíz, permitiendo escribir (3.3) como

$$\frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1 \quad \text{donde} \quad P(u) = (u - u_a)(u_p - u)(1 - r_0(u + u_a + u_p))$$

y el signo será positivo si  $u$  es creciente ( $u' > 0$ ) y negativo en caso contrario.

Partiendo del afelio, al pasar al perihelio siguiente  $u$  crece mientras que cuando se pasa del perihelio anterior al afelio presente  $u$  decrece. Con esta idea en mente, integrando la ecuación anterior se obtienen las siguientes fórmulas para la variación del ángulo:

$$\varphi_{\text{per.sig.}} - \varphi_{\text{afe.}} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}, \quad \varphi_{\text{afe.}} - \varphi_{\text{per.ant.}} = \int_{u_p}^{u_a} \frac{du}{-\sqrt{P(u)}}.$$

Sumando ambas fórmulas tenemos que la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos es

$$\Delta = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} - 2\pi.$$

Para Mercurio las medidas astronómicas indican  $u_a = 1,43 \cdot 10^{-11}m$  y  $u_p = 2,19 \cdot 10^{-11}m$  y el  $r_0$  correspondiente al Sol (la masa que genera la métrica de Schwarzschild) es, como habíamos mencionado,  $2,96 \cdot 10^3m$ . Calculando numéricamente la integral (con ayuda de un ordenador), se obtiene  $\Delta = 5,04 \cdot 10^{-7}$ . Teniendo en cuenta que Mercurio tarda 0,24 años en dar una vuelta alrededor del Sol, cada siglo habrá dado 416,67 vueltas y la variación del ángulo se multiplicará por este número, siendo

$$\text{Variación secular} = 2,10 \cdot 10^{-4}rad = 43,32''$$

lo que coincide con gran precisión con la cantidad observada experimentalmente. En realidad no es necesario utilizar el ordenador para estimar  $\Delta$ , con unas aproximaciones sencillas (Taylor) se puede deducir la aproximación

$$\Delta \approx 3\pi r_0(u_a + u_p)/2.$$

## Ejercicios de la sección 2

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) La métrica de Schwarzschild con  $r_0 = 0$  coincide con la de Minkowski en esféricas, ¿por qué esto es natural?

ii) ¿Puede la métrica  $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + 4dydz + 3dz^2$  representar un espacio-tiempo?

iii) Si  $\gamma(\tau)$  y  $\gamma(K\tau)$  con  $K$  una constante son geodésicas parametrizadas por el tiempo propio, ¿qué puede decirse de  $K$ ?

iv) ¿Cuál es la justificación del nombre “horizonte de sucesos”?

2) Para el espacio-tiempo  $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}$  dotado con la métrica  $-(1-x^2)^{-1}dt^2 + dx^2$ , hallar las geodésicas parametrizadas por el tiempo propio con  $x(0) = x_0$  y  $x'(0) = t(0) = 0$ .

3) Hallar los símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild bidimensional.

4) Tómese en  $\mathbb{R}^2$  la métrica  $G = -A(x^2) dt^2 + dx^2$  con  $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Si  $\gamma(\tau) = (t(\tau), x(\tau))$  es una geodésica parametrizada por el tiempo propio con  $x(0) = x_0$  y  $x'(0) = t(0) = 0$ , calcular la aceleración  $x''(0)$  en términos de  $x_0$  y  $A$ .

5) Si nos dejamos caer hacia un agujero negro partiendo del reposo desde  $r = R_0$ , probar que según nuestras mediciones tardaremos en alcanzar el horizonte de sucesos  $r = r_0$  un tiempo dado por la fórmula

$$\tau_H = \frac{R_0}{c} \left( \sqrt{\frac{R_0}{r_0}} \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} + \sqrt{1 - \frac{r_0}{R_0}} \right).$$

6) Si mido 1,75m, me he pasado toda la vida de pie sobre la Tierra ( $R = 6,38 \cdot 10^6m$ ,  $r_0 = 8,87 \cdot 10^{-3}m$ ) y mi cabeza tiene exactamente 22 años; estudiar si mis pies son más o menos jóvenes que mi cabeza y aproximar la diferencia de edad. (Despréciase el crecimiento, la rotación de la Tierra y los efectos gravitatorios externos).

7) Supongamos que una partícula material se aleja radialmente de una estrella de manera que si se prolongase indefinidamente su movimiento, llegaría al infinito con velocidad cero. Demostrar que el tiempo de Schwarzschild que necesita para ir de  $r_A$  a  $r_B$  viene dado por  $t_B - t_A = r_0^{-1/2} c^{-1} \int_{r_A}^{r_B} (r - r_0)^{-1} r^{3/2} dr$ . ¿Qué ocurre cuando  $r_A \rightarrow r_0^+$ ?

8) Probar que a lo largo de cualquier geodésica de la métrica de Schwarzschild la expresión  $r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$  permanece constante.

9) En relatividad general, al igual que en el caso clásico, es posible que un planeta siga una órbita circular alrededor de una estrella. Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la variable  $r$  demostrar que se verifica la segunda ley de Kepler  $\omega^2 r^3 = Gm$  donde  $\omega = d\varphi/dt$ .

10) Usar la aproximación  $(1-x)^{-1/2} \approx 1 + x/2$  para  $x$  pequeño para obtener el ángulo de rotación del perihelio

$$\Delta \approx \int_{u_a}^{u_p} \frac{2 + r_0(u_a + u_p + u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du - 2\pi.$$

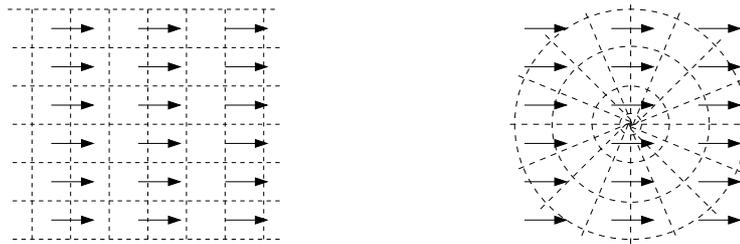
y calcular esta integral explícitamente para conseguir la aproximación  $\Delta \approx 3\pi r_0(u_a + u_p)/2$ .

11) La Tierra en su afelio dista del Sol  $1,52 \cdot 10^{11}m$  y en su perihelio  $1,47 \cdot 10^{11}m$ . Despreciando la influencia de otros planetas, hallar cuántos kilómetros se mueve el punto en que se alcanza el perihelio al cabo de un año.

### 3.3. Cálculo tensorial

La pregunta fundamental que tratamos de responder en esta sección es cómo derivar campos tensoriales. Sabemos derivar funciones en variedades sin embargo ya habíamos dejado caer en el primer capítulo que las derivadas de las componentes de un tensor no se transforman como un tensor. En pocas palabras, la derivada de un tensor no es un tensor. Lo que veremos es que en una variedad semiriemanniana hay una derivada buena, de hecho exactamente una, que preserva la tensorialidad y tiene ciertas propiedades básicas. Tal derivada no es un artificio abstracto para divertimento de los matemáticos, sino que tiene una motivación geométrica muy natural sugerida por las aplicaciones. Lo que hay detrás es el estudio de las variaciones de la velocidad (aceleraciones) cuando el sistema desde el que medimos también está en movimiento y quizá no con velocidad constante. El lector instruido reconocerá aquí el papel asignado en mecánica a los *sistemas inerciales* para que estos problemas no aparezcan. Tanto la relatividad de Galileo como la especial de Einstein dependen de estos sistemas inerciales mientras que la aspiración de la relatividad general es, como en geometría, tener plena libertad para elegir las coordenadas.

Supongamos, por ejemplo, un campo de vectores en  $\mathbb{R}^2$  que a cada punto le asigna el vector unitario constante dirigido hacia la derecha, esto podría representar el campo de velocidades de las partículas de arena en un desierto llano bajo la acción de un viento oeste-este.



La aceleración de las partículas debe ser nula, lo cual es claro en coordenadas cartesianas porque el campo es sencillamente  $\partial/\partial x$  y, por tanto, tiene componentes constantes  $(1, 0)$ . Sin embargo en coordenadas polares

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

y el campo tiene ahora por componentes  $\cos \theta$  y  $-r^{-1} \sin \theta$  que no son constantes. La explicación intuitiva es que, por ejemplo, la derivada con respecto de  $\theta$  involucra un incremento infinitesimal de  $\theta$  con lo cual hay un pequeño cambio en la dirección de la base  $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \theta\}$  y a un observador que la use como sistema de referencia le parecerá que el campo de vectores ha girado un poco en sentido negativo debido a una misteriosa fuerza de Coriolis<sup>10</sup>. De este ejemplo debemos deducir que para derivar un campo de vectores no basta con derivar sus componentes sino también la base en donde se expresan éstas.

Consideremos ahora el problema en general. Supongamos que  $V$  es un campo de vectores que en cierta carta de la variedad se escribe como  $V^i \partial_i$  (es decir, tiene componentes  $V^i$ ). Para derivar “bien”  $V$  con respecto a la  $j$ -ésima variable, aplicando la regla del producto deberíamos escribir

$$V^i \partial_i + C_{ij}^k V^i \partial_k = (V^k_{,j} + C_{ij}^k V^i) \partial_k$$

donde los  $C_{ij}^k$  son las componentes de la “derivada” de  $\partial_i$  con respecto a la  $j$ -ésima variable, son los números que expresan la variación de la base al cambiar de punto. En un contexto más amplio se dice que determinan una *conexión de Koszul* (véase la definición en §3 [ON] o en §6 [Sp1t2]), una forma de derivar. La elección de los  $C_{ij}^k$  es en principio bastante arbitraria, hay infinitas conexiones posibles en una variedad. Las cosas cambian si tenemos una métrica que se debe respetar. Dada una métrica  $G$  y fijados  $i$  y  $j$ ,  $G(\partial_i, \partial_j)$  asigna a cada punto de la carta fijada un número real, es decir, es una función y se debe derivar de la forma habitual, sin embargo según lo dicho anteriormente las “derivadas buenas” de  $\partial_i$  y de  $\partial_j$  se escriben en términos de los  $C_{ij}^k$ . Si queremos que la derivada de toda la vida sea compatible con la nueva y que se cumpla la regla del producto para  $G$  análoga a la del producto escalar usual:  $(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f}' \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \vec{g}'$ , nos vemos forzados a pedir

$$\frac{\partial}{\partial x^k} G(\partial_i, \partial_j) = G(C_{ik}^l \partial_l, \partial_j) + G(\partial_i, C_{jk}^l \partial_l).$$

Es decir,

$$(3.4) \quad g_{ij,k} = C_{ik}^l g_{lj} + C_{jk}^l g_{il}.$$

---

<sup>10</sup>Si caminamos desde el borde de un tiovivo hacia el centro, a pesar de seguir dando el mismo número de vueltas por minuto al principio iremos más rápido (se recore una distancia mayor por ser una circunferencia mayor) y después más lentos. En reacción a este frenazo aparece una fuerza en la dirección de giro que tuerce nuestra trayectoria, ésta es la fuerza de Coriolis asociada a los sistemas de referencia que giran. Los cuerpos que caen hacia la Tierra desde un satélite geostacionario sufren de esta forma una desviación hacia el este pero es más conocida (y exagerada en los libros de divulgación) la fuerza de Coriolis horizontal: al caminar sobre la superficie de la Tierra hacia los polos el hemisferio norte se comporta como un tiovivo deformado que gira en sentido positivo mientras que el hemisferio sur gira (para sus habitantes) en sentido negativo.

