Resúmenes, problemas y programas de Cálculo I

Fernando Chamizo Lorente

1º de Ingeniería Informática 2010–2011

Fernando Chamizo Lorente

2010/2011

Índice general

Prefacio

En estas notas se recoge buena parte del material que preparé para la asignatura Cálculo I de Ingeniería Informática impartida durante el primer semestre del curso 2010-2011. No tienen mayores pretensiones y su utilidad principal probablemente sea facilitar el repaso rápido de la asignatura y que el estudiante compruebe sus fuerzas antes del examen a través de algunos problemas resueltos. Estos problemas están tomados de las hojas propuestas este curso y de exámenes de cursos anteriores. Las referencias (H n- m) indican el problema m de la hoja n y las referencias (A- cd), con A en números romanos indican un examen del mes A del año 20cd. Los enunciados están ligeramente adaptados evitando los formatos tipo test y ajustándolos a una longitud razonable. Continúo con mi empeño de intentar llamar la atención del estudiante de informática incluyendo el código de programas sencillos y reflexiones ocasionales acerca de algoritmos y de cálculo númerico.

Visto en retrospectiva, ahora que he tenido que compilar y ordenar el material, es desalentador que el esfuerzo realizado haya tenido tan escaso efecto sobre los estudiantes. Además, al menos en mi grupo, los cinco parciales de evaluación continua no han subido significativamente la calificación a ningún alumno. Fuera del lugar común, en el que no creo, de que los estudiantes sean cada vez peores, hay una realidad bien clara: mientras en las asignaturas estrictamente de informática haya contenidos eliminatorios y agobiantes prácticas obligatorias, las asignaturas de matemáticas con su flexibilidad impuesta serán la primera opción de abandono.

Aprovecho finalmente para recomendar el libro gratuito (bajo licencia Creative Commons) "Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable" del profesor F. J. Pérez González de la Universidad de Granada que se puede descargar de `http://www.ugr.es/~fjperez/`. Como se indica en su prólogo es un libro escrito para el "estudiante real" que con toda seguridad agradecerá las explicaciones sencillas y detalladas y una impresionante cantidad de ejercicios. Para los alumnos más avanzados recomiendo también sin dudarlo el texto "Cálculo infinitesimal" de M. Spivak. Mi impresión es que está cayendo en desuso porque ya no está en sintonía con los estudiantes que llegan a la universidad. Ello no debería impedir que los que quieran ir más allá de aprobar el curso gocen de sus grandes ventajas.

Madrid, abril de 2011

Fernando Chamizo Lorente

Capítulo 1

Números naturales, racionales y reales

1.1. Resumen de la teoría

El principio de inducción. Es un método para demostrar propiedades que involucran números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Probar una propiedad $\mathcal{P}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ requiere, según el principio de inducción, comprobar dos cosas:

1) $\mathcal{P}_1$ se cumple.
2) Suponiendo que $\mathcal{P}_n$ se cumple, entonces también se cumple $\mathcal{P}_{n+1}$.

Dos variantes comunes consisten en sustituir la primera propiedad por que $\mathcal{P}_{n_0}$ se cumpla para cierto n_0, entonces $\mathcal{P}_n$ quedará demostrado para $n \ge n_0$. También en la segunda propiedad se supone a veces que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\dots$ y $\mathcal{P}_n$ se cumplen (inducción completa).

Ejemplo: Demostrar que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

Llamemos a esta propiedad $\mathcal{P}_n$. Claramente $\mathcal{P}_1$ se cumple porque $1 = 1(1+1)/2$. Suponiendo $\mathcal{P}_n$, es decir, la igualdad de partida, sumando en ambos miembros $n + 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= n(n + 1)/2 + n + 1 \\ &= (n + 1)(n/2 + 1) \\ &= (n + 1)(n + 2)/2 \end{aligned}$$

que es la propiedad para $n + 1$.

Desigualdades y valor absoluto. Las desigualdades entre números reales se conservan si en ambos miembros se suma o se resta un mismo número real o si se multiplican o dividen por un número real positivo pero cambian de sentido si se multiplican o dividen por un número real negativo.

Ejemplo: Decidir para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple $(6x - 9)/(x + 2) \le 1$.

Quitar el denominador requiere distinguir dos casos:

a) $x + 2 > 0$ entonces $6x - 9 \le x + 2 \Leftrightarrow 5x \le 11 \Leftrightarrow x \le 11/5$.

b) $x+2<0$ entonces $6x-9 \geq x+2 \Leftrightarrow 5x \geq 11 \Leftrightarrow x \geq 11/5$. Entonces o bien $x > -2$ y $x \leq 11/5$, lo cual se cumple para $x \in (-2, 11/5]$, o bien $x < -2$ y $x \geq 11/5$ que claramente es imposible.

El *valor absoluto* es un número x, denotado con $|x|$, es x si $x \geq 0$ y $-x$ si $x < 0$. Es decir, es el número desprovisto de su signo.

Ejemplo: Estudiar para qué valores de x se verifica $|2x+5| > 1$.
Como antes distinguimos $2x+5 \geq 0$ en cuyo caso $2x+5>1$ o equivalentemente $x > -2$, y $2x+5<0$ que análogamente lleva a $-3 > x$. Entonces $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$.

Cotas inferiores y superiores. Ínfimos y supremos. Dado un conjunto $\mathcal{A}$ de números reales se dice que M es una *cota superior* de $\mathcal{A}$ si $x \leq M$ para todo $x \in \mathcal{A}$. De la misma forma se dice que m es una *cota inferior* si $m \leq x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Si un conjunto admite una cota superior y una cota inferior se dice que está *acotado*. Si sólo admite una de ellas se dice que está *acotado superiormente* o *acotado inferiormente*, respectivamente.

Para un conjunto de números reales acotado superiormente siempre existe una cota superior mínima llamada *supremo*. De la misma forma, si está acotado inferiormente siempre existe una cota inferior máxima llamada *ínfimo*.

El ínfimo y el supremo de un conjunto $\mathcal{A}$ se suele denotar con $\inf \mathcal{A}$ y $\sup \mathcal{A}$, respectivamente. No siempre pertenecen al conjunto y cuando esto ocurre a veces se les llama mínimo y máximo.

Ejemplo: Sea el conjunto $\mathcal{A} = \big\{(-1)^n n + \frac{1}{n} + n + 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$. Estudiar si está acotado inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

Los elementos con n par son de la forma $n + \frac{1}{n} + n + 1 = 2n + 1 + \frac{1}{n}$ y los elementos con n impar son $-n + \frac{1}{n} + n + 1 = 1 + \frac{1}{n}$. Los primeros pueden ser arbitrariamente grandes tomando n grande entonces $\mathcal{A}$ no está acotado superiormente. Por otro lado, en ambos casos los elementos son claramente mayores que 1, entonces $\mathcal{A}$ está acotado inferiormente y 1 es una cota inferior. De hecho es el ínfimo porque para cualquier otro número $c > 1$ la desigualdad $1 + \frac{1}{n} > c$ no se cumpliría para n par suficientemente grande.

1.2. Problemas

1) (H1-1ed) Indicar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0,$ b) $|x+1| + |x+3| < 5.$

2) (H1-3ad) Decidir si las siguientes desigualdades son válidas para los valores de x e y que se indican.

a) $|x-y| \leq |x| - |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ b) $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

3) (H1-4b) Demostrar por inducción $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. para $n \in \mathbb{N}$.

4) (H1-7abd) Indicar si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 < 9\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} : x^5 < 9\}$, c) $\{(-1)^n - n^{-1} : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Imágenes

Principio de inducción

Números reales

Conjuntos no acotados

Capítulo 2

Sucesiones y series

2.1. Resumen de la teoría

Tipos de sucesiones. Intuitivamente una *sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una lista (conjunto ordenado) infinita de números reales a_1, a_2, a_3, a_4, ... Más rigurosamente una sucesión es una forma de asignar a cada $n \in \mathbb{N}$ un número real a_n, el *término general* de la sucesión.

No siempre el término general tiene una fórmula explícita. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} - 1$ define una sucesión por recurrencia (un elemento de la sucesión en términos de los anteriores).

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

- *creciente* si $a_{n+1} \ge a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- *decreciente* si $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- *monótona* si es creciente o decreciente.
- *acotada* (inferior o superiormente) si el conjunto formado por los a_n lo está.

Ejemplo: Consideremos las sucesiones cuyos términos generales son $a_n = (n+1)/n$ y $b_n = 20n - n^2$. La primera es decreciente ($a_n = 1 + 1/n$), en particular monótona. Está acotada superiormente por $a_1 = 2$ e inferiormente por 1. La segunda no es monótona porque por ejemplo $a_1 = 19 < a_2 = 36$ y $a_{18} = 36 > a_{19} = 19$.

El concepto de límite. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se escribe $\lim a_n = l$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si para cualquier $\epsilon > 0$, por pequeño que sea, a partir de cierto n se cumple $|a_n - l| < \epsilon$.