Por otro lado, si  $C_{ij}^k$  lo que mide es la variación de  $\partial_i$  en la  $j$ -ésima variable, esto es, en la dirección de  $\partial_j$ , es natural suponer

$$(3.5) \quad C_{ij}^k = C_{ji}^k$$

por la igualdad de las parciales cruzadas. Pues bien, resulta que estos misteriosos números quedan totalmente caracterizados por (3.4) y (3.5) (en términos técnicos se dice que hay una única *conexión de Levi-Civita* asociada a la métrica). Una pequeña sorpresa es que no son desconocidos para nosotros.

**Lema 3.3.1** *Las únicas cantidades  $C_{ij}^k$  que verifican simultáneamente (3.4) y (3.5) son los símbolos de Christoffel  $C_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ .*

*Demostración:* Como los índices  $i, j$  y  $k$  son arbitrarios, podemos permutarlos a nuestro antojo y (3.4) implica

$$(g_{ij,k} - C_{ik}^l g_{lj} - C_{jk}^l g_{il}) + (g_{jk,i} - C_{ji}^l g_{lk} - C_{ki}^l g_{jl}) - (g_{ki,j} - C_{kj}^l g_{li} - C_{ij}^l g_{kl}) = 0.$$

Que usando (3.5) y simplificando se escribe como

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} = 2C_{ik}^l g_{lj}.$$

Multiplicando por  $g^{jm}$  (nótese que  $g_{lj}g^{jm} = \delta_l^m$ ) se obtiene

$$\frac{1}{2}g^{jm}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}) = C_{ik}^m$$

que es la definición de los símbolos de Christoffel.  $\square$

Ahora ya estamos preparados para dar un nombre a la derivada buena.

**Definición:** Sea una variedad semiriemanniana con un campo de vectores que en cierta carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  se expresa como  $V = V^i \partial_i$ . Se llama *derivada covariante* de  $V$  a un tensor de tipo  $(1, 1)$ , que denotaremos  $\nabla V$ , cuyas componentes son

$$V_{;j}^i = V_{,j}^i + \Gamma_{kj}^i V^k$$

y se llama derivada covariante respecto de  $x^j$  al campo de vectores  $\nabla_j V = V_{;j}^i \partial_i$ .

Con nuestra definición no está claro que  $\nabla V$  sea un tensor de tipo  $(1, 1)$ . Si  $V^i$  son las componentes de  $V$  en una carta compatible  $(\mathcal{V}, \phi = (x'^1, \dots, x'^n))$  se cumple  $V^i = V^k \partial x'^i / \partial x^k$  y derivando y aplicando la regla de la cadena

$$V_{;j}^i = \frac{\partial}{\partial x'^j} \left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right) V^k + \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial V^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V^k + \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} V^k \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}.$$

La tensorialidad de la derivada covariante, es decir, la relación

$$V_{;j}^i + \Gamma_{kj}^i V'^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} (V_{;m}^k + \Gamma_{lm}^k V^l)$$

equivale según la relación anterior a

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V^k + \Gamma_{kj}^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} V^l = \Gamma_{lm}^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V^l.$$

Renombrando  $k$  como  $l$  en el primer sumando esta fórmula se cumple en general si y sólo si la ley de transformación de los símbolos de Christoffell es

$$\Gamma_{kj}^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} = \Gamma_{lm}^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} - \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}.$$

A partir de la definición de los símbolos de Christoffel y la tensorialidad de los  $g_{ij}$  esto es un cálculo, pero lo suficientemente tedioso y rutinario como para no incluirlo aquí.

Lo crucial es que las derivadas segundas desaparezcan y es posible dar una prueba sintética de la tensorialidad y otras propiedades de la derivada covariante introduciendo el *conmutador* de campos de vectores<sup>11</sup>.

Ejemplo: Si tomamos el campo en  $\mathbb{R}^2$  que en coordenadas polares se escribe como

$$V = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

ya habíamos visto que corresponde a un campo constante en coordenadas cartesianas, así pues  $V_{;j}^i = 0$  en cartesianas y por la tensorialidad, en cualquier sistema de coordenadas. Si uno se empeñase en hacer los cálculos a partir de la definición obtendría el mismo resultado con más esfuerzo.

Ejemplo: El campo en  $\mathbb{R}^2$  que se escribe en polares  $\phi = (r, \theta)$  como  $V = \partial/\partial\theta$  tiene sus componentes constantes  $V^1 = 0$ ,  $V^2 = 1$  pero  $\nabla V \neq 0$  porque la base de  $T_p(\mathbb{R}^2)$  en polares va girando de punto a punto. Unos cálculos prueban:

$$V_{;1}^1 = \Gamma_{k1}^1 V^k = 0, \quad V_{;1}^2 = \Gamma_{k1}^2 V^k = \frac{1}{r}, \quad V_{;2}^1 = \Gamma_{k2}^1 V^k = -r, \quad V_{;2}^2 = \Gamma_{k2}^2 V^k = 0.$$

Si  $c = c(t)$  es una curva parametrizada y  $\phi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  para cierta carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , la manera natural de definir la *derivada covariante a lo largo de una curva* es, en analogía con la derivada direccional

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_j V \frac{dx^j}{dt}$$

<sup>11</sup>Dos campos de vectores  $V$  y  $W$  se pueden considerar como operadores lineales  $C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  (recuérdese la definición de espacio tangente) y su conmutador  $[V, W] : f \mapsto V(W(f)) - W(V(f))$  define un nuevo campo de vectores. Una de las relaciones más simples con la derivada covariante es  $[V, W] = V^i \nabla_i W - W^i \nabla_i V$ .

donde se sobreentiende que  $\nabla_j V$  está evaluado en  $c(t)$ . Si pensamos en  $V$  como función de  $t$  a lo largo de  $c$ , esto también se puede escribir como

$$\frac{DV}{dt} = \left( \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^i \frac{dx^j}{dt} \right) \partial_k.$$

La siguiente definición es simple notación.

**Definición:** Se dice que un campo vectorial  $V$  es un *transporte paralelo* a lo largo de una curva parametrizada  $c = c(t)$  si  $DV/dt = 0$ .

Observación: Partiendo de un vector  $V_0 \in T_{c(t_0)}(M)$  se puede resolver el sistema de ecuaciones diferenciales  $DV/dt = 0$ ,  $V(c(t_0)) = V_0$ , por ello tiene sentido hablar del transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva.

Ejemplo: En  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual y la carta trivial, los campos de vectores constantes son transportes paralelos a lo largo de cualquier curva, o dicho de otra forma, el transporte paralelo de un vector no lo modifica.

Con estas definiciones podemos entender las geodésicas todavía de otra manera, simplemente son las curvas tales que su campo de vectores tangentes (de velocidades) es un transporte paralelo. Mecánicamente son ecuaciones de movimiento con aceleración nula en un sentido generalizado, lo cual permite reescribir el principio de inercia  $d^2 x^i / dt^2 = 0$ , sólo válido en coordenadas cartesianas y para partículas en  $\mathbb{R}^n$ , como  $Dc'/dt = 0$  que sirve en cualquier sistema de coordenadas y para partículas ligadas a variedades.

La definición de la derivada covariante se puede extender a otros tensores que no son campos de vectores. Lo más inmediato es la extensión a uno formas por dualidad: Si  $\omega$  es un campo de uno formas fijado, para cualquier campo de vectores  $V$ , se tiene que  $\omega(V) = \omega_i V^i$  es una función escalar. Derivando

$$f = \omega_i V^i \Rightarrow f_{,j} = \omega_{i,j} V^i + \omega_i V_{,j}^i$$

que puede ser escrito por la definición de derivada covariante como

$$f_{,j} - \omega_i V_{,j}^i = (\omega_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k) V^i.$$

El primer miembro se transforma como un tensor de tipo  $(0, 1)$ , así que el término entre paréntesis debe transformarse como un tensor de tipo  $(0, 2)$ . Como mide la variación de  $\omega$ , es lógico tomar como definición de derivada covariante de  $\omega$  el tensor de componentes

$$\omega_{i,j} = \omega_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k.$$

Podríamos repetir el mismo razonamiento para tensores de tipos superiores aplicándolos a vectores y uno formas hasta obtener un escalar. La conclusión es siempre la misma y

es que cada índice contravariante (superíndice) contribuye con un símbolo de Christoffel positivo y cada índice covariante (subíndice) con uno negativo. Por ejemplo, para tensores de tipos  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, 0)$  serían

$$T_{ij;k} = T_{ij,k} - \Gamma_{jk}^l T_{il} - \Gamma_{ik}^l T_{lj}, \quad T_{j;k}^i = T_{j,k}^i - \Gamma_{jk}^l T_l^i + \Gamma_{lk}^i T_j^l \quad \text{y} \quad T_{;k}^{ij} = T_{,k}^{ij} + \Gamma_{lk}^j T^{il} + \Gamma_{lk}^i T^{lj}.$$

Considerando, según lo que habíamos convenido, las funciones como tensores de tipo  $(0, 0)$ , por analogía, su derivada covariante no debe involucrar ningún símbolo de Christoffel y por tanto coincide con la derivada usual.

Con esta definición general se verifica la regla del producto

$$\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T.$$

Esto es mucho más sencillo de lo que pudiera parecer a simple vista: el producto tensorial lo único que hace es añadir índices y basta hacer la derivada correspondiente a los primeros y añadirle la correspondiente a los otros.

Igualando un subíndice y un superíndice, se tiene que esta regla del producto también se satisface si hay contracciones en vez de productos tensoriales. Por ejemplo

$$(S_j^i T_k^j)_{;l} = S_{j;l}^i T_k^j + S_j^i T_{k;l}^j, \quad (S^i T_i)_l = (S^i T_i)_{;l} = S_{;l}^i T_i + S^i T_{i;l}, \quad \text{etc.}$$

Para practicar con estas notaciones demostraremos lo que a veces se llama *lema de Ricci*.

**Lema 3.3.2** *Se verifica  $\delta_{j;k}^i = g_{ij;k} = g_{;k}^{ij} = 0$ .*

*Demostración:* Según la definición

$$\delta_{j;k}^i = \delta_{j,k}^i - \Gamma_{jk}^l \delta_l^i + \Gamma_{lk}^i \delta_j^l = 0 - \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^i = 0.$$

Por la definición y (3.4)

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma_{jk}^l g_{il} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} = 0.$$

Se podría demostrar de forma parecida, aunque más elaborada, que  $g_{;k}^{ij} = 0$  pero es más sencillo relacionar los tres tensores. Por la regla del producto

$$\delta_l^i = g^{ij} g_{jl} \Rightarrow \delta_{l;k}^i = g_{;k}^{ij} g_{jl} + g^{ij} g_{jl;k} \Rightarrow 0 = g_{;k}^{ij} g_{jl}.$$

Como  $g_{jl}$  es no singular, se deduce  $g_{;k}^{ij} = 0$ .  $\square$

La primera igualdad del lema es muy intuitiva. A fin de cuentas  $\delta_j^i$  es algo así como el “tensor identidad”. La segunda (y por tanto la tercera) lo parece menos pero no es más que el trasunto de la sencilla fórmula en  $\mathbb{R}^n$ :  $(\vec{v} \cdot \vec{w})_{,k} = \vec{v}_{,k} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}_{,k}$  y la generalización de esta propiedad estaba implícita en (3.4), una de las propiedades

de las que inferimos la definición de derivada covariante. Que las componentes  $g_{ij}$  del tensor métrico se comporten como constantes a la hora de derivar y que el tensor de componentes  $g^{ij}$  tenga la misma propiedad, permite por contracción subir y bajar índices a voluntad sin particulares consecuencias en el cálculo tensorial. Por ejemplo podemos transformar un campo de vectorial, un tensor de tipo  $(1, 0)$ , en otro de tipo  $(0, 1)$ , es decir un campo de uno formas con:

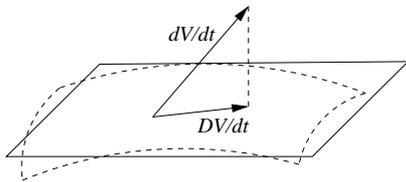
$$V = V^i \partial_i \quad \mapsto \quad \omega = g_{ij} V^j dx^i.$$

De la misma forma se puede proceder en sentido contrario. Por ejemplo, dada una función se puede asignar a la una forma que corresponde a su gradiente:  $\omega = f_{,i} dx^i$  el campo de vectorial  $V = g^{ij} f_{,j} \partial_i$ , el verdadero vector. Se pueden combinar subidas y bajadas de índices cuando tenemos tensores de tipo mayor.

Como caso particular de estas ideas se deduce que si  $G$  es una métrica y  $V$  y  $W$  son campos de vectores definidos a lo largo de una curva

$$\frac{d}{dt} G(V, W) = G\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + G\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$$

y cuando  $V$  y  $W$  son el campo de vectores tangentes a una geodésica se deduce inmediatamente el Lema 3.1.3.



Para conciliar el significado de la derivada covariante a lo largo de una curva con el que quizá se mencionó en Geometría II y darle una interpretación más intuitiva, terminamos con unos comentarios sobre el caso de una hipersuperficie  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  (esto es una subvariedad  $n$ -dimensional con la métrica usual). Dada una curva parametrizada en  $M$  considerada como función  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  y un campo vectorial definido en su imagen  $V(c(t)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , aunque los  $V(c(t))$  sean tangentes a  $M$  su derivada coordenada a coordenada no lo es necesariamente, por ello consideramos su proyección ortogonal sobre  $T_{c(t)}(M)$  visto como hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Este proceso de derivar y proyectar tiene las propiedades (3.4) y (3.5), la segunda por la igualdad de las parciales cruzadas y la primera porque  $(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f}' \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \vec{g}'$  sigue siendo cierto si sumamos a  $\vec{f}'$  y a  $\vec{g}'$  vectores ortogonales a  $\vec{g}$  y  $\vec{f}$ . Como ambas propiedades determinan la definición de la derivada covariante, entonces  $DV/dt$  puede interpretarse como la proyección ortogonal de la derivada del campo de vectores (evaluado en la curva) sobre el hiperplano tangente y las geodésicas son las curvas tales que la derivada de sus vectores tangentes (la aceleración) es siempre un vector normal (la partícula no sufre una fuerza real si está ligada a la subvariedad). Esto permite identificar sin cálculos todas las geodésicas en una esfera y alguna de ellas en un toro usual.

### Ejercicios de la sección 3

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si los coeficientes del tensor métrico son constantes, ¿a qué es igual la derivada covariante?

ii) Si multiplicamos la métrica por una constante no nula, ¿qué ocurre con la derivada covariante?

iii) Si  $V$  es un campo de vectores y  $f$  una función escalar, ¿cuál es la derivada covariante de  $fV$ ?

iv) Si  $\nabla V = \nabla W = 0$ , ¿es  $G(V, W)$  constante?

2) Si  $C$  es la matriz  $(V_j^i)$  con  $V$  un campo en  $\mathbb{R}^2$  (con la métrica usual) cuando se usan coordenadas cartesianas y  $P$  es la matriz correspondiente cuando se emplean coordenadas polares, demostrar la relación:

$$J^{-1}CJ = P \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

3) Sea el campo en  $\mathbb{R}^2$  que en coordenadas polares viene dado por  $V = \partial/\partial\theta$ . Calcular su derivada covariante y comprobar la relación del problema anterior.

4) Supongamos que se tiene una métrica en  $\mathbb{R}$  (con la carta trivial) tal que  $\nabla_1 V = 2008$  para  $V = \partial_1$ .

a) Demostrar que el transporte paralelo de  $V_0 = \partial_1$  desde  $x = 0$  a  $x = t$  a lo largo de la recta que une estos puntos es  $e^{-2008t}\partial_1$ . En particular, la derivada covariante de  $V = e^{-2008x}\partial_1$  es nula.

b) Hallar todas las posibles métricas en  $\mathbb{R}$  para las que la derivada covariante responde a esta fórmula.

5) Sea  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  con la métrica  $G = y^{-2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ . Calcular la derivada covariante de  $V = f(y)\partial/\partial x$ . Hallar  $f$  para que la derivada covariante a lo largo de la semirrecta  $x = 0, y = t > 1$  sea nula.

6) Comprobar la relación  $\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T$  cuando  $S$  y  $T$  son campos vectoriales o de uno formas.

7) Probar la fórmula  $\frac{d}{dt}G(V, W) = G\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + G\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$ .

8) Consideremos una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  (con la métrica inducida). Probar que si  $V(p)$  se transporta paralelamente en  $V(q)$  y  $W(p)$  se transporta paralelamente en  $W(q)$  a lo largo de cierta curva conectando  $p$  y  $q$ , entonces interpretando  $V$  y  $W$  como vectores en  $\mathbb{R}^n$  se cumple  $\|V(p)\| = \|V(q)\|$ ,  $\|W(p)\| = \|W(q)\|$  y  $\angle(V(p), W(p)) = \angle(V(q), W(q))$  donde  $\angle$  indica el ángulo.

9) Sean dos superficies  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  con la métrica inducida que son tangentes a lo largo de una curva. Probar que el transporte paralelo por ella es igual tanto si se lleva a cabo por  $S_1$  como si se lleva a cabo por  $S_2$ .



# Capítulo 4

## Curvatura y gravedad

### 4.1. El tensor de curvatura

El objetivo de esta sección es dar una definición intrínseca del concepto de curvatura en una variedad semiriemanniana, esto quiere decir una definición que no dependa del espacio ambiente en que pueda estar inmersa la variedad sino solamente de la forma en que medimos: la métrica. Antes de ello daremos un repaso de cierta extensión a las curvaturas estudiadas en cursos anteriores. El lector impaciente puede saltarse todos estos párrafos y pasar directamente a la definición del tensor de Riemann.

En Geometría II se definió la curvatura en cada punto de una curva en  $\mathbb{R}^2$  como el módulo de la derivada segunda de una parametrización por longitud de arco, es decir, de aquella parametrización cuya derivada tiene módulo uno o equivalentemente tal que la métrica inducida es  $dt \otimes dt$ . Esta definición es invariante por movimientos del plano pero no es intrínseca porque cualquier porción curvada de hilo inextensible se transforma en un segmento (no curvado) tirando de los extremos. Ningún gusanito unidimensional que viviera dentro del hilo notaría cambios en las distancias después de esta transformación que anula la curvatura.



Si  $c(t) = (x(t), y(t))$  es una parametrización por longitud de arco entonces  $c' = \vec{t}$  es el vector tangente unitario,  $0 = (c' \cdot c')' = 2c'' \cdot c'$  y se tiene  $c''(t) = \kappa \vec{n}$  con  $\kappa$  la curvatura y  $\vec{n}$  el vector normal unitario. De aquí se deduce que la curvatura con un signo adecuado es la variación del ángulo  $\theta$  del vector tangente respecto a los ejes cartesianos porque

$$\theta' = \left( \arctan \frac{y'}{x'} \right)' = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{\kappa \|\vec{t} \times \vec{n}\|}{\|\vec{t}\|^2} = \kappa.$$

Entonces la integral de la curvatura es el incremento total del ángulo del vector tangente al ir de un extremo al otro. En el caso de una curva compacta,  $C \subset \mathbb{R}^2$ , la integral es el número total de vueltas de la tangente y como la única variedad compacta unidimensional es  $S^1$ , salvo difeomorfismos, se cumple con la orientación usual

$$(4.1) \quad \int_C \kappa \eta_C = 2\pi$$

donde  $\eta_C$  es el elemento de volumen,  $\eta_C = dt$  si la parametrización es por longitud de arco. Podemos ver esto como un resultado de topología diferencial: si deformamos la curvatura aquí y allá en  $S^1$ , mágicamente la integral compensa esas deformaciones.

Sea  $f : C \rightarrow S^1$  es la aplicación que a cada punto de la curva le asigna su vector tangente unitario. Empleando el elemento de volumen en  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  dado por  $\eta_{S^1} = d\theta$  y la relación  $\theta = \arctan(y'/x')$  para una determinación adecuada del arco tangente, se tiene  $f^*\eta_{S^1} = (y''x' - x''y')dt = \kappa\eta_C$ . Así pues también podemos entender la curvatura como la función por la que hay que multiplicar el elemento de volumen  $\eta_C$  en  $C$  para obtener el *pullback* del elemento de volumen en la circunferencia, simbólicamente

$$\kappa = \frac{f^*\eta_{S^1}}{\eta_C}.$$

Por supuesto esta representación es libre de coordenadas pero sigue sin ser intrínseca.

Incrementando en uno la dimensión las cosas se complican deliciosamente y existe una bella teoría fruto del ingenio de C.F. Gauss. Si tenemos una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  hay todo un plano de vectores tangentes en cada punto que dan innumerables direcciones para calcular derivadas segundas. Podemos salvar todavía parte de la analogía notando que en las curvas en  $\mathbb{R}^2$  es lo mismo la variación del ángulo de las tangentes que el de las normales. En  $S$  consideramos la *aplicación de Gauss*  $f : S \rightarrow S^2$  que asigna a cada punto su normal y definimos la *curvatura de Gauss* como

$$K = \frac{f^*\eta_{S^2}}{\eta_S} \quad \text{donde } \eta_S = \text{elemento de volumen en } S.$$

Si uno volviera a los apuntes de Geometría II podría interpretar esto como el cociente que aparecía allí de los determinantes de la segunda y primera formas fundamentales. Con un poco de trabajo se deduce de esto la definición alternativa  $K(p) = k_1(p)k_2(p)$  donde  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$  son las curvaturas máxima y mínima en  $p$  entre todas las curvas obtenidas al cortar  $S$  con un plano que pasa por  $p$  y que es perpendicular al plano tangente en dicho punto.