Intuitivamente el límite es el valor al que se acerca a_n según crece n. No todas las sucesiones tienen límite. A las que sí lo tienen se les llama *convergentes* y a las que no lo tienen *divergentes* aunque unos pocos autores reservan este nombre para las sucesiones tales que a partir de cierto n, $|a_n|$ es mayor que cualquier cantidad prefijada de antemano. Este último hecho se suele denotar con $\lim a_n = \infty$ a veces especificando el signo, pero eso no quiere decir que exista el límite (∞ no es un número real), es sólo una notación para indicar una forma especial de la no existencia del límite.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = (n+1)/n$ es convergente. Podríamos conseguir $|(n+1)/n - 1| < 10^{-3}$ tomando $n > 1000$ y en general $|(n+1)/n - 1| < \epsilon$ tomando $n > \epsilon^{-1}$.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = 3 - n^2$ no es convergente porque $|a_n|$ crece indefinidamente, es decir $\lim a_n = \infty$.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = 2 + (-1)^n$ tiene como elementos 1, 3, 1, 3, 1, 3,... y por tanto no es convergente (no está siempre cerca a partir de cierto n ni de 1 ni de 3, va oscilando). Esta sucesión no es monótona ni convergente pero sí acotada.

El cálculo de límites. La base teórica para el cálculo de límites es un resultado que asegura que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes entonces

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n, \qquad \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n, \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

donde para la última propiedad se necesita $\lim b_n \neq 0$ (y $b_n \neq 0$ si se quiere que todos los a_n/b_n tengan sentido.

Hay una especie de "álgebra del infinito" fácil de intuir: $\infty \pm k = \infty$, $\infty \cdot k = \infty$ si $k \neq 0$ y $k/\infty = 0$. Aquí ∞, k y 0 significan sucesiones que tienden a estos valores. De la última se deduce también $k/0 = \infty$. Pero hay otras "operaciones" que no tienen un valor definido, dependen del ejemplo concreto. Se las suele llamar *indeterminaciones* y las ligadas a las operaciones elementales son

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Hay otras indeterminaciones ligadas a las potencias: 1^{∞}, ∞^0 y 0^0.

El procedimiento habitual para calcular límites es hacer manipulaciones algebraicas que eliminen las indeterminaciones.

Ejemplo:

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3n+1} = \lim \frac{\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}+1}{3+\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Dividir entre n permite quitar los infinitos y la indeterminación ∞/∞ desparece.

$$\lim\big(\sqrt{n^2+1}-n\big) = \lim \frac{\big(\sqrt{n^2+1}-n\big)\big(\sqrt{n^2+1}+n\big)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

Se racionaliza y así la ausencia de raíces elimina la indeterminación $+\infty - \infty$.

Dos teoremas sobre límites. Dos de los resultados teóricos más relevantes sobre sucesiones convergentes son los siguientes:

Teorema del sandwich: Si a partir de cierto n se cumple $a_n \le b_n \le c_n$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes con $\lim a_n = \lim c_n = l$ entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es convergente y su límite es l.

Idea: La sucesión b_n queda "emparedada" entre a_n y c_n si ellas se acercan a un mismo número, b_n también.

Teorema de Bolzano-Weierstrass (versión débil): Cualquier sucesión monótona y acotada es convergente.

Idea: Si una sucesión por ejemplo crece y no sobrepasa un cierto valor, entonces se debe acercar a algún número entre a_1 y ese valor.

Se puede probar (pero no es demasiado fácil) que $a_n = \big(1 + 1/n\big)^n$ define una sucesión monótona creciente y acotada por 3. El teorema anterior asegura que tiene límite. A éste se le llama *número e* y es aproximadamente 2,71828.

Ejemplo: Justificar que la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$,... es convergente y hallar su límite.

Por inducción se prueba que $a_n \le 2$ ($a_1 \le 2$ y, usando $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_n \le 2 \Rightarrow a_{n+1} \le 2$). Es monótona creciente porque

$$a_{n+1} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2+a_n} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; 2+a_n \ge a_n^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \ge (a_n+1)(a_n-2)$$

y sabemos que $0 \le a_n \le 2$, por tanto la última desigualdad se cumple. El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que existe $l = \lim a_n$. Por la definición de límite también $l = \lim a_{n+1}$ y tomando entonces límites en la relación $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ se sigue $l = \sqrt{2+l}$. Resolviendo la ecuación $l = 2$.

Series. Una *serie* no es más que una sucesión de la forma

$$a_1,\; a_1+a_2,\; a_1+a_2+a_3,\; a_1+a_2+a_3+a_4, \dots$$

que se suele denotar con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y a cuyos elementos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ se les llama *sumas parciales*. La convergencia o no de una serie es la de sus sumas parciales. Si una serie converge a l a veces se escribe $l = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Las sumas parciales no suelen admitir fórmulas explícitas, por ello hay varios criterios para decidir la convergencia a partir de los a_n.

Criterio del cociente: Supongamos que $a_n > 0$ y que existe $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- Si $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $l > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ entonces tampoco converge. El caso $l = 1$ es indeterminado.

Criterio de la raíz: Supongamos que $a_n \ge 0$ y que existe $l = \lim a_n^{1/n}$

- Si $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $l > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Si $\lim a_n^{1/n} = \infty$ entonces tampoco converge. El caso $l = 1$ es indeterminado.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ converge usando cualquier de los dos criterios anteriores porque

$$\lim \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \big(2^{-n}\big)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Criterio de condensación: Supongamos que $a_n \geq 0$ y que a partir de cierto n, la sucesión a_n es decreciente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

Ejemplo: Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ donde $\alpha > 0$ por el criterio anterior llevan a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ que por el criterio de la raíz o del cociente converge si y sólo si $\alpha > 1$.

Criterio de comparación: Supongamos que $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, entonces

- Si a partir de cierto n, $a_n \leq K b_n$ con K constante, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si a partir de cierto n, $b_n \leq K a_n$ con K constante, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Nótese que $a_n \leq K b_n$ se cumple si $\exists \lim \frac{a_n}{b_n}$ y que $b_n \leq K a_n$ se cumple si $\exists \lim \frac{b_n}{a_n}$. En conclusión en el caso particular en que $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 5n + 20)^{-1}$ converge porque $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ para $a_n = (n^2 - 5n + 20)^{-1}$ y $b_n = n^{-2}$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ converge.

Es fácil ver que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge necesariamente cumple $\lim a_n = 0$. Más allá de esta propiedad sencilla sólo veremos dos criterios para decir si una serie con términos positivos y negativos converge.

Convergencia absoluta: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Se dice que *converge absolutamente*.

Criterio de Leibniz: Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ cumple $\lim a_n = 0$ y además a_n es monótona entonces la serie converge.

Cuando una serie converge con pero no absolutamente se dice que *converge condicionalmente*.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ converge por el criterio de Leibniz pero no converge absolutamente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge. Entonces la serie inicial converge condicionalmente. Por otro lado $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$ converge absolutamente.

2.2. Problemas

5) (H2-1aec) Estudiar si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y en caso afirmativo hallar su límite.

$$a)\ a_n = \frac{3n^4 - 2}{n^4 + 2n^2 + 2}, \quad b)\ a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n}, \quad c)\ a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2.$$

6) (H2-3ab) Consideremos la sucesión $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$.
a) Probar por inducción que $a_n < 2$.

b) Justificar que a_n es monótona creciente y hallar su límite.

7) (H2-6) Fijado $1 < t \leq 4$ consideramos la sucesión recurrente dada por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big)$ con $x_1 = 2$.

a) Probar que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.

b) Demostrar que es monótona decreciente.

c) Deducir que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

8) (H2-11abcg) Decidir si las series siguientes son convergentes. Los sumatorios se sobreentienden sobre $n \geq 1$.

$$a)\ \sum \frac{n^2+1}{n2^n}, \quad b)\ \sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}, \quad c)\ \sum (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}, \quad d)\ \sum \big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)^2.$$

9) (H2-13abc) Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a)\ \sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}, \quad b)\ \sum \big(\sqrt{n^{2\alpha}+2}-n^\alpha\big), \quad c)\ \sum \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha}.$$

10) (IX-03) Estudiar la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n}{n(1+1/n)^n}$$

donde $r > 0$ es un parámetro.

11) (IX-04) Estudiar si la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ es monótona, acotada y convergente.

12) (IX-05) Se consideran la sucesión $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Estudiar para qué valores del parámetro convergen cada una de ellas.

Imágenes

Sucesión decreciente

El límite

Serie alternante

Capítulo 3

Funciones continuas y sus propiedades

3.1. Resumen de la teoría

Repaso de funciones. Una *función* real f es una manera de asignar a cada número x de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ otro número real $f(x) \in \mathbb{R}$. Normalmente se escribe $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : A \longrightarrow B$ si se quiere especificar donde están los resultados.

Al conjunto A se le llama *dominio* de f y al conjunto $\text{Im}(f) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$ se le llama *imagen* de f.

<u>Ejemplo</u>: La función $f(x) = 21 + |x - 1|$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $\text{Im}(f) = [21, +\infty)$.

Se dice que una función $f : A \longrightarrow B$ es:

- *inyectiva* si $f(x) = f(y)$ únicamente cuando $x = y$.
- *sobreyectiva* (o *suprayectiva*) si $\text{Im}(f) = B$.
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

En general no se puede decidir de qué tipo es una función sin especificar dónde está definida. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva cuando se considera como función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ porque $f(1) = f(-1)$ y $-1 \notin \text{Im}(f)$. Sin embargo es biyectiva considerada como función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Componer dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ consiste en sustituir la primera en la segunda. Es decir, la *composición* de g y f es $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si y sólo si existe una función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, llamada *función inversa* de f, tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para $x \in A$ y $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para $x \in B$.