La aplicación de Gauss permite asignar a cada porción de superficie  $T$  un ángulo sólido en  $S^2$  (se dice que su área es la medida del ángulo de  $T$  en *estereorradianes*) y entonces  $K$  es de nuevo una variación del ángulo generalizada. El teorema de Stokes

permite relacionar  $\int_T K \eta_S$  con una integral sobre  $\partial T$  que resulta ser (salvo una cantidad constante) la integral de la derivada covariante de los vectores tangentes. Si se toma como región  $T$  un triángulo geodésico, esto es un triángulo curvo cuyos lados son geodésicas, la derivada covariante es cero pero hay que pagar con ciertos términos debido a la no diferenciabilidad en los vértices. El resultado escrito en forma elegante es el famoso *teorema de Gauss-Bonnet* probado por Gauss en 1827:

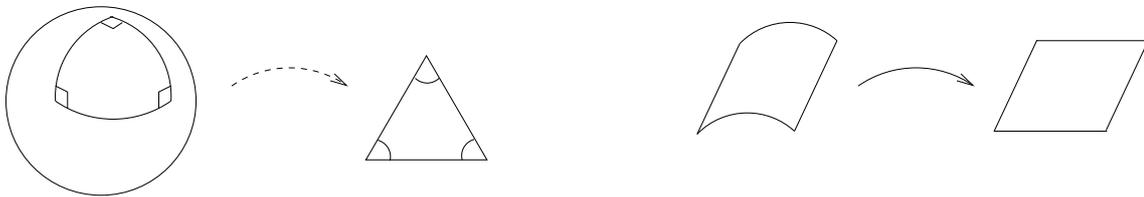
$$(4.2) \quad \int_T K \eta_S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

para cualquier triángulo geodésico de ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Por otro lado (4.1) se puede generalizar a

$$\int_S K \eta_S = 2\pi(2 - \dim H^1(S))$$

para una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  compacta con la orientación usual. Por ejemplo, si  $S$  es difeomorfa a una esfera, la integral de la curvatura es  $4\pi$  y si es difeomorfa a un toro, la integral es cero.

Cuando Gauss obtuvo (4.2) se percató de que si  $T$  es un pequeño triángulo geodésico alrededor de un punto  $p$  se sigue  $K(p) \approx (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A(T)$  donde  $A(T)$  indica el área de  $T$ , pero un ser bidimensional que viviera dentro de  $S$  sin saber nada acerca de normales ni del mundo exterior de  $\mathbb{R}^3$  podría hacer el cálculo de  $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A(T)$ . Justificando el paso al límite se concluye que, a pesar de la definición original, la curvatura de Gauss para superficies de  $\mathbb{R}^3$  sólo depende de la métrica, es intrínseca. Esto es lo que se llama *Teorema Egregio* (*Theorema Egregium* en el original de Gauss). La fórmula para  $K$  en función de los coeficientes de la métrica es un poco complicada (tiene catorce sumandos, véase p.109 [Sp1t2]) y anticipa que en más dimensiones se podrán hacer pocos cálculos explícitos generales. El Teorema Egregio por ejemplo implica que una porción de esfera ( $K = R^{-2}$ ) no se puede desarrollar sobre un plano ( $K = 0$ ), es decir, aplastarla sin modificar distancias.



Esto también es consecuencia del hecho más elemental de que la suma de los ángulos de un triángulo geodésico en la esfera es mayor que  $\pi$  y en el plano es exactamente  $\pi$ . Por otro, lado una porción de cilindro sí es desarrollable en el plano y con cualquiera de las definiciones anteriores se tiene  $K = 0$ .

La generalización a más dimensiones no es inmediata porque ni siquiera está clara la definición de la curvatura de Gauss para variedades bidimensionales que no estén inmersas en  $\mathbb{R}^3$ . El teorema de Gauss-Bonnet en una forma un poco más general apuntada anteriormente permite relacionar  $\int_T K d\eta_S$  con la variación de un vector después de aplicarle un transporte paralelo dando toda la vuelta a  $\partial T$ . En más dimensiones podríamos considerar el paralelogramo infinitesimal  $T$  dado por incrementos en dos funciones coordenadas (preferible a un triángulo geodésico sólo por razones técnicas), tomar un vector y hallar el vector que da la razón de la variación de  $V$  tras el transporte paralelo y el área de  $T$ , el análogo de  $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A(T)$ , para deducir el Teorema Egregio. De esta forma la curvatura es una máquina a la que hay que alimentar con la dos direcciones que determinan un paralelogramo y la que determina el vector, dando lugar a otro vector que se podría pasar a un número con un elemento del dual, lo que sugiere un tensor de tipo  $(1, 3)$ . Es posible proceder de este modo y llegar bastante rápido al “formulón” (4.3) de más adelante (véase §2.3 [Ch]) a cambio de usar argumentos cantidades arbitrariamente pequeñas y aproximaciones euclídeas. Éste es un precio demasiado alto en los libros para matemáticos que suelen dejar aparte esta línea e introducen sintéticamente un tensor que mide la diferencia entre las derivadas covariantes cruzadas. En realidad la idea es la misma pues el transporte paralelo está ligado a la derivación covariante que a su vez es la única manera sensata de calcular incrementos, de derivar, en una variedad.

**Definición:** Se llama *tensor de Riemann* o *tensor de curvatura* al tensor de tipo  $(1, 3)$  de componentes  $R^i_{jkl}$  tal que para cada campo de vectores  $V$  se verifica

$$V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl} V^j$$

donde  $V^i_{;lk}$  indica la derivada covariante primero con respecto a  $l$  y después con respecto a  $k$ .

El carácter tensorial del tensor de Riemann se deduce de la tensorialidad de la derivada covariante. Con un cálculo rutinario se llega a una fea fórmula en términos de los símbolos de Christoffel

$$(4.3) \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{jk}.$$

Ejemplo:  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual tiene tensor de Riemann nulo. Esto se deduce de la definición porque la derivada covariante coincide con la usual, o directamente de (4.3) porque  $\Gamma^i_{jk} = 0$ .

El ejemplo anterior tiene un recíproco local: si en una variedad riemanniana el tensor de Riemann es nulo entonces se pueden encontrar un difeomorfismo en un entorno de cada punto que transforma este entorno en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual. Todavía más, B. Riemann introdujo explícitamente en 1862 su tensor justamente para resolver el

problema de saber qué métricas se podían transformar localmente en la métrica usual<sup>1</sup>. Dicho sea de paso, este recíproco también se aplica a variedades semiriemannianas si se permite cambiar signos en la métrica usual.

El cálculo de la curvatura se revela como una tarea ardua aunque sólo sea por el número de componentes que en dimensiones 2, 3 y 4 es respectivamente 16, 81 y 256. Afortunadamente hay algunas simetrías que relacionan las componentes. Además en los casos de dimensión 2 y 3 y las aplicaciones en dimensión 4 que aparecen en relatividad general hay contracciones del tensor de Riemann que contienen toda la información necesaria. Al contraer un tensor de tipo (1, 3) se obtiene un tensor dos veces covariante. Subiendo uno de los índices con  $g^{ij}$  se puede efectuar una segunda contracción para llegar a una función. En principio hay diferentes maneras de elegir los índices para efectuar las contracciones pero debido a las simetrías, todas son esencialmente iguales o nulas.

**Definición:** Se llama *tensor de Ricci* al tensor de tipo (0, 2) cuyas componentes son

$$R_{ij} = R_{ikj}^k$$

y *tensor de Ricci contravariante* al tensor de tipo (2, 0) de componentes  $R^{ij} = g^{ia}g^{jb}R_{ab}$ . Además, se llama *curvatura escalar* a la función  $R = g^{ij}R_{ij}$ .

La prueba de todas las simetrías del tensor de Riemann a partir de (4.3) sería computacionalmente muy gravosa. Lo más cómodo es emplear sistemas especiales de coordenadas en los que haya una simplificación considerable. El siguiente resultado es una posibilidad que procede del propio Riemann.

**Lema 4.1.1** *Sea  $M$  una variedad semiriemanniana y sea  $p$  uno de sus puntos. Existe una carta tal que las derivadas parciales primeras de las componentes del tensor métrico se anulan en  $p$ .*

*Demostración:* Dada una carta  $(\mathcal{U}(p), \phi = (x^1, \dots, x^m))$ , sea  $\phi(p) = (p_1, \dots, p_n)$  y consideremos una nueva carta  $(\mathcal{U}', \phi' = (x'^1, \dots, x'^m))$ ,  $p \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}(p)$ , con  $\phi'$  definida por el cambio

$$x'^i = x^i - p^i + \frac{1}{2}(x^r - p^r)(x^s - p^s)\Gamma_{rs}^i.$$

Derivando en ambos miembros se tiene

$$(4.4) \quad \left. \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \right|_p = \delta_i^a \quad \left. \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^k \partial x^i} \right|_p = \Gamma_{ki}^a(p)$$

<sup>1</sup>En realidad Riemann ya había anticipado el problema en su famosísima lección “*Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría*” en 1854. En ella expuso muchas y muy importantes ideas pero apenas empleó ninguna fórmula para conservar el tono expositivo. Una traducción del original e información histórica al respecto puede encontrarse en el capítulo 4 de [Sp1t2].

y el teorema de la función inversa asegura que el cambio de carta es legítimo en un entorno pequeño.

Sean  $g'_{ij}$  las componentes del tensor métrico usando  $(\mathcal{U}', \phi')$ . Por la tensorialidad

$$g_{ij} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} g'_{ab}.$$

De donde se deduce, gracias a (4.4),  $g_{ij}(p) = g'_{ij}(p)$ . Derivando, también se obtiene

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} g'_{ab} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x'^b}{\partial x^k \partial x^j} g'_{ab} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} \frac{\partial g'_{ab}}{\partial x'^l}.$$

Sustituyendo en el punto  $p$  y usando (4.4), se tiene

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_p = \Gamma_{ki}^a(p) g_{aj}(p) + \Gamma_{kj}^b(p) g_{ib}(p) + \left. \frac{\partial g'_{ij}}{\partial x'^k} \right|_p$$

y por las propiedades de los símbolos de Christoffel (Lema 3.3.1) se deduce que el último sumando debe ser nulo.  $\square$

Las simetrías del tensor de Riemann son más claras si se baja el único índice contra-variante para obtener un tensor de tipo  $(0, 4)$ .

**Proposición 4.1.2** *Sea  $R_{ijkl} = g_{in} R_{jkl}^n$  entonces se cumplen las identidades*

$$a) R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \quad b) R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0.$$

*Demostración:* Por el Lema 4.1.1 y (4.3) para cada punto  $p \in M$  existe una carta tal que

$$R_{jkl}^i(p) = \Gamma_{jl,k}^i(p) - \Gamma_{jk,l}^i(p)$$

y también en este punto  $p$ , que omitiremos para mayor brevedad, se cumple

$$g_{in} \Gamma_{jl,k}^n = \frac{1}{2} g_{in} g^{nm} (g_{jm,lk} + g_{ml,jk} - g_{jl,mk}) = \frac{1}{2} (g_{ji,lk} + g_{il,jk} - g_{jl,ik}).$$

Intercambiando  $l$  y  $k$  y restando, se tiene por el lema anterior

$$R_{ijkl} = g_{in} R_{jkl}^n = \frac{1}{2} (g_{il,jk} - g_{jl,ik} - g_{ik,jl} + g_{jk,il})$$

de donde se deduce inmediatamente  $a)$  y  $b)$  en  $p$  con esta carta. Por otra parte, si las componentes de dos tensores coinciden usando una carta, también coinciden usando cualquier otra. Así que las identidades  $a)$  y  $b)$  tienen validez general.  $\square$

Ejemplo: En dimensión 2 las 16 componentes del tensor de Riemann se reducen a sólo una independiente. Si en  $i, j, k, l$  hay más de dos unos o doses se tiene  $R_{ijkl} = 0$

por la antisimetría  $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$ . Entonces la única posibilidad es que haya exactamente dos unos y dos doses y todas las componentes no nulas son  $R_{1212}$  o su negativo.

En el caso de superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , Gauss expresó la curvatura con una sola cantidad así que debe haber una relación entre  $R_{1212}$  y la curvatura de Gauss. No puede ser de igualdad porque  $R_{1212}$  es una componente de un tensor de tipo  $(0, 4)$  y la curvatura de Gauss  $K$  es una función. La relación exacta es

$$(4.5) \quad R_{1212} = (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)K.$$

Si llamamos  $\mathcal{R}$  al tensor de Riemann en su forma  $(0, 4)$  y  $\eta_S$  al elemento de volumen, se tiene la fórmula  $\mathcal{R} = K\eta_S \otimes \eta_S$ .

**Ejemplo:** Deduzcamos la relación entre la curvatura escalar y la curvatura de Gauss para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ . Como ambas son funciones, tensores de tipo  $(0, 0)$ , cabe esperar una relación lineal entre ellas. Por definición se tiene  $R_{jl} = g^{ik}R_{ijkl}$ . De aquí, usando las simetrías,  $R_{11} = g^{22}R_{1212}$ ,  $R_{12} = R_{21} = -g^{12}R_{1212}$ ,  $R_{22} = g^{11}R_{1212}$ . Entonces  $R = g^{ij}R_{ij}$  y (4.5) implican  $R = 2(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2)(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)K$ . El producto de ambos paréntesis vale uno porque es el determinante de una matriz por el de su inversa, por tanto la curvatura escalar es el doble de la curvatura de Gauss.

Se puede probar que en una variedad semiriemannian general no hay nuevas relaciones lineales entre las componentes  $R_{ijkl}$  que no se deduzcan de la Proposición 4.1.2, sin embargo hay algunas otras entre sus derivadas covariantes. Enunciamos el resultado esta vez en términos de  $R_{jkl}^i$  aunque para  $R_{ijkl}$  sería idéntico.

**Proposición 4.1.3 (Identidad de Bianchi)** Sean  $R_{jkl}^i$  las componentes del tensor de Riemann, entonces

$$R_{jkl;m}^i + R_{jmk;l}^i + R_{jlm;k}^i = 0.$$

*Demostración:* Derivando la definición del tensor de curvatura, con la carta del Lema 4.1.1 se cumple en un punto  $p$

$$R_{jkl,m}^i(p) = \Gamma_{jl,km}^i(p) - \Gamma_{jk,lm}^i(p).$$

Como los símbolos de Christoffel se anulan en  $p$ , por la definición de derivada covariante, se tiene que  $R_{jkl;m}^i = R_{jkl,m}^i$  (siempre en dicho punto). Tras esta observación, sumando la fórmula anterior permutando cíclicamente  $l, k$  y  $m$  se obtiene el resultado deseado.  $\square$

El tensor de Ricci tiene una simetría sencilla heredada de las del tensor de Riemann.

**Proposición 4.1.4** Se cumple

$$a) R_{ij} = R_{ji}, \quad b) R^{ij} = R^{ji}, \quad c) R_{;j}^{ij} = \frac{1}{2}g^{ij}R_{,j}.$$

*Demostración:* Si en la Proposición 4.1.2 b) multiplicamos por  $g^{ki}$  (por supuesto respetando el convenio de sumación) se obtiene

$$R_{jkl}^k + g^{ki} R_{iljk} + g^{ki} R_{iklj} = 0.$$

Por otra parte, la antisimetría en  $j$  y  $k$  de  $R_{iklj}$ , por la Proposición 4.1.2 a), muestra que el último sumando se anula y se puede escribir

$$0 = R_{jkl}^k - g^{ki} R_{ilkj} = R_{jkl}^k - R_{lkj}^k = R_{jl} - R_{lj}.$$

Lo cual prueba a) y se sigue b) inmediatamente. Para probar c) partimos de la identidad de Bianchi contrayendo en  $i$  y  $k$ .

$$R_{jkl;m}^k + R_{jmk;l}^k + R_{jlm;k}^k = 0.$$

El primer sumando es  $R_{jl;m}$  y el segundo, después de usar la antisimetría  $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$  es  $-R_{jm;l}$ . Multiplicando por  $g^{jl}g^{im}$  (nótese que multiplicar por estos objetos conmuta con la derivación covariante por el Lema 3.3.2), se tiene

$$g^{im} R_{,m} - R_{,l}^{il} + g^{jl} g^{im} R_{jlm;k}^k = 0.$$

El último término es

$$g^{jl} g^{im} g^{kn} R_{n,jlm;k} = g^{jl} g^{im} g^{kn} R_{lmn;j;k} = g^{im} g^{kn} R_{mn;j;k}^j = -g^{im} g^{kn} R_{mn;k} = -R_{,k}^{ik}$$

y se obtiene la fórmula deseada.  $\square$

Pese a las simetrías el cálculo de las componentes del tensor de Riemann es bastante trabajoso. Por ejemplo, en dimensión 4 habría que aplicar (4.3) una vez por cada una de las 20 componentes independientes. Teniendo en cuenta que hay 40 símbolos de Christoffel descontando las simetrías, incluso casos especiales en los que la mayor parte de ellos son nulos requerirán un esfuerzo considerable. Una de las utilidades de la teoría de formas diferenciales creada por Cartan es que permite una interpretación del tensor de curvatura libre de coordenadas como cierta matriz de dos formas (véase el capítulo 7 de [Sp1t2]). Uno de los subproductos de ello es un método para calcular las componentes del tensor de curvatura cuando la métrica es diagonal ( $g_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ) o en general si la métrica se puede escribir como  $\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 + \dots + \theta^n \otimes \theta^n$  con  $\theta^i$  uno formas sencillas (véase en [GoJ] el caso de superficies). No cubriremos aquí este interesante tema. En su lugar, terminaremos estableciendo una simplificación en el cálculo del tensor de Ricci. Para ello probaremos una identidad para cierta suma de símbolos de Christoffel

**Lema 4.1.5** *En cada carta se cumple la identidad*

$$\Gamma_{ik}^k = (\log \sqrt{|g|})_{,i}$$

donde  $g$  es el determinante de la matriz de componentes de la métrica.

*Demostración:* Consideramos sólo el caso  $g > 0$ , el otro es completamente similar.

Sea  $\vec{v}_i$  el vector cuya componente  $j$ -ésima es  $g_{ij}$ , entonces al ser el determinante una función multilineal

$$g_{,i} = \sum_{k=1}^n \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k,i}, \dots, \vec{v}_n).$$

Desarrollando el determinante por la  $k$ -ésima columna se tiene  $g_{,i} = g_{jk,i} G^{jk}$  con  $G^{jk}$  el cofactor del elemento  $g_{jk}$  que por álgebra lineal elemental es  $gg^{kj}$ . De aquí, por la simetría de  $g^{kj}$ ,

$$g_{,i} = gg^{kj} g_{jk,i} = gg^{kj} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) = 2g\Gamma_{ik}^k$$

que equivale al enunciado.  $\square$

**Proposición 4.1.6** *Si  $g$  es el determinante de la matriz de componentes de la métrica, se cumple*

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \Gamma_{ij}^k)_{,k} - (\log \sqrt{|g|})_{,ij} - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l.$$

*Demostración:* Utilizando el Lema 4.1.5 se sigue

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \Gamma_{ij}^k)_{,k} = \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij,k}^k \quad \text{y} \quad (\log \sqrt{|g|})_{,ij} = \Gamma_{ik,j}^k.$$

Es decir, la fórmula del enunciado equivale a

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{kl}^l \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l$$

y esto se deduce de (4.3) y la definición  $R_{ij} = R_{ikj}^k$ .  $\square$

**Ejemplo:** Calculemos el tensor de Ricci de la superficie de una esfera de radio  $a$  con la métrica usual que en coordenadas esféricas es  $a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ . Los símbolos de Christoffel no nulos ya calculados en un ejemplo anterior (el radio  $a$  no influye) son  $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$  y  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos \theta / \sin \theta$  y se cumple  $g = a^4 \sin^2 \theta$ . Por el resultado anterior

$$R_{11} = -(\log \sin \theta)_{,11} - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = 1, \quad R_{12} = R_{21} = 0,$$

$$R_{22} = -\frac{1}{\sin \theta} (\sin^2 \theta \cos \theta)_{,1} + 2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta.$$

La curvatura escalar es  $R = g^{ij} R_{ij} = 2a^{-2}$ . Como debe ser el doble de la curvatura de Gauss, se tiene  $K = a^{-2}$  en concordancia con lo visto en cursos anteriores. De (4.5) se sigue  $R_{1212} = a^2 \sin^2 \theta$  y empleando la Proposición 4.1.2 se deducen todas las componentes del tensor de Riemann.

## Ejercicios de la sección 1

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Por qué un cilindro tiene curvatura de Gauss nula cuando es obvio que está curvado?  
 ii) ¿Cuáles son las componentes del tensor de Riemann para  $\mathbb{R}^2$  si usamos coordenadas polares?

iii) ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento? Siempre se puede encontrar una carta tal que los símbolos de Christoffel se anulen en un punto, por tanto el tensor de curvatura será nulo en dicho punto. Pero si se anula usando una carta se anula usando cualquiera. Repitiendo el argumento en cada punto se deduce que el tensor de curvatura es siempre idénticamente nulo.

iv) ¿Por qué  $R^{ij} = R^{ji}$  se sigue de  $R_{ij} = R_{ji}$ ?

2) Demostrar que no es posible encontrar una carta de  $S^2$  (dotada de la métrica usual) de forma que  $\{\partial_1, \partial_2\}$  sea una base ortonormal de  $T_p(M)$  para todo  $p$  en un abierto. ¿Cuál debe ser el tensor de curvatura para la variedades riemannianas que tienen el análogo  $n$ -dimensional de esta propiedad?

3) En una variedad consideramos las métricas  $g_{ij}dx^i dx^j$  y  $\lambda g_{ij}dx^i dx^j$  donde  $\lambda$  es una constante.

a) Encontrar qué relación hay entre los tensores de Riemann correspondientes a ambas métricas.

b) Responder a la pregunta anterior para la curvatura escalar.