En la práctica la fórmula para f^{-1} se obtiene despejando la y en $x = f(y)$.

<u>Ejemplo</u>: Sabiendo que la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow (1, +\infty)$ dada por $f(x) = (x + 1)/x$ es biyectiva, hallar su función inversa.

Despejando en $(y + 1)/y = x$ se tiene $1 + 1/y = x$ y de aquí $y = 1/(x - 1)$ por tanto $f^{-1}(x) = 1/(x - 1)$.

Límites. Para una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede definir $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ exactamente igual que para sucesiones, es decir, el límite es l si por pequeño que sea $\epsilon > 0$ para x mayor que cierto valor se cumple $|f(x) - l| < \epsilon$. Simétricamente se define $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ donde ahora se exige que x sea negativo. Cuando no hay duda en el signo se escribe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

De la misma forma se define $\lim_{x\to a} f(x)$ como el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y es distinto de él. En términos matemáticos, $l = \lim_{x\to a} f(x)$ cuando para todo $\epsilon > 0$ cualquier $x \neq a$ suficientemente cercano a a cumple $|f(x) - l| < \epsilon$.

Finalmente, se consideran también los *límites laterales* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ que consiste en restringirse en la definición de límite a $x < a$ y a $x > a$, respectivamente.

El límite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si los limites laterales existen y coinciden.

Ejemplo: Las funciones $f(x) = x/|x|$ y $g(x) = 1/\big(1 + e^{1/x}\big)$, definidas fuera de $x = 0$, verifican $\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to0^-} g(x) = 1$ y $\lim_{x\to0^+} g(x) = 0$. Por tanto no existen $\lim_{x\to0} f(x)$ ni $\lim_{x\to0} g(x)$.

Como en el caso de los límites de sucesiones, los límites de funciones respetan las operaciones elementales (excluyendo la división por cero). Todo lo dicho con respecto a las indeterminaciones se aplica aquí.

Dos límites del tipo $0/0$ que permiten calcular límites más complicados son:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Nótese que el segundo es el límite del número e tomando logaritmos tras el cambio $n \leftrightarrow 1/x$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^2+1}\big)}{x + 2x^3} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^2+1}\big)}{\frac{x}{x^2+1}} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x + 2x^3} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x + 2x^3} = \lim_{x\to0} \frac{1}{(1 + 2x^2)(x^2 + 1)} = 1.$$

Continuidad. Se dice que una función f es *continua* en a si verifica

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

En particular esto requiere que la función esté definida en el punto y que el límite exista. Por las propiedades de los límites las operaciones elementales (excluyendo la división por cero) respetan la continuidad.

La idea intuitiva es que la gráfica de f no esté "rota" en a. Cuando no se especifica el punto, al decir que una función es continua se sobreentiende que lo es en todos los puntos de su dominio.

Las funciones elementales, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1 + x)$, etc. son continuas. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces $g \circ f$ es continua en a.

Ejemplo: Estudiar si las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \big(1 + e^{1/x}\big)^{-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad h(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

son continuas.

La primera, fuera de cero es una combinación de funciones y operaciones elementales y por tanto continua. En cero ya habíamos visto que los límites laterales no coinciden, por consiguiente no es continua. De la misma forma, en g sólo examinamos $x = 0$. Por la izquierda $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$, por una variante del teorema del sandwich, ya que $|g(x)| \le |x|$ para $x < 0$. Por la derecha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, entonces existe $\lim_{x\to 0} g(x)$ y coincide con $g(0) = 0$, por tanto g es continua. Finalmente, para h en $x = 0$ la función pasa de ser $-x$ (a la izquierda) a x (a la derecha) pero como sus límites coinciden y $h(0) = 0$, no hay problema. En $x = 2$ el límite existe y es 2 pero es distinto de $h(2) = 4$ y se tiene que h no es continua.

Aparte de las propiedades generales ya indicadas hay tres teoremas que se aplican a cualquier función continua definida en un intervalo cerrado $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

T1 (de Bolzano o de los valores intermedios). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

T2 (de acotación). La función f está acotada, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le M$.

T3 (de Weierstrass). La función f alcanza un máximo y un mínimo, es decir, existen x_m y x_M en $[a, b]$ tales que $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ para todo $x \in [a, b]$.

Nótese que los dos últimos resultados afirman que $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto acotado cuyo supremo e ínfimo pertenecen al conjunto.

A pesar de que estos teoremas tienen interés primordialmente teórico, el primero se relaciona con un método iterativo para buscar soluciones de ecuaciones. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces o bien hay un cambio de signo en $f(a)$, $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$ o bien lo hay en $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$, $f(b)$. Por tanto, según el teorema, podemos buscar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en alguno de estos dos intervalos, que son la mitad de pequeños. Iterando el procedimiento se llega a intervalos arbitrariamente pequeños que dan lugar a una aproximación de la solución tan precisa como deseemos. Este esquema se denomina *método de la bisección*.

Ejemplo: Utilizar el método de la bisección para calcular con dos cifras decimales correctas la solución de $\operatorname{sen} x = e^{-x}$ en $[0, 1]$.

Los cálculos correspondientes a llevar a cabo 10 iteraciones para $f(x) = \operatorname{sen} x - e^{-x}$ son:

$[a,\ b]$	$\xrightarrow{f}$	$[f(a),\ f(b)]$
[0.0, 1.0]	$\longrightarrow$	[−1.00000, 0.47359]
[0.5, 1.0]	$\longrightarrow$	[−0.12711, 0.47359]
[0.5, 0.75]	$\longrightarrow$	[−0.12711, 0.20927]
[0.5, 0.625]	$\longrightarrow$	[−0.12711, 0.04984]
[0.5625, 0.625]	$\longrightarrow$	[−0.03648, 0.04984]

[0.5625, 0.59375]	$\longrightarrow$	[−0.03648, 0.00722]
[0.578125, 0.59375]	$\longrightarrow$	[−0.01449, 0.00722]
[0.5859375, 0.59375]	$\longrightarrow$	[−0.00360, 0.00722]
[0.5859375, 0.58984375]	$\longrightarrow$	[−0.00360, 0.00182]
[0.587890625, 0.58984375]	$\longrightarrow$	[−0.00089, 0.00182]

Por tanto la solución es 0.58... y de hecho pertenece al intervalo [0.587890625, 0.58984375].

3.2. Problemas

13) (H3-1) Encontrar funciones continuas f, g y h con las siguientes propiedades:
a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ es biyectiva.
b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ es inyectiva.

c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que la imagen de $(-1,1)$ por h es $[-1,1]$.

14) (H3-2afed) Decidir si es posible definir las siguientes funciones fuera de los valores que se indican para que sean funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2}$ si $0 < x < 1$, *b)* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \\ x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \cos \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$ si $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, *d)* $f(x) = e^{-1/(x-2x^2)}$ si $0 < x < 1/2$.

15) (H3-8) Hallar dos funciones discontinuas tales que su suma sea continua y no constante. Hallar también dos funciones discontinuas tales que su producto sea continuo. ¿Es posible resolver los dos apartados anteriores con el mismo par de funciones?

Imágenes

Discontinuidades

artísticas

Capítulo 4

La derivada y sus propiedades básicas

4.1. Resumen de la teoría

Definición de derivada y su interpretación física y geométrica. La recta secante a la gráfica de una función f que pasa por los puntos con $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$ tiene pendiente $\big(f(b) - f(a)\big)/(b-a)$ (incremento de y entre incremento de x). Por otro lado en Física la velocidad media en un intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por $\big(s(b) - s(a)\big)/(b-a)$ donde $s = s(t)$ es el espacio.

Si escribimos $b = a + h$ en el límite cuando $h \to 0$ la secante se transformará en tangente y la velocidad media en velocidad instantánea. Esto sugiere definir el objeto matemático:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si este límite existe se dice que la función f es *derivable* en a y que $f'(a)$ es su *derivada* en a.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ es $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ y la velocidad instantánea en $t = a$ de una partícula bajo la ley de movimiento $s = s(t)$ es $s'(a)$.

<u>Ejemplo</u>: Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ y hallar la recta tangente a su gráfica en ese punto.

Por la definición de derivada:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6.$$

Por tanto la recta tangente es $y = 6(x-3) + 9$, esto es, $y = 6x - 9$.

Cuando la función f' que asigna a cada x la derivada de f en x se deriva de nuevo se obtiene la llamada *derivada segunda* que se denota con f''. También se definen análogamente derivadas de orden superior: terceras, cuartas, quintas… que se denotan con f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$… (a veces se usan números romanos para las de orden bajo).

La notación de Leibniz, empleada ampliamente en Física, representa la derivada mediante el símbolo $\dfrac{df}{dx}$ donde x es la variable de la función f, mientras que $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ indica una derivada n-ésima. La ventaja de la notación de Leibniz es que recuerda al límite que define la derivada y da intuición sobre algunas fórmulas pero, además de aparatosa, es un poco deficiente para distinguir la derivada como función y el resultado de sustituir esa función en un punto.

No todas las funciones son derivables. Si una función no es continua entonces tampoco puede ser derivable porque entonces el límite del numerador en la definición de derivada no daría cero. Por otra parte hay funciones que son continuas y no derivables.

Ejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable ya que el límite que definiría $f'(0)$ es $\lim_{h\to 0} |h|/h$ que no existe porque los límites laterales no coinciden.

Derivación de operaciones y funciones elementales. La derivada actúa sobre funciones elementales y se comporta bajo las operaciones elementales como se indica en las siguientes tablas. Por otro lado, la regla de la cadena permite derivar unas funciones sustituidas en otras.

$f(x)$		$f'(x)$
K	$\longrightarrow$	0
x^α	$\longrightarrow$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	$\longrightarrow$	e^x
$\log x$	$\longrightarrow$	$1/x$
$\operatorname{sen} x$	$\longrightarrow$	$\cos x$
$\cos x$	$\longrightarrow$	$-\operatorname{sen} x$

Suma:	$(f+g)' = f' + g'$
Resta:	$(f-g)' = f' - g'$
Multiplicación:	$(fg)' = f'g + fg'$
División:	$\big(\dfrac{f}{g}\big)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Regla de la cadena:	$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Aplicando la regla de la cadena a $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ se tiene que la derivada de la función inversa f^{-1} en x viene dada por $1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$

Ejemplo: Se define la función $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ (en muchas calculadoras $\sin^{-1}$) como la función inversa de sen en ciertos rangos. Su derivada es entonces $g'(x) = 1/\cos(\operatorname{arcsen} x)$ porque cos es la derivada de sen. Utilizando la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ esto se puede escribir también como $g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Ejemplo: La siguiente función es una composición de sen y de otra función dada por una suma y un cociente. Se deriva sen y después se multiplica por la derivada de lo de dentro.

$$f(x) = \operatorname{sen}\big(x + \frac{\cos x}{x}\big) \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos\big(x + \frac{\cos x}{x}\big)\cdot\big(1 + \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}\big)$$

Ejemplo: La función $f(x) = 2^x$ se puede escribir como $f(x) = e^{x\log 2}$ (porque $2 = e^{\log 2}$ al ser exponencial y logaritmo funciones inversas una de otra). Hay que derivar la exponencial y multiplicar por la derivada de $x\log 2$ que es $\log 2$ porque $\log 2 = 0{,}6931\dots$ es una constante. El resultado es entonces $f'(x) = e^{x\log 2}\log 2$.

Ejemplo: Procediendo como antes, la función $f(x) = x^x$ es $f(x) = e^{x \log x}$ y se tiene la composición de una exponencial con un producto que contiene un logaritmo. Entonces $f'(x) = e^{x \log x}(\log x + 1)$.

Ejemplo: La siguiente función es un cociente de un producto y una suma. En la suma hay una composición de sen y un cuadrado.

$$f(x) = \frac{x \log x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(\log x + 1)\big(e^x + \operatorname{sen}^2 x\big) - (x \log x)\big(e^x + 2 \operatorname{sen} x \cos x\big)}{\big(e^x + \operatorname{sen}^2 x\big)^2}.$$

4.2. Problemas

16) (H4-1) Usando la definición de derivada comprobar que las funciones $f(x) = 1/(x^2|x| + 1)$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ con $g(0) = 0$ verifican $f'(0) = g'(0) = 0$. Comprobar que $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ con $h(0) = 0$ no es derivable en cero.

17) (H4-6) Calcular las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto que se indica

a) $f(x) = \log(e + \operatorname{sen} x)$ en $x = 0$,

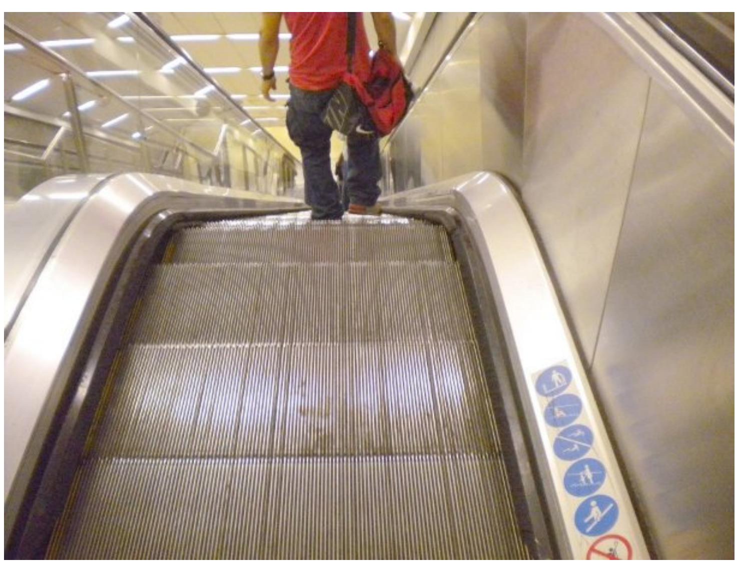
b) $f(x) = x^{x^2 - x + 1}$ en $x = 1$,

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en $x = \pi/6$,

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $x = 2$.

18) (H4-10) ¿Qué se obtiene al derivar tres veces $f(x)g(x)$?

Imágenes



Suma de velocidades o derivada de una suma

La regla de la cadena

Capítulo 5

Teoremas sobre derivación

5.1. Resumen de la teoría

El teorema de la función inversa. En la práctica es difícil que exista una expresión explícita para la función inversa y ello hace que no sea fácil un tratamiento directo de las propiedades de las funciones inversas. Esperamos que una función derivable y biyectiva tenga una función inversa derivable, excluyendo algunos casos más o menos obvios. El teorema de la función inversa afirma que éste es el caso.

Teorema (de la función inversa). Sea f derivable en un intervalo abierto I y tal que f' no se anula en dicho intervalo, entonces $f : I \longrightarrow J$ es biyectiva (donde J es el intervalo imagen de I) y la función inversa $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es derivable y cumple $\big(f^{-1}\big)'(x) = 1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$ para todo $x \in J$.

<u>Ejemplo</u>: Comprobar que existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $\big(g(x)\big)^5 + g(x) + x = 0$ y hallar $g'(0)$.

Definiendo $f(x) = -x^5 - x$ se tiene $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y f' no se anula, por tanto existe $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y $g = f^{-1}$ verifica $f\big(g(x)\big) = x$, que equivale a la ecuación buscada. De $f(0) = 0$ se deduce $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1/f\big(g'(0)\big) = 1/f'(0) = -1$.

Teoremas del valor medio. El teorema del valor medio por antonomasia es el siguiente resultado:

Teorema (del valor medio de Lagrange). Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretando f como la función que da el espacio en función del tiempo, intuitivamente lo que afirma es que si al viajar entre dos puntos la velocidad media es v entonces en algún punto intermedio se alcanza justamente la velocidad v.

Una variante de este resultado que se emplea al probar la regla de L'Hôpital es:

Teorema (del valor medio de Cauchy). Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$

La fórmula se puede reescribir como un cociente de las fórmulas del teorema del valor medio de Lagrange para f y g en el mismo punto (aunque no se suele hacer así para no excluir los casos con derivadas nulas). La interpretación mecánica sería ahora que si el cociente de dos velocidades medias es r entonces en algún punto el cociente de las velocidades instantáneas es también r.

Estos dos teoremas son consecuencias de uno mucho más simple:

Teorema (de Rolle). Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$.

Geométricamente, lo que dice es que en una gráfica que une dos puntos de la misma altura siempre hay un punto donde la tangente es horizontal.

Los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy se deducen aplicando el teorema de Rolle a las funciones $F(x) = f(x)(b-a) - \big(f(b)-f(a)\big)(x-a)$ y $F(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) - \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big)$, respectivamente.

El teorema de Rolle asegura que no se puede alcanzar un mismo valor dos veces si la derivada no se anula. Este hecho en combinación con el teorema de Bolzano permite localizar soluciones de ecuaciones.

Ejemplo: Hallar el número de soluciones de la ecuación $2x = 1 + \operatorname{sen} x$.

Considerando $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ se tiene que f' no se anula y por tanto $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones (llamándolas a y b, contradirían el teorema de Rolle). Por otra parte $f(0) < 0 < f(1)$ implica gracias al teorema de Bolzano que hay una solución en $[0,1]$.

Polinomios y series de Taylor. Desde el punto de vista práctica y también para ciertas resultados teóricos es interesante aproximar funciones complicadas por otras más sencillas.

Si f tiene n derivadas en a se define su *polinomio de Taylor* de orden n en a como

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Los polinomios de Taylor dan aproximaciones polinómicas de funciones con derivadas sucesivas que son óptimas localmente en cierto sentido.

Teorema (de Taylor). Sea f una función tal que existe su derivada $n+1$-ésima en $[a,x]$ (o en $[x,a]$), entonces

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{con } R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún $c \in (a,x)$ (ó $c \in (x,a)$).

A $R_{n,a}(x)$ se le llama término de error o *resto de Taylor*. En principio es imposible hallarlo directamente por la indeterminación que hay en c pero la fórmula permite hacer estimaciones.

Ejemplo: Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt{x}$ en 16 y estimar el error cometido al usarlo para aproximar $\sqrt{16.2}$.

Las derivadas de f son $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ y $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Entonces

$$T_{2,16}(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2 \qquad \text{y} \qquad R_{2,16}(x) = \frac{1}{16c^{5/2}}(x-16)^3.$$

Por tanto al aproximar $\sqrt{16.2}$ por $T_{2,16}(16.2)$ el error es menor que $0.2^3/16^{7/2} = 10^{-3}/2048$, que difiere en menos de $5 \cdot 10^{-9}$ del error real.