4) Demostrar que  $R^i_{ikl} = 0$  y que  $R^i_{jki} = -R_{jk}$ .

5) Hallar el tensor de Riemann en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  dotado con la métrica  $dx^2 + y^2 dy^2$  y explicar el resultado.

6) Hallar todas las componentes del tensor de Ricci para el semiplano de Poincaré  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  que tiene por métrica  $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ . *Indicación:* De ejercicios anteriores sabíamos que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son  $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = -y^{-1}$ .

7) Hallar la curvatura escalar en el ejercicio anterior y comprobar la relación de sus derivadas parciales con la derivada covariante del tensor de Ricci.

8) Comprobar que con la métrica  $B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ , se cumple la igualdad  $R_{1212} = rB'/(2B^2)$ .

9) Demostrar que para las métricas de la forma  $A(x, y)dx^2 + B(x, y)dy^2$  se tiene  $R_{12} = R_{21} = R^{12} = R^{21} = 0$ . *Indicación:* No es necesario calcular los símbolos de Christoffel, sólo usar las simetrías del tensor de Riemann.

## 4.2. Las ecuaciones de campo

En una sección anterior vimos que en relatividad general la gravedad se representa mediante una métrica en el espacio-tiempo sin embargo no dimos ningún indicio de por

qué la métrica de Schwarzschild correspondía a la gravedad en el exterior de una masa esférica estática y homogénea.

En la reformulación de gravitación de Newton por autores posteriores es fundamental la *ecuación de Poisson* para el potencial gravitatorio  $V$

$$(4.6) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi G\rho$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $\rho$  es la densidad de masa. Los conocedores de las ecuaciones en derivadas parciales sabrán que de aquí se puede deducir información tan importante como la fórmula clásica  $-Gm_1m_2/r^2$  o el principio de superposición, debido a la linealidad de (4.6).

Las *ecuaciones de campo* son el análogo de (4.6) en relatividad general y consisten en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, esta vez no lineales, que debe satisfacer una métrica para que el espacio-tiempo represente la gravedad en cierta situación física. Su aspecto concreto es:

$$(4.7) \quad \boxed{R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}}$$

donde  $T^{\alpha\beta}$  son las componentes de cierto tensor, llamado *tensor de energía-momento*, que indica en algún sentido la densidad de masa y energía, como antes,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $c$  es la velocidad de la luz. Es decir, el primer miembro es un tensor geométrico (a veces llamado *tensor de Einstein*) mientras que el segundo es un tensor físico<sup>2</sup>. Seguimos aquí un convenio común en relatividad general consistente en denotar con letras griegas los índices de los tensores en el espacio-tiempo que se suelen numerar de 0 a 3 correspondiendo el 0 a la variable temporal.

Fuera de una masa y en ausencia de cualquier tipo de energía radiante, por ejemplo en la situación física de la métrica de Schwarzschild, tendremos  $T^{\alpha\beta} = 0$  y se obtienen las llamadas *ecuaciones de campo en el vacío*

$$(4.8) \quad R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = 0.$$

Multiplicando por  $g_{\alpha\beta}$  se llega a  $R = 0$  y por tanto (4.8) equivale a la anulación del tensor de Ricci contravariante que bajando índices (multiplicando por  $g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$ ) se pasa a su forma dos veces covariante

$$(4.9) \quad R_{\alpha\beta} = 0.$$

---

<sup>2</sup>Einstein, ya anciano, dijo de las ecuaciones de campo que “son similares a un edificio una de cuyas alas [el primer miembro de la ecuación] es de fino mármol, mientras que la otra es madera de baja calidad [el segundo miembro]”. E. Schrödinger fue más allá relativizando la realidad física independiente de  $T^{\alpha\beta}$  afirmando que (4.7) es su definición al igual que en electrostática “la carga no causa que la divergencia del vector eléctrico no se anule sino que ella es la divergencia no nula”.

Incluso en la forma simplificada (4.9) la no linealidad de las ecuaciones de campo es un notable obstáculo matemático pues no hay una teoría general de ecuaciones en derivadas parciales no lineales y además en este caso la situación es formidablemente complicada porque en (4.9) hay, usando la simetría, diez ecuaciones para diez funciones incógnitas (las componentes de la métrica) con cuatro variables cada una. En lo que respecta a soluciones explícitas no triviales de relevancia física, la solución de Schwarzschild se descubrió en 1915 y hasta 1963 no se obtuvo la *métrica de Kerr* [Hu-To], la solución que físicamente corresponde a la gravedad ejercida por una masa esférica y homogénea que rota (por razones teóricas y observaciones astronómicas se cree que los agujeros negros reales están más cercanos a masas giratorias que a masas estáticas), y desde entonces no se ha hallado una solución de relevancia física comparable.

La “deducción” de las ecuaciones de campo, ya sean generales o en el vacío, que incluyen la mayoría de los textos de relatividad general (e incluso el propio Einstein) es en cierto modo engañosa, porque da la falsa impresión de que hay un razonamiento natural y sencillo que lleva indefectiblemente a las únicas ecuaciones posibles. Nada más lejos de la realidad, ya que a Einstein no sólo le llevó varios años obtener sus ecuaciones de campo, sino que antes de tener éxito publicó formas erróneas o incompletas de dichas ecuaciones (véase [Mi-Th-Wh] §17.7 y [Pa] Cap. IV). Aquí veremos la deducción matemáticamente bella y sólida a partir de primeros principios debida a D. Hilbert. Incomprensiblemente no se menciona en muchos libros de relatividad o no se atribuye a Hilbert, lo cual es especialmente notorio teniendo en cuenta que Hilbert publicó las ecuaciones de campo cinco días antes que el propio Einstein (véase [Pa] §14) y que sólo recientemente se ha conocido la prioridad de Einstein [Co-Re-St].

Los primeros principios en los que se basó Hilbert son los mismos principios mecánicos que utilizamos en el capítulo anterior para calcular geodésicas. Allí vimos que las trayectorias que unen dos puntos fijos y dan valores extremos de una suerte de “energía total” deben satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange. Está claro que cuesta trabajo curvar el espacio-tiempo: para desviar mucho las partículas de sus trayectorias naturales rectilíneas, necesitamos grandes masas y energías. Si lo imaginamos como una banda elástica no parece descabellado suponer que el espacio-tiempo elige su geometría de manera que la “curvatura total” sea mínima en cada región. Matemáticamente si  $B$  es una región del espacio-tiempo, digamos una bola 4-dimensional, entre todas las posibles métricas cuyas componentes y sus derivadas primeras están fijadas en  $\partial B$  (el análogo de los extremos fijos de las geodésicas) hay que buscar la que minimiza

$$(4.10) \quad I = \int_B R \Omega$$

con  $R$  la curvatura escalar y  $\Omega$  el elemento de volumen. Ésta es la idea genial de Hilbert, quien demostró que las ecuaciones de Euler-Lagrange para este problema son las ecua-

ciones de campo en el vacío (4.8). Además, si se añade a  $R$  en (4.10) un lagrangiano que corresponde a cierta situación física entonces se deducen las ecuaciones de campo generales (4.7). No trataremos este aspecto aquí (véase [Ch], [Mi-Th-Wh] §17.7 y [Ha-El]) y nos centraremos en el punto fundamental: cómo la minimización de (4.10) lleva a (4.8).

Siguiendo la misma idea que en la demostración en el caso de las geodésicas, si  $I = I(g_{00}, g_{01}, \dots, g_{33})$  alcanza un extremo para la métrica de componentes  $g_{\alpha\beta}$ , la función  $f(\epsilon) = I(g_{00} + \epsilon\eta_{00}, g_{01} + \epsilon\eta_{01}, \dots, g_{33} + \epsilon\eta_{33})$  debe cumplir  $f'(0) = 0$  cualesquiera que sean  $\eta_{00}, \dots, \eta_{33}$  funciones en el espacio-tiempo tales que ellas y sus derivadas parciales primeras se anulen en  $\partial B$ . Para aligerar la notación, si  $F$  depende de la métrica escribiremos

$$\delta F = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} F(g_{00} + \epsilon\eta_{00}, g_{01} + \epsilon\eta_{01}, \dots, g_{33} + \epsilon\eta_{33}).$$

En particular  $\delta g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ .

**Teorema 4.2.1 (Hilbert)** *Si  $I$  es como en (4.10) y para cierta métrica  $\delta I = 0$  entonces dicha métrica resuelve (4.8).*

Para “integrar por partes” en la prueba emplearemos un pariente cercano del teorema de la divergencia.

**Lema 4.2.2** *Sea  $M$  una variedad compacta y orientable con borde y sea  $V$  un campo de vectores en  $M$  que es nulo en  $\partial M$ , entonces  $\int_M V_{;i}^i \Omega = 0$  donde  $\Omega$  es el elemento de volumen.*

*Demostración:* Derivando

$$(\sqrt{|g|}V^i)_{;i} = \sqrt{|g|} \left( V_{;i}^i + \frac{g_{,i}}{2g} V^i \right)$$

y empleando el Lema 4.1.5 el término en el último paréntesis es  $V_{;i}^i + \Gamma_{ik}^k V^i = V_{;i}^i$ .

Consideremos la forma diferencial

$$\eta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sqrt{|g|} V^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Según lo anterior y la Proposición 3.1.5 se cumple  $d\eta = V_{;i}^i \Omega$  y por el teorema de Stokes  $\int_M V_{;i}^i \Omega = \int_{\partial M} i^* \eta = 0$ .  $\square$

*Demostración (del teorema):* De  $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$  y  $\Omega = \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ , se sigue

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_B \delta(R\sqrt{|g|}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int_B \delta(R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \int_B \left( (\delta R_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} + R_{\alpha\beta} \delta(g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}) \right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Más adelante probaremos que

$$(4.11) \quad g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - g^{\alpha\lambda} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta})_{;\lambda}$$

entonces el primer sumando no contribuye a la integral por el lema y se tiene

$$(4.12) \quad \delta I = \int_B R_{\alpha\beta} \delta (g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

Para cada  $\alpha$  y  $\nu$  la expresión  $g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu}$  es constante (cero o uno) así pues  $(\delta g^{\alpha\mu}) g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} = 0$  y de aquí  $\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \eta_{\mu\nu}$ . Además  $\partial g / \partial g_{\mu\nu}$  es el cofactor  $\mu\nu$ , esto es,  $g g^{\mu\nu}$ , de donde  $\delta \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} g g^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}$ . En definitiva

$$\delta (g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}) = (-g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}) \sqrt{|g|} \eta_{\mu\nu}.$$

sustituyendo en (4.12), como las funciones  $\eta_{\mu\nu}$  son arbitrarias,  $\delta I = 0$  equivale a (4.8).

Falta por probar la identidad (4.11). Por el Lema de Ricci (Lema 3.3.2) es consecuencia de

$$(4.13) \quad \delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} - (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu}.$$

Una forma de proceder, no muy económica, es utilizar la fórmula explícita de las definiciones de la derivada covariante y del tensor de Ricci. Más ilustrativo es comprobar que al cambiar de sistemas de coordenadas  $x^{\alpha} \mapsto x'^{\alpha}$  los símbolos de Christoffel cumplen

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

(esto requiere algunos cálculos que se pueden evitar usando la tensorialidad de la derivada covariante, véanse los comentarios tras su definición en el capítulo anterior) y como el último sumando no depende de la métrica,  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  se transforma como un tensor. Una vez que sabemos que el segundo miembro de (4.13) es un tensor, basta comprobar la identidad en alguna carta. En la del Lema 4.1.1 las derivadas covariantes son derivadas usuales en  $p$  y los símbolos de Christoffel son nulos en ese punto. Usando la definición concluimos  $(\delta R_{\mu\nu})(p) = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}(p) - (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu}(p)$ .  $\square$

Dedicaremos el resto de la sección a deducir la métrica de Schwarzschild (véase el capítulo anterior). No sólo queremos probar que es solución de las ecuaciones de campo en el vacío sino que vamos a probar que es la única si aceptamos ciertas hipótesis naturales.

Lo primero que haremos es fijarnos en un tipo especial de métricas con las que representaremos las simetrías que físicamente tiene el problema empleando nuestra intuición

geométrica en cuatro dimensiones. Es posible proceder de un modo más teórico (véase Box 32.3 en [Mi-Th-Wh]) pero tendríamos que introducir métodos que se salen fuera del curso. Los más incrédulos pueden tomar (4.14) como punto de partida.

La métrica usual en una superficie esférica (en  $\mathbb{R}^3$ ) de radio  $L$  es en coordenadas esféricas

$$L^2 d\theta^2 + L^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Consideremos una curva, en  $\mathbb{R}^3$  para fijar ideas, parametrizada por longitud de arco con parámetro  $u$  (y por tanto métrica inducida  $du^2$ ). Si pegamos las superficies esféricas anteriores ortogonalmente en los puntos de la curva y les asignamos un radio en función de  $u$ , la métrica natural obtenida será:

$$du^2 + (L(u))^2 d\theta^2 + (L(u))^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Partiendo de esta parte espacial con simetría esférica, que es lógica si la gravedad la ejerce una masa en el origen para la que todas las direcciones son indistinguibles, queremos completar la métrica hasta obtener la de un espacio-tiempo. Los términos a añadir serán de la forma

$$g_{00} dt^2 + 2g_{01} dt dr + 2g_{02} dt d\theta + 2g_{03} dt d\varphi$$

con  $g_{00} < 0$ . Si suponemos que el espacio-tiempo es estático (no varía con el tiempo) se tiene que los  $g_{\mu\nu}$  no dependen de  $t$ . Además  $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$  porque en otro caso la falta de invariancia con respecto a la inversión del tiempo  $t \mapsto -t$  indicaría algún tipo de “sentido de movimiento”. La componente  $g_{00}$  no puede depender más que de  $u$  porque en caso de aparecer  $\theta$  o  $\phi$  tendríamos comportamientos a lo largo del tiempo diferentes en cada dirección, y estamos suponiendo que todas las que parten del origen son indistinguibles. Así pues las métricas naturales que se ajustan al problema de la gravedad ejercida por una masa esférica homogénea y estática son de la forma

$$-f(u) dt^2 + du^2 + (L(u))^2 d\theta^2 + (L(u))^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Con el cambio de variable (de carta)  $r = cL(u)$  se llega a

$$(4.14) \quad -A(r/c) dt^2 + c^{-2} B(r/c) dr^2 + c^{-2} r^2 d\theta^2 + c^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

La razón para efectuar este cambio en la métrica es poder compararla con la de Minkowski. La atracción gravitatoria disminuye con la distancia y cuando  $r$  es grande debe ser despreciable así pues (4.14) se debe parecer en esas condiciones a la métrica de Minkowski que en esféricas es  $-dt^2 + c^{-2} dr^2 + c^{-2} r^2 d\theta^2 + c^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$  y surge la condición natural  $A(+\infty) = B(+\infty) = 1$  (en realidad no es estrictamente necesaria [Ch]).

Una vez que hemos fijado qué tipo de métrica buscamos estamos en condiciones de mostrar cómo deducir la métrica de Schwarzschild.

**Teorema 4.2.3** *Si una métrica de la forma (4.14) satisface (4.8) con  $A, B \in C^2(\mathbb{R}^+)$  tales que  $A(r), B(r) \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ , entonces es la métrica de Schwarzschild. Es decir,  $A(r) = 1/B(r) = 1 + K/r$  donde  $K$  es una constante.*

Por supuesto la velocidad de la luz  $c$  no tiene ningún significado matemático especial y para no arrastrarla a lo largo de todos los cálculos es conveniente efectuar el cambio  $r \mapsto cr$  que lleva (4.14) a

$$(4.15) \quad -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

La prueba del teorema está basada en el cálculo del tensor de Ricci para (4.15). Utilizando la relación entre curvatura y formas diferenciales, que no se ha tratado en este curso (véase [Sp1t2] y §14.6 en [Mi-Th-Wh]), la deducción del siguiente resultado sería mucho más breve.

**Proposición 4.2.4** *Las componentes  $R_{\mu\nu}$  del tensor de Ricci para la métrica (4.15) son*

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{A''}{2B} - \frac{(A')^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{rB}, & R_{11} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB}, \\ R_{22} &= \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1, & R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

y  $R_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ .

*Demostración:* En primer lugar veamos que los los símbolos de Christoffel no idénticamente nulos de (4.15) son

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r}{B} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Consideramos el lagrangiano  $\mathcal{L} = -At^2 + B\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$ . Las dos primeras ecuaciones de Euler-Lagrange, ( $\nu = 0, 1$ ) son

$$\ddot{t} + \frac{A'}{A} \dot{r} \dot{t} = 0, \quad \ddot{r} + \frac{A'}{2B} \dot{t}^2 - \frac{r}{B} \dot{\theta}^2 + \frac{B'}{2B} \dot{r}^2 - \frac{r}{B} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

y las otras dos ( $\nu = 1, 2$ )

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0.$$

Identificando coeficientes se tienen los símbolos de Christoffel anunciados.

Empleando  $g = -r^4 A(r) B(r) \sin^2 \theta$  y estos símbolos de Christoffel, la Proposición 4.1.6 permite verificar las fórmulas del enunciado para las componentes diagonales (véase [Ch] para un cálculo detallado).

Para calcular el resto de las componentes del tensor de Ricci utilizaremos la simetría de la métrica. Como (4.15) es invariante al cambiar  $t$  por  $-t$ ,  $R_{\mu\nu}$  también lo será (porque el tensor de Ricci sólo depende de la métrica). Así pues usando la tensorialidad bajo el cambio de coordenadas  $x^0 = -x^0$ ,  $x^i = x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; se obtiene para  $\nu \neq 0$

$$R_{0\nu} = R_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^0} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = R_{0\nu}(-1) \cdot 1 \Rightarrow R_{0\nu} = 0.$$

Con argumentos similares, invariancia por  $\theta \mapsto \pi - \theta$  y  $\phi \mapsto 2\pi - \phi$ , se sigue  $R_{2\nu} = 0$  para  $\nu \neq 2$  y  $R_{3\nu} = 0$  para  $\nu \neq 3$ . La anulación del resto de los términos no diagonales se deduce de la simetría del tensor de Ricci.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.2.3:* Por la tensorialidad la anulación del tensor de Ricci para (4.14) equivale a su anulación para (4.15).

Empleando la Proposición 4.2.4  $R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0$  establece un sistema de ecuaciones diferenciales para  $A$  y  $B$ . Eliminando  $A''$  de  $R_{00}$  y  $R_{11}$  por medio de una combinación lineal adecuada se llega a una ecuación particularmente sencilla:

$$0 = \frac{B}{A} R_{00} + R_{11} = \frac{A'}{rA} + \frac{B'}{rB} = \frac{(AB)'}{rAB},$$

que implica que  $AB$  es constante y de la condición  $A, B \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow +\infty$  se deduce  $B = A^{-1}$ . Sustituyendo en la ecuación  $R_{22} = 0$

$$0 = R_{22} = -rA' - A + 1 = -(rA)' + 1$$

y se obtiene finalmente  $A(r) = 1 + K/r$  donde  $K$  es una constante arbitraria, como afirma el enunciado.

Es fácil comprobar que para estas funciones  $A$  y  $B$  se cumple realmente  $R_{\mu\nu} = 0$ . Esta comprobación es en principio necesaria ya que tenemos un sistema aparentemente sobredeterminado (tres ecuaciones diferenciales para hallar dos funciones), aunque la inexistencia de soluciones sería poco creíble desde el punto de vista físico.  $\square$

## Ejercicios de la sección 2

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si se define  $T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$ , ¿Cuál es la relación entre  $T$  y  $R$  de acuerdo con las ecuaciones de campo?

ii) ¿Por qué sería poco creíble desde el punto de vista físico la inexistencia de soluciones con simetría radial de las ecuaciones de campo en el vacío?

iii) ¿Cuál es la curvatura escalar para la métrica de Schwarzschild?

iv) Recuerdese que  $R_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{;\beta}$  (esto se deducía de la identidad de Bianchi). ¿Por qué esta relación implica  $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ ?

2) Supongamos una relatividad general en  $n$  dimensiones con unas ecuaciones de campo del tipo

$$R_{ij} - kg_{ij}R = 0$$

cuando el tensor de energía-momento es nulo.

a) Demostrar que si  $k \neq 1/n$  entonces  $R = 0$ .

b) Considerando la esfera unidad  $S^2$  comprobar que en el apartado anterior la condición  $k \neq 1/n$  es necesaria.

3) Calcular el tensor de Einstein para  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$  con la métrica  $g_{00} = -(x^0)^2$ ,  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$  y  $g_{\alpha\beta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$ . *Indicación:* Con un cambio de variable previo, no es necesario hacer ningún cálculo.

4) En Errelandia sus habitantes creen vivir en una recta real,  $\mathbb{R}$ , bajo la acción de la gravedad y finalmente un físico les ha convencido de que no hay un sol en el origen, sino que que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$-B^2(x)dt^2 + dx^2$$

donde  $B \neq 0$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

a) Suponiendo que fuera del origen se cumple el análogo de las ecuaciones de campo en el vacío,  $R_{ij} = 0$ , y que  $B(0) = 0$ ,  $B'(0) = 1$ , calcular la función  $B$ .

b) Partiendo del resultado del apartado anterior, estudiar qué métrica se obtendría si se decretase que las nuevas coordenadas del espacio-tiempo que deben usar los errelandeses son  $X = x \cosh t$ ,  $T = x \sinh t$ .

5) En este ejercicio vamos a comprobar que la métrica de Schwarzschild corresponde realmente a una variedad curvada y que sirve como contraejemplo a una pregunta natural en geometría riemanniana.

a) Hallar  $R_{212}^1$  para la métrica de Schwarzschild.

b) Demostrar que no existe ningún cambio de coordenadas de manera que la métrica de Schwarzschild coincida con la de Minkowski.

c) Riemann probó que si el tensor de Riemann es nulo, con un cambio adecuado de coordenadas la métrica es del tipo  $\pm(dx^1)^2 \pm (dx^2)^2 \pm \dots \pm (dx^m)^2$ . Demostrar que este resultado no es necesariamente cierto si se reemplaza el tensor de Riemann por el de Ricci.