Para funciones que tienen un número de derivadas arbitrariamente grande, se puede considerar la serie

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

obtenida al hacer tender n a ∞ en $T_{n,a}$. Tal serie se llama *serie de Taylor* (si no se indica lo contrario se suele tomar $a = 0$). Cuando el error tiende a cero esta serie converge a la función. Con este significado se tienen las expresiones

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{si } |x| \le 1$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{si } x \in (-1, 1].$$

Ejemplo: Comprobar para qué valores de x converge la serie de Taylor en cero de $\operatorname{sen} x$.

La serie de Taylor es en este caso $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}/(2n-1)!$. Quitando los signos esto es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = |x|^{2n-1}/(2n-1)!$. Suponiendo $x \ne 0$ (para $x = 0$ la convergencia es trivial) se tiene $\lim a_{n+1}/a_n = \lim |x|/(2n+1) = 0$ que implica la convergencia por el criterio del cociente. Así pues, la serie de Tayor de $\operatorname{sen} x$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Las series de Taylor se pueden sumar, multiplicar y componer formalmente agrupando términos del mismo grado. Esto permite calcular algunos polinomios y series de Taylor sin necesidad del cálculo de derivadas de orden superior. Por ejemplo, como para $f(x) = e^x$ se tiene $T_{n,0}(x) = 1 + x/1! + \dots + x^n/n!$ entonces para $f(x) = x^k e^x$ se tendrá $T_{n,0}(x) = x^k + x^{k+1}/1! + \dots + x^{n+k}/n!$. También, como la serie de Taylor de $\operatorname{sen} x$ es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}/(2n-1)!$, la de $\operatorname{sen}(x^2)$ será $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{4n-2}/(2n-1)!$.

5.2. Problemas

19) (H5-1) Hallar una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

20) (H5-8abe) Calcular el número exacto de soluciones $x \in \mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones usando los Teoremas de Bolzano y de Rolle:

$$a)\ 2x - 1 = \operatorname{sen} x, \qquad b)\ 2x^3 + ax = a, \text{ con } a > 0, \qquad c)\ x^5 - 5x - 3 = 0.$$

Indicación: Por el teorema de Rolle si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo.

21) (H5-10ab) Hallar los polinomios de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para las siguientes funciones

$$f(x) = \log(1 + \operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{3 + e^x}.$$

22) (H5-13) Hallar las series de Taylor en $a = 0$ para las siguientes funciones, indicando dónde convergen

$$a)\ f(x) = x\log(1 + x^2), \qquad b)\ f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^3), \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Imágenes

Cuidado con el teorema de Rolle

Capítulo 6

Aplicaciones de la derivada

6.1. Resumen de la teoría

Cálculo de límites. La aplicación de las derivadas más conocida para el cálculo de límites es la *regla de L'Hôpital* que se puede enunciar en varias versiones. Definiendo $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ se sintetizan en que si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ó $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y además $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Sólo es aplicable a indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ pero algunas otras se transforman en éstas.

Ejemplo: Calcular el valor de $L = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.
Tomando logaritmos y aplicando la regla de L'Hôpital

$$\log L = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x\cos x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

donde se ha usado que $\cos x \to 1$ cuando $x \to 0$. Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital o dando este límite por conocido se sigue $\log L = -1/2$ y por tanto $L = e^{-1/2}$.

A menudo es conveniente utilizar aproximaciones de Taylor en lugar de la regla de L'Hôpital.
Ejemplo: Calcular $L = \lim_{x\to 0}(2\cos x - 2 + x^2)/x^4$.
Sabemos que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_{4,0}(x)$ con $R_{4,0}(x)/x^4 \to 0$ (porque $R_{4,0}(x)$ es una derivada multiplicada por x^5). Entonces

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\big) - 2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

Crecimiento y decrecimiento. Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I si para todo $x, y \in I$ con $x \geq y$ se tiene $f(x) \geq f(y)$. Bajo las mismas hipótesis se dice que es *decreciente* en I si $f(x) \leq f(y)$.

Supongamos que f es derivable en un intervalo I. Por el teorema del valor medio $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$ y se deduce que f es creciente en I si y sólo si $f' \geq 0$ en I y que es decreciente en I si y sólo si $f' \leq 0$ en I.

Una función f se dice que alcanza un *máximo local* (o *relativo*) en a si para cierto $\epsilon > 0$ se cumple que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Análogamente se dice que alcanza un *mínimo local* (o *relativo*) en a si con la misma notación $f(a) \leq f(x)$. En cada caso, se dice que el máximo o el mínimo local es $f(a)$.

Para referirse simultáneamente a máximos y a mínimos se suele emplear la expresión *extremos*.

Una función derivable que alcanza un extremo local en a debe cumplir necesariamente $f'(a) = 0$. Si la función pasa de ser creciente a ser decreciente en a entonces se alcanza un máximo local y si pasa de ser decreciente a ser creciente, se alcanza un mínimo local.

La existencia de extremos locales no asegura que existan extremos globales (valores máximo y mínimo de la función).

<u>Ejemplo</u>: Hallar los extremos locales de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Al derivar e igualar a cero debemos resolver $6x^2 - 30x + 36 = 0$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 3$. En estos puntos se alcanzan posibles extremos locales. De $f'(x) = 6(x-2)(x-3)$ se obtiene $f'(x) \leq 0$ en $I_1 = [2,3]$ y $f'(x) \geq 0$ en $I_2 = (-\infty, 2]$ y $I_3 = [3, \infty)$. Entonces la función es creciente en I_1 y en I_3 y decrecimente en I_2 y en $x = 2$ se alcanza un máximo local que es $f(2) = 29$ mientras que en $x = 3$ se alcanza un mínimo local que es $f(3) = 28$. Sin embargo no hay extremos globales porque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cuando f'' es positiva en un intervalo entonces f' es creciente en dicho intervalo y la recta tangente tiene mayor pendiente. Geométricamente esto se traduce en que la gráfica de f está curvada hacia abajo (como un valle) y se dice que es *convexa*. Análogamente cuando f'' es negativa, la gráfica de f está curvada hacia arriba (como un bombín) y se dice que es *cóncava*. Si en un punto se cambia de cóncava a convexa o viceversa, se dice que es *punto de inflexión*.

Desafortunadamente no hay acuerdo en la terminología de cóncava y convexa y en algunos textos estos nombres están intercambiados.

Representación gráfica. Dada una función f el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ es su *gráfica*. Antes de dibujar una gráfica hay que determinar los valores de x para los que $f(x)$ está definido (el *dominio* de la función). Otra información que suele ser relevante para dar un esbozo cualitativo de la gráfica es:

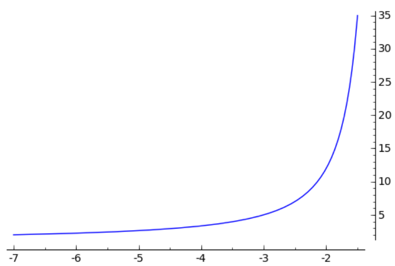
1. Simetrías $f(x) = f(-x)$ (simetría par) o $f(x) = -f(-x)$ (simetría impar).
2. Cortes con los ejes.
   Con el eje X: $(x_j, 0)$ donde $f(x_j) = 0$. Con el eje Y: $\big(0, f(0)\big)$.
3. Asíntotas.
   Horizontales: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ (cuando el límite es finito). Verticales: $x = a_j$ con $\lim_{x\to a_j} f(x) = \infty$.

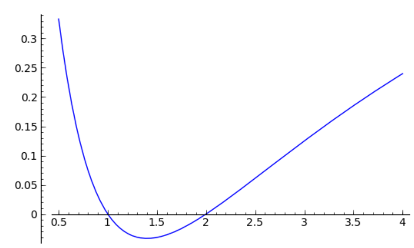
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos locales.
5. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Ejemplo: Representar la gafica de $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x+1)^2$.

La función está definida para todo $x \neq -1$. No tiene simetrías. Resolviendo la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ se llega a los cortes con el eje X $(2,0)$ y $(1,0)$, mientras que el corte con el eje Y es $(0,2)$. Hay una asíntota horizontal en $y = 1$ (porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$) y otra vertical en $x = -1$ (porque $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$).

La derivada es $f'(x) = (5x-7)/(x+1)^3$ por tanto la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $[7/5,+\infty)$, y es decreciente en $(-1,7/5)$. Se alcanza un mínimo local en $x = 7/5$, que es $f(7/5) = -1/24$, y no hay más extremos locales. La derivada segunda es $f''(x) = (26-10x)/(x+1)^4$ de donde f es cóncava en $[13/5,+\infty)$ y convexa en $(-\infty,-1)$ y $(1,13/5]$. En $x = 13/5$ se alcanza un punto de inflexión, $(13/5, 2/27)$.





Estos dibujos con ordenador muestran limitaciones para dar una idea global debido a que diferentes elementos de la gráfica viven a diferentes escalas que no se pueden representar al tiempo. En el segundo se ve el mínimo pero si usáramos la misma escala que en el primero sería invisible. La asíntota $y = 1$ no se ve por la derecha por este mismo problema con las escalas.

Método de Newton. Supongamos que $x = x_0$ es una aproximación de la solución de $f(x) = 0$. Hallemos la recta tangente en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a la gráfica de f y digamos que interseca al eje X en $x = x_1$. Si x_1 también está cerca de la solución geométricamente parece claro que al iterar este procedimiento se obtendrán aproximaciones más precisas. Esta técnica para aproximar soluciones se llama *método de Newton* y en la práctica es muy poderosa.

La ecuación de la recta tangente en $\big(x_n, f(x_n)\big)$ es $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ y su intersección con $y = 0$ (el eje X) da lugar a la siguiente fórmula para el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ejemplo: La ecuación cúbica $x^3 - 7x + 7 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[1, 1.5]$ por el teorema de Bolzano. Eligiendo en el método de Newton el valor inicial $x_0 = 1.25$ se obtiene

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.25	0.203125
1	1.33783783784	0.0296107831718
2	1.35599761482	0.00132955513831
3	1.35689365533	$3.26686452823 \cdot 10^{-6}$

6.2. Problemas

23) (H6-1abce) Calcular los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(6x))}{\log(\cos(3x))}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(a/x)$.

24) (H6-6) Queremos construir un cercado rectangular de 20 metros cuadrados pegado a la pared de una granja (luego no es necesario construir uno de los lados). ¿Cuántos metros de cercado debemos construir como mínimo? En ese caso, ¿cuál es la relación entre los lados?

25) (H6-7b) Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. Indicando, si los hubiera, extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad.

26) (XII-01) Sea la función $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$. Hallar sus máximos y mínimos locales y globales.

27) (XI-03) Dado $a > 0$, calcular $L = \displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

28) (XII-04) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x}$.

29) (II-05) Decidir si los siguientes límites existen y en su caso hallarlos:

$$L = \lim_{x\to 0} e^{|x|/x} \qquad \text{y} \qquad M = \lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(x/2)}{\big(\operatorname{sen}(2x)\big)^2 \cos x}.$$

30) (IX-09) Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ hallar asíntotas, extremos locales y globales e intervalos de concavidad y convexidad.

Imágenes

Creciente y decreciente

Cóncava y convexa

Capítulo 7

La integral y técnicas de integración

7.1. Resumen de la teoría

La integral y el teorema fundamental del cálculo. La integral de una función acotada en $[a,b]$ es intuitivamente el área limitada por su gráfica y el eje X entendiendo que el área es negativa si está por debajo del eje. Ésta no es una definición matemáticamente válida porque supone el concepto de área. Las *sumas superiores* son las sumas de la áreas de rectángulos por encima de la gráfica con base en el eje X. Análogamente las *sumas inferiores* corresponden a rectángulos por debajo de la gráfica. Se dice que una función f acotada en $[a,b]$ es *integrable* si el ínfimo de las sumas superiores coincide con el supremos de las sumas inferiores. A esta cantidad se la llama *integral* (o *integral definida*) de f en $[a,b]$ y se denota con $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se puede probar que todas las funciones continuas son integrables. Algunas de las propiedades de la integral son

1) $\lambda,\mu\in\mathbb{R}\Rightarrow \int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$, 2) $f\le g\Rightarrow \int_a^b f\le\int_a^b g$, 3) $a<c<b\Rightarrow \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

El teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow indican que integrar es en cierto modo lo contrario que derivar.

Teorema (fundamental del cálculo). Si f es continua en $[a,b]$ entonces $F(x)=\int_a^x f$ verifica $F'(c)=f(c)$ para $a<c<b$.

Corolario (Regla de Barrow). Si f es continua en $[a,b]$ y $f=g'$ para alguna función g, entonces $\int_a^b f=g(b)-g(a)$.

<u>Ejemplo</u>: La función $g(x)=x^3/3$ cumple $g'(x)=x^2$, entonces $\int_a^b x^2\,dx=(b^3-a^3)/3$.

Dada una función f, las funciones que cumplen $g'=f$ se llaman *primitivas* (o *antiderivadas*) de f. Todas ellas difieren en una constante. Normalmente se emplea el símbolo de la *integral indefinida* $\int f$ para indicar todas las primitivas. Según la tabla de derivadas

$$\int 0\,dx=K,\qquad \int x^{-1}\,dx=\log|x|+K,\qquad \int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K\quad(\alpha\neq-1),$$

$$\int e^x\,dx=e^x+K,\qquad \int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+K,\qquad \int\cos x\,dx=\operatorname{sen}x+K,$$

donde K denota una constante arbitraria.

Integración por partes. Por la fórmula para la derivada de un producto $uv' = (uv)' - vu'$. Integrando se obtiene $\int uv' = uv - \int vu'$. Habitualmente se suele despejar formalmente en la notación de Leibniz $u' = du/dx$ y $v' = dv/dx$ para escribir la fórmula anterior como

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Ests técnica es útil cuando se tiene un producto de una función que se simplifica al derivar por otra que no se complica al integrar.

Ejemplo: Para calcular $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ se debe tomar $u = x^2$, $dv = e^x\, dx$ que corresponde a $du = 2x\, dx$ y $v = e^x$. La función u al derivar dos veces se reduce a una constante y por tanto la fórmula de integración por partes aplicada dos veces permite obtener la integral indefinida.

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx = x^2 e^x - 2\big(xe^x - \int e^x\, dx) = (x^2 - 2x + 2)e^x + K.$$

Por tanto $\int_0^1 x^2 e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x\big|_0^1 = e - 2$.

En productos de exponenciales y senos o cosenos la integración por partes establece una ecuación para la integral a partir de la cual se puede despejar.

Integración por cambio de variable. La fórmula $\int h'\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = h\big(g(x)\big) + K$ se sigue inmediatamente de la regla de la cadena. Tomando en lugar de h una primitiva suya, f, se tiene que $\int f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx$ es igual que $\int f(t)\ dt$ sustituyendo $t = g(x)$ en el resultado. Aquí también se emplea a menudo formalmente la notación de Leibniz diciendo que el cambio de variable $t = g(x)$ implica $dt = g'(x)\ dx$ (o se despeja dx en función de dt) y de aquí $\int f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = \int f(t)\ dt$. No hay que olvidar deshacer el cambio en el resultado para tener una función de x. Para integrales definidas esta integración por cambio de variable se reduce a la fórmula

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt.$$

Ejemplo: Calcular $I = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$. Si uno quiere aplicar directamente la fórmula anterior con $g(x) = \sqrt{x}$ se podría escribir $e^{\sqrt{x}} = f(\sqrt{x})(2\sqrt{x})^{-1}$ con $f(x) = 2xe^x$. Entonces $I = \int_0^2 2xe^x\, dx$ que integrando por partes es $2(x-1)e^x\big|_0^2 = 2e^2 + 2$. Sin embargo es más natural razonar diciendo que aplicamos el cambio $x = t^2$ para quitar la raíz cuadrada del exponente, de aquí $dx = 2t\, dt$. Por consiguiente la integral indefinida es

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = \int 2te^t\, dt = 2(t-1)e^t + K = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + K.$$

Sustituyendo los límites se obtiene de nuevo $I = 2e^2 + 2$.

Integración de funciones racionales. Se dice que f es una función racional si es cociente de polinomios, $f(x) = P(x)/Q(x)$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q lo primero que se hace es hallar el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ al dividir estos polinomios. La relación $P = QC + R$ conduce a

$$\int \frac{P}{Q} = \int C + \int \frac{R}{Q}.$$

Entonces basta considerar el caso en que el numerador tiene grado menor que el denominador. También se puede suponer que Q es mónico (coeficiente principal uno) sacando factor común.

Por ejemplo

$$\int \frac{8x^3-2x+3}{4x^2-1}\,dx = \int \big(2x+\frac{3}{4x^2-1}\big)\,dx = x^2+\frac{1}{4}\int \frac{3}{x^2-1/4}\,dx.$$

Si Q tiene todas sus raíces reales se factoriza como $(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$ y P/Q (con Q de grado mayor) admite una descomposición en *fracciones simples*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Big(\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\Big)+\cdots+\Big(\frac{A_{n1}}{x-\alpha_n}+\cdots+\frac{A_{nk_n}}{(x-\alpha_n)^{k_n}}\Big).$$

Los A_{ij} se calculan operando e igualando los coeficientes de los numeradores de ambos miembros. La sustitución $x=\alpha_j$ permiten encontrar los coeficientes si no hay raíces múltiples.

En el caso anterior

$$\frac{3}{x^2-1/4} = \frac{A}{x-1/2}+\frac{B}{x+1/2} \;\Rightarrow\; 3 = A(x+1/2)+B(x-1/2).$$

Con $x=1/2$ se obtiene $A=3$ y con $x=-1/2$, $B=-3$. En definitiva

$$\int \frac{8x^3-2x+3}{4x^2-1}\,dx = x^2+\frac{1}{4}\int \big(\frac{3}{x-1/2}-\frac{3}{x+1/2}\big)\,dx = x^2+\frac{3}{4}\log|x-\frac{1}{2}|-\frac{3}{4}\log|x+\frac{1}{2}|+K.$$

El método es general si se permiten números complejos. Pero esto no es lo habitual y entonces en Q es posible que aparezcan factores x^2+ax+b con raíces complejas. Si estos factores no están repetidos basta añadir sumandos $(Mx+N)/(x^2+ax+b)$ a la descomposición en fracciones simples. Completando cuadrados y cambiando la variables todo se reduce al caso $a=0$, $b=1$ cuya integral es $\frac{M}{2}\log(x^2+1)+N\operatorname{arc\,tg} x+K$.