6) Hallar la solución de Schwarzschild generalizada que se obtiene si no se impone la condición  $A, B \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ . Demostrar que con un cambio de unidades de tiempo se puede transformar en la métrica de Schwarzschild.

7) Hallar la métrica correspondiente a la gravedad en el interior de una esfera hueca utilizando el problema anterior y que experimentalmente se conoce que la métrica no es singular.

8) Consideremos una métrica más general que la de Schwarzschild (tras el cambio  $r \mapsto cr$ ) donde  $A$  y  $B$  quizá dependan de  $t$ , esto es,

$$-A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

En este ejercicio vamos a probar el *Teorema de Birkhoff* que afirma que la única métrica de esta forma (salvo los cambios de coordenadas del tercer apartado) que verifica las ecuaciones de campo en el vacío y satisface las condiciones de frontera  $A, B \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , es la métrica de Schwarzschild.

a) Probar que todos los símbolos de Christoffel son iguales a los hallados cuando no se supuso la dependencia en  $t$ , excepto

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{A_{,0}}{2A}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{B_{,0}}{2A}, \quad \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{B_{,0}}{2B}.$$

b) Comprobar que  $R_{10} = B_{,0}/(rB)$  y deducir que  $B$  no depende de  $t$ . De ello y de la fórmula para  $R_{22}$ , obtener que  $A(t, r) = a(r) c(t)$ . (Nota: El cálculo de  $R_{10}$  es un poco largo y quizá es mejor omitirlo. Por otra parte,  $R_{22}$  no requiere cálculos adicionales).

c) Explicar por qué con un cambio de coordenadas  $\tilde{t} = \int \sqrt{c(t)} dt$  se puede suponer que  $c \equiv 1$  y deducir el Teorema de Birkhoff.

d) Explicar por qué el Teorema de Birkhoff implica que (suponiendo simetría esférica) cuando una estrella colapsa, podemos detectar variaciones en el brillo pero no en la fuerza gravitatoria.



# Bibliografía

- [Ab] E.A. Abbott. *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Dover Publications third edition, 2007.
- [Bi-Go] R.L. Bishop, S.I. Goldberg. *Tensor analysis on manifolds*. Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- [Bu-Gi] K. Burns; M. Gidea. *Differential geometry and topology*. Chapman & Hall/CRC 2005.
- [Ch] F. Chamizo. *Seminario 2001 (una odisea en el espacio-tiempo)*. Disponible en formato PDF en la página web [www.uam.es/fernando.chamizo/seminario.html](http://www.uam.es/fernando.chamizo/seminario.html), 2002.
- [Co-Re-St] L. Corry, J. Renn, J. Stachel. Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute. *Science* **278** (1997), no. 5341, 1270–1273.
- [Di] A. Díaz. *Introducción a las variedades diferenciables*. Disponible en formato PDF en la página web [www.uam.es/diaz.miranda](http://www.uam.es/diaz.miranda), 2003.
- [Do-He] J.R. Dorronsoro, E. Hernández. *Numeros Grupos y Anillos*. Addison-Wesley Iberoamericana–UAM, Madrid, 1996.
- [Ei] A. Einstein. On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. *Ann. of Math.* **40** (1939), 922-936.
- [Ei-Lo-Mi-We] A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Minkowski, H. Weyl. *The principle of relativity*. Dover 1952.
- [Fe-Le-Sa] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands. *Feynman Física*, Vol. II. Fondo educativo interamericano 1972.
- [Fo-Ni] J. Foster, J.D. Nightingale. *A short course in General Relativity*. 2nd Edition. Springer 1995.
- [Ga-Ru] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*, 2ª edición. Editorial Sanz y Torres, Madrid, 2005.

- [GoG] G. González. *Geometría IV (notas provisionales del curso 2005/06)*. Disponible en [www.uam.es/gabino.gonzalez/notas2006.pdf](http://www.uam.es/gabino.gonzalez/notas2006.pdf), 2006.
- [GoJ] J. Gonzalo. *Variedades y Geometría: un curso breve*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2005.
- [Gr-Ha] M.J. Greenberg, J.R. Harper. *Algebraic topology. A first course*. Benjamin/Cummings, 1981.
- [Ha-El] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press 1973.
- [Hi] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, 1976.
- [Hu-To] L.P. Hughston, K.P. Tod. *An introduction to General Relativity*. London Mathematical Society Student Texts 5. Cambridge University Press 1990.
- [Ja] K. Jänich. *Vector analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Ko] C. Kosniowski. *A first course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980.
- [Ku] A.C. Kurosch. *Curso de álgebra superior*. Segunda edición. Mir, Moscú, 1975.
- [Mi-Th-Wh] G.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company. San Francisco 1973.
- [Mu] J.R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [ON] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1983.
- [Pa] A. Pais. *El Señor es sutil... La ciencia y la vida de Albert Einstein*. Ariel 1984.
- [Sc] B.F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press 1990.
- [Sp1] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Sp1t2] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Sp2] M. Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, Barcelona, 1982.

- [Wa] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer Verlag, 1983.
- [We] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons 1972.



# Índice alfabético

- afelio, 72
- agujero negro, 69
- Alexander, J.W. (1888–1971), 41
- álgebra exterior, 19
- aplicación de Gauss, 86
- aplicación tangente, 11
- atlas orientado, 33
  
- banda de Möbius, 33
- base dual, 2
- Betti, E. (1823–1892), 41
- Bianchi, identidad de, 91
- bola de pelo, Teorema de la, 51
- borde, 35
- braquistocrona, 58
- Brouwer, Teorema del punto fijo de, 50
  
- cálculo de variaciones, 58
- campo de vectores, 14
- campo tensorial, 14
- carta, 8
- Cartan, É. (1869–1951), 19, 23
- cartas compatibles, 9
- cohomología de de Rham, grupo de, 41
- compacidad, 40
- componentes de un tensor, 4
- conexión, 40
- conexión de Levi-Civita, 78
- conexión de Koszul, 77
- conmutador, 79
- constante de gravitación universal, 69
- contracción, 6
- contractible a un punto, 43
- contravector, 4
  
- convenio de sumación de Einstein, 5
- coordenadas generalizadas, 58
- corrimiento hacia el rojo, 72
- covector, 12
- curva parametrizada, 61
- curvatura de Gauss, 86
- curvatura escalar, 89
- curvatura, tensor de, 88
  
- de Rham, G. (1903–1990), 41
- delta de Kronecker, 7
- derivación, 10
- derivada covariante, 78
- derivada exterior, 23
- derivada parcial, 9
- difeomorfismo, 10
  
- ecuación de Poisson, 95
- ecuaciones de campo, 95
- ecuaciones de campo en el vacío, 95
- Einstein, A. (1879–1955), 67
- elemento de volumen, 64
- esferas exóticas, 9
- espacio cotangente, 12
- espacio dual, 2
- espacio euclídeo, 6
- espacio tangente, 10
- espacio-tiempo, 17
- estereorradián, 86
- estructura diferenciable, 9
- Euler, fórmula de, 46
- Euler-Lagrange, ecuaciones de, 59
  
- fibrado tangente, 13

- forma alternada, 19  
 forma diferencial, 20  
 forma diferencial cerrada, 41  
 forma diferencial exacta, 41  
 Freedman, M. (1951– ), 53  
 funciones coordenadas, 9
- Gauss, C.F. (1777–1855), 86  
 Gauss, teorema de la divergencia de, 38  
 Gauss-Bonnet, teorema de, 87  
 geodésica, 61  
 geodésica nula, 68  
 geodésica temporal, 68  
 gradiente, 16, 82  
 Grassman, H. (1809–1877), 19, 23  
 Green, teorema de, 37  
 grupo fundamental, 46
- Heine-Borel, teorema de, 40  
 Hilbert, D. (1862–1943), 96  
 homología, grupos de, 41  
 homomorfismo de conexión, 48  
 homotopía, 42, 43  
 Hopf-Rinow, teorema de, 64  
 horizonte de sucesos, 69  
 Hurewicz, W. (1904–1956), 52
- imagen recíproca, 29  
 inmersión, 56  
 integración en curvas y superficies, 31  
 integración en variedades, 34
- Kepler, J. (1571–1630), 72
- lagrangiano, 59  
 Laplace, P.S. (1749–1827), 71  
 Lema de Poincaré, 44  
 longitud de arco, 63
- métrica de Kerr, 96  
 Mayer-Vietoris, sucesión de, 47  
 métrica, 14  
 métrica de Minkowski, 7
- métrica de Schwarzschild, 69  
 métrica inducida, 56  
 métrica usual, 56  
 Milnor, J. (1931–), 9  
 Minkowski, H. (1864–1909), 6  
 multilineal, aplicación, 2
- número de Betti, 42  
 Nash, J. (1928–), 8  
 Newton, I. (1642–1727), 67
- observadores inerciales, 17  
 orden de conexión, 41  
 orientación, 33  
 orientación inducida, 35
- particiones de la unidad, 33  
 Perelman, G. (1966– ), 53  
 perihelio, 72  
 Poincaré, Conjetura de, 53  
 Poincaré, H. (1854–1912), 41  
 primera forma fundamental, 56  
 principio de Arquímedes, 39  
 principio de inercia, 59, 66  
 producto exterior, 21, 22  
 producto tensorial, 5  
 producto vectorial, 26  
 pullback, 29
- radio de Schwarzschild, 69  
 regla de la mano derecha, 36  
 regla del sacacorchos, 36  
 relatividad general, 67  
 retracto, 43  
 Ricci, lema de, 81  
 Riemann, B. (1826–1866), 88
- Schrödinger, E. (1887 - 1961), 95  
 Schwarzschild, K. (1873–1916), 69  
 símbolos de Christoffel, 60  
 Smale, S. (1930– ), 53  
 snake lemma, 48  
 Stokes, G. (1819–1903), 27

- Stokes, teorema de, 36, 38
- sucesión exacta, 46
- sucesión exacta corta, 46
- superconmutativa, propiedad, 22
  
- tensor, 3, 14
- tensor de Einstein, 95
- tensor de energía-momento, 95
- tensor de Ricci, 89
- tensor de Ricci contravariante, 89
- tensor de Riemann, 88
- tensor simétrico, 19
- tensorialidad, 16
- Teorema Egregio, 87
- teorema fundamental del cálculo, 27
- tiempo de Schwarzschild, 72
- tiempo propio, 67, 68
- tipo de homotopía, 43
- tipo de un tensor, 3
- transformaciones de Lorentz, 18
- transporte paralelo, 80
  
- uno forma, 12, 20
  
- variedad con borde, 34
- variedad de Lorentz, 68
- variedad de tipo finito, 42
- variedad diferenciable, 9
- variedad riemanniana, 55
- variedad semiriemanniana, 55
- vector tangente, 10
- volumen  $n$ -dimensional, 64
  
- Whitney, H. (1907–1989), 8