Por ejemplo

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{\big((x+1)/2\big)^2+4}\,dx \xrightarrow{(x+1)/2=t} \frac{1}{2}\int \frac{4t-1}{t^2+1}\,dt$$

que integrando es $\log(t^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t+K$ donde hay que sustituir $t=(x+1)/2$.

Algunas integrales trigonométricas. Las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x,\cos x)\,dx$ donde f es una función racional se pueden reducir a una integral de una función racional con los cambios $t=\cos x$, $t=\operatorname{sen} x$ o $t=\operatorname{tg} x$ dependiendo de si las simetrías de f son $f(x,y)=-f(-x,y)$, $f(x,y)=-f(x,-y)$ o $f(x,y)=f(-x,-y)$, respectivamente. Un último recurso si no hay simetrías es el cambio $t=\operatorname{tg}(x/2)$ que implica $\operatorname{sen} t=2t/(1+t^2)$ y $\cos t=(1-t^2)/(1+t^2)$.

Este tipo de integrales pueden dar lugar a cálculos bastante largos.

En este curso consideraremos sobre todo el caso en que f es un polinomio que conduce a las integrales $\int \operatorname{sen}^m x\ \cos^n x\ dx$ que pueden tratarse directamente. Si n es impar entonces $\cos^{n-1} x=(1-\operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2}$ y desarrollando la potencia se obtienen integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^k x\cos x\,dx=(k+1)^{-1}\operatorname{sen}^{k+1} x+K$. Si m es impar, se procede análogamente invirtiendo el papel desempeñado por senos y cosenos. Si m y n son pares se aplican las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Ejemplo: Calcular $\int \cos^3 x\, dx$ y $\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx = \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x)\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + K.$$

En la segunda el procedimiento anterior da lugar a

$$\int \big(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}\big)\big(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\big)\, dx = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\, dx = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\big(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\big)+K.$$

Las integrales trigonométricas permiten calcular algunas integrales con radicales cuadráticos tras cambios de variable adecuados.

Ejemplo: Para calcular $I=\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$ el cambio $x=2\operatorname{sen} t$ y la relación $1-\operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$ eliminan la raíz a costa de introducir el factor $dx = 2\cos t\, dt$. Concretamente

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\,(2\cos t)\, dt = 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\pi/2}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\big)\, dt = 4\big(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\big)\Big|_0^{\pi/2} = \pi.$$

Esto es coherente con que I representa el área de un cuarto de circunferencia de radio 2.

Integrales como $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$ y $\int (x^2\pm a^2)^{-1/2}\, dx$ también dan lugar a integrales trigonométricas tras el cambio $x = a\operatorname{tg} t$ o $x = a\cos^2 t$ pero los cálculos son un poco laboriosos y es mejor consultar su resultado en una tabla de integrales.

Integrales impropias. La definición de integral está limitada a funciones acotadas en intervalos acotados. Se puede escapar de estas limitaciones en muchas casos considerando límites en los extremos del intervalo. Se dice que estas integrales que exceden la definición original son *integrales impropias*.

Así $\int_0^\infty e^{-x/2}\, dx$ se define como $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-x/2}\, dx$ que es $2-2\lim_{X\to+\infty} e^{-X/2} = 1$. La integral $\int_0^1 x^{-1/3}\, dx$, con $x^{-1/3}$ no acotada si $x\to 0$, se redefine como $\lim_{X\to 0}\int_X^1 x^{-1/3}\, dx = \frac{2}{3}$.

Si el límite que define una integral impropia existe, se dice que es convergente. Para decidir la convergencia de una integral impropia no es necesario calcularla. Basta compararla con integrales conocidas más sencillas.

Ejemplo: La integral $\int_1^\infty f$ con $f(x) = (x^3-3x-5)/(x^4+x^2+1)$ no converge porque $f(x)\ge 0.5/x$ para x suficientemente grande, ya que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 1$. La monotonía de la integral asegura $\int_1^X f \ge 0.5\int_1^X x^{-1}\, dx = 0.5\log X$ que tiende a infinito con X.

7.2. Problemas

31) (H7-5) Hallar $f'(x)$ si

a) $f(x)=\displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-2}\, dt$, b) $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt$,

c) $f(x)=\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt$, d) $f(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1} \frac{t^6}{1+t^4}\, dt$.

32) (H7-9c) Calcular $\int 9x^2 e^{-5x+3}\,dx$.

33) (H7-11ac) Calcular las primitivas de las funciones:

$$a)\ \frac{x}{(x+1)(x-3)} \qquad \text{y} \qquad b)\ \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}.$$

34) (H7-11e) Calcular la primitiva de $\dfrac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}$.

35) (H7-13ab) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ e^{-\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad b)\ \frac{1}{e^x+4e^{-x}}.$$

36) (IX-02) Hallar $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^3 \cos x\,dx$.

37) (IX-03) Calcular el límite $L = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x te^{t^2}\,dt}$.

38) (IX-05) Sea la función $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt$. Hallar $f(1)$ y $\left(f^{-1}\right)'(\pi/4)$.

Imágenes

Sumas de Riemann

Sumas superiores e inferiores

Capítulo 8

Aplicaciones de la integral

8.1. Resumen de la teoría

Cálculo de áreas. Para hallar el área limitada por las gráficas de dos funciones hay que integrar la función cuya gráfica esta por encima menos la función cuya gráfica esta por debajo.

Ejemplo: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de la parábola $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y de la recta $g(x) = x + 1$.

Las gráficas se cortan cuando $f(x) = g(x)$, que lleva a $x = 1, 2$. Para $x \in [1, 2]$ la gráfica de g está por encima (basta dar un valor o hacer un esbozo de las graficas). Entonces el área es $\int_1^2 \big(x + 1 - (x^2 - 2x + 3)\big)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\big|_1^2 = \frac{1}{6}$.

Ejemplo: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ y de $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

Como $f(x) - g(x) = x^3 - x$, las intersecciones ocurren para $x = -1, 0, 1$. Claramente $x^3 - x$ es positivo para $x \in (-1, 0)$ y negativo para $x \in (0, 1)$. Por tanto el área es $\int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx + \int_0^1 (-x^3 + x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Criterio de la integral. Considerando sumas superiores e inferiores formadas por rectángulos de base 1, no es difícil demostrar que si f es una función decreciente y positiva en $[k, \infty)$ entonces $\sum_{n=k+1}^N f(n) \le \int_k^N f(x)\, dx \le \sum_{n=k}^{N-1} f(n)$. En particular, bajo estas hipótesis sobre la función f, la serie $\sum_{n=k}^\infty f(n)$ converge si y sólo si la integral $\int_k^\infty f$ converge. A este criterio se le llama *criterio de la integral*. En la práctica su utilidad es limitada pues no extiende lo que ya sabríamos hacer con otros criterios.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ no converge porque la integral $\int_1^\infty x^{-1}\, dx$ no converge. En general, $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ no converge para $0 < \alpha \le 1$ y converge para $\alpha > 1$ porque éste es el carácter de la integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx$.

Este resultado ya era conocido partiendo del criterio de condensación.

Áreas y volúmenes de cuerpos de revolución. Al girar alrededor del eje X la gráfica de una función $f = f(x)$ para $x \in [a, b]$, se obtiene una superficie (llamada *de revolución*). El volumen que limita viene dado por $\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx$.

El área de una superficie de revolución es $2\pi\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}$ pero en la práctica esta fórmula rara vez lleva a integrales que se puedan calcular explícitamente.

Ejemplo: Calcular el volumen V de la esfera de radio R.

La superficie esférica se obtiene girando la semicircunferencia dada por la gráfica de $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ en $x\in[-R,R]$. Entonces $V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4\pi}{3}R^3$.

Ejemplo: Calcular el área lateral del cono obtenido al girar la gráfica $f(x)=x$ en $[0,1]$.

Según la fórmula el área es $2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,dx=\pi\sqrt{2}$.

8.2. Problemas

39) (H8-3b) Hallar el área limitada entre las gráficas de las funciones

$$f(x)=\frac{2}{4x^2+1}\qquad \text{y}\qquad g(x)=2|x|.$$

40) (H8-4) Dada $f(x)=x^2-2x+7$ consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x=0$ y $x=2$ y la gráfica de f. Hallar el área de T.

41) (H8-5) Hallar el área limitada entre la curva $y^2=3x$ y la recta $2y-x+24=0$.

42) (H8-8) Deducir usando integrales que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

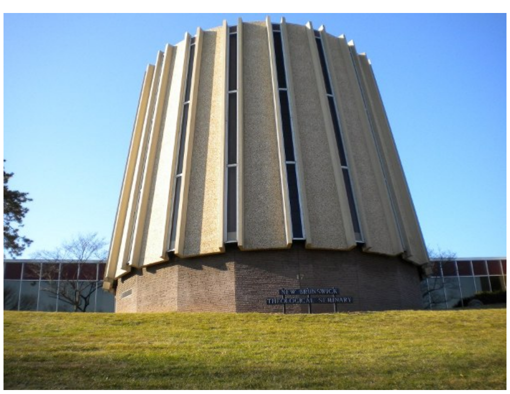
43) (H8-18) Hallar el área de la región plana definida por las inecuaciones:

$$2y-x^2\geq 0\qquad \text{y}\qquad 2x+y^2\leq 0\,,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X.

44) (IX-02) Hallar el área comprendida por las curvas $y=x/(1+x^2)$ e $y=\frac{1}{2}|x|$.

Imágenes



Volúmenes de revolución

Capítulo 9

Programas

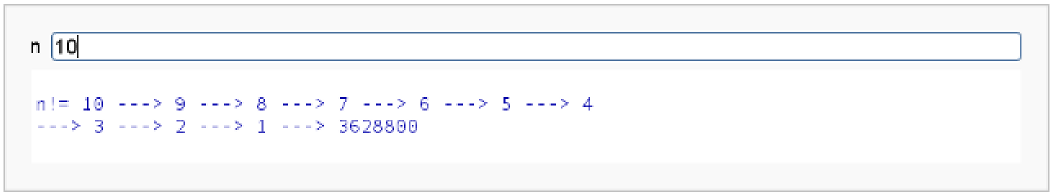
El contenido de esta sección es complementario a la asignatura. Se incluyen programas que ilustran algunos puntos del temario o ejercicios propuestos.

Hay programas en C, Java, Python y Sage. Los tres primeros son lenguajes de programación bien conocidos y el último es una poderosa herramienta matemática gratuita y de código abierto basada en Python que permite realizar y programar multitud de tareas, ya sean de cálculo simbólico, de cálculo numérico o gráficas. En el sitio oficial `http://www.sagemath.org/` hay documentación, ejemplos y la posibilidad de probar Sage por la red. Es posible descargar de `http://wiki.sagemath.org/interact/calculus` algunos ejemplos interactivos relacionados con el cálculo infinitesimal.

9.1. Programas del tema 1

Inducción y recurrencia. Hasta que se adquiere cierta experiencia las demostraciones por inducción parecen dudosas pues para probar un caso se utiliza el caso anterior que tampoco se ha probado. Un paralelo más tangible en programación es el uso de la recursión (llamadas de una función a sí misma). En el siguiente ejemplo típico se calcula el factorial indicando $1! = 1$ y cómo pasar del factorial de n al de $n-1$. Se imprimen los resultados parciales para ilustrar el orden del proceso.

```
#
# FUNCIÓN FACTORIAL USANDO RECURSIÓN (Sage)
#
#--------------------------------------------------------
def fact(n):
    print n,'--->',
    if n==1:
        return 1
    return n*fact(n-1)
#--------------------------------------------------------
@interact
def _(n=("n","1")):
    print "n!=",fact(Integer(n))
```



El programa sin usar recursión no tiene la menor complicación y consistiría en un simple bucle que recorre los números de 1 a n y multiplica los resultados.

```
#
# FUNCIÓN FACTORIAL SIN USAR RECURSIÓN (Sage)
#
#--------------------------------------------------------
def fact(n):
    res = 1
    for i in range(1,n+1):
        res *= i
    return res
#--------------------------------------------------------

@interact
def _(n=("n","1")):
    print "n!=",fact(Integer(n))
```

Para los no avezados en Sage será más fácil de entender la versión en Python puro de ambos programas sin usar la decoración interactiva `@interact`.

```
#
# Con recursión  (Python)
#
def fact(n):
    if n == 1: return 1
    return n*fact(n-1)



n = input('Introduce n: ')
print str(n)+'! =', fact(n)
```

```
#
# Sin recursión  (Python)
#
def fact(n):
    res = 1
    for i in range(1,n+1):
        res *= i
    return res

n = input('Introduce n: ')
print str(n)+'! =', fact(n)
```

La elegancia y brevedad de la recursión no siempre está acompañada de la eficiencia. En primer lugar la recursión requiere memoria que no se ve en forma de llamadas sucesivas que se acumulan en la pila (stack). En Python por ejemplo están limitadas a 1000 (y por tanto el primer programa con 1000 lleva a un error del tipo `maximum recursion depth exceeded`). Por otro lado, no es tan controlable el tiempo que requiere una operación como el de llamada a una función. Una prueba utilizando el primer programa para calcular 999! cien mil veces tardó 123 segundos, mientras que el que no emplea recursión tardó 86.

Para completar se incluye también la versión C recursiva

```c
#include <stdio.h>
/*
FUNCIÓN FACTORIAL USANDO RECURSIÓN      (C)
*/
double fact( double num ){
        if ( num == 1 )
                return 1;
        else
                return num*fact(num-1);
}

int main() {
        int n;
        printf("Introduce un entero positivo:\t");
        scanf("%d", &n);

        if ( n> 11 )
                printf("%d! = %e\n", n, fact(n));
        else if ( n> 0 )
                printf("%d! = %d\n", n, (int)fact(n));
        else
                printf("Número fuera de rango\n");

        return 0;
}
```

y la versión Java

```java
/*
FUNCIÓN FACTORIAL USANDO RECURSIÓN      (Java)
*/
import java.io.*;
public class fact{
        public static double factorial (double num) {
                if (num == 1)
                        return 1;
                else
                        return num*factorial(num-1);
        }
        public static void main(String[] args ) throws IOException {
                int n;
                System.out.println("Introduce un entero positivo");
                BufferedReader br = new BufferedReader(
                                        new InputStreamReader(System.in));
                n = Integer.parseInt(br.readLine());

                if ( n>11 )
                        System.out.println( factorial(n) );
                else if( n>0)
                        System.out.println( (int)factorial(n) );
                else
                        System.out.println("Número fuera de rango");
        }
}
```

En ambos casos hay limitaciones internas severas para el tamaño de los números.

Para terminar, aunque no tenga relación directa con este curso, se incluye uno de los ejemplos más espectaculares de la recursión: una función de ¡una línea! que calcula el máximo común divisor. Algunas líneas más permiten ver el algoritmo de Euclides.

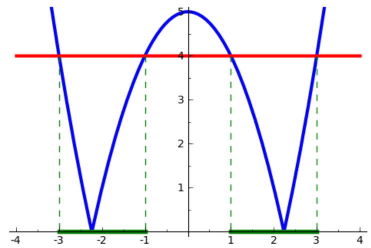
```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

/*
Máximo común divisor ¡en una línea!   (C)
Corregido y adaptado de J. Hubbard p. 103 "Programming in C++"
Schaum's easy outlines. Crash Course.
*/

int mcd(int j, int k){ printf("k=%d, j=%d\n",j,k); return k ? mcd(k,j%k) : j; }

main(){
        int j,k;
        printf("\nPrimer número:\t");
        scanf("%d", &j);
        printf("\nSegundo número:\t");
        scanf("%d", &k);
        printf("\nAlgoritmo de Euclides\n");
        printf("=====================\n");
        printf("Resultado:=%d\n", mcd(j,k));
}
```

El truco está en que al ejecutar `mcd(j,k)` se llama a `mcd(k,j%k)`, es decir, se está diciendo indirectamente que el máximo común divisor de dos números es lo mismo que el del segundo y el resto de dividir el primero por el segundo. Justamente ése es el algoritmo de Euclides.

Desigualdades y representación gráfica. En el primer capítulo se suelen resolver las desigualdades utilizando argumentos puramente algebraicos porque no se ha repasado la representación gráfica de funciones. Sin embargo es fácil hacerse una idea de funciones sencillas. A continuación se ilustra cómo la solución de la desigualdad $|x^2-5|<4$ que es $x\in(-3,-1)\cup(1,3)$ es fácil de obtener pensando que $y=x^2-5$ es una parábola y que el valor absoluto pasa la parte negativa a la positiva.

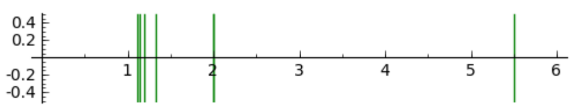
```
#
# DESIGUALDAD |X^2-5|<4   (Sage)
#
#-----------------------------------------------------------
P = plot( abs(x^2-5), -4,4, thickness=3)
P = P+line([(-4,4), (4,4)], color='red', thickness=3)
P = P+line([(-3,0), (-1,0)], color='green', thickness=4)
      +line([(-3,4), (-3,0)], color='green',
linestyle='--')+line([(-1,4), (-1,0)], color='green', linestyle='--')
P = P+line([(1,0), (3,0)], color='green', thickness=4)
      +line([(1,4), (1,0)], color='green', linestyle='--')
      +line([(3,4),(3,0)], color='green', linestyle='--')
P.show(ymin=0, ymax=5)
```

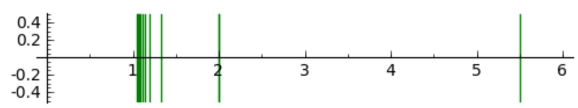
El programa da lugar al siguiente dibujo



Siguiendo la idea anterior, podemos ver también el ínfimo (o el supremo) de un conjunto dibujándolo, cuando sea posible

```
#
# ÍNFIMO DE {(-1)^n*n+1/n+n+1 CON n NATURAL} (Sage)
#
#------------------------------------------------------------
N = 10
f(n) = (-1)^n*n+1/n+n+1
heigh = 0.5
c=line([(f(1),-heigh), (f(1),heigh)], color='green')
for n in range(1,N+1):
    c = c + line([(f(n),-heigh), (f(n),heigh)], color='green')
c.show(aspect_ratio = 1,xmin=0, xmax=6)
```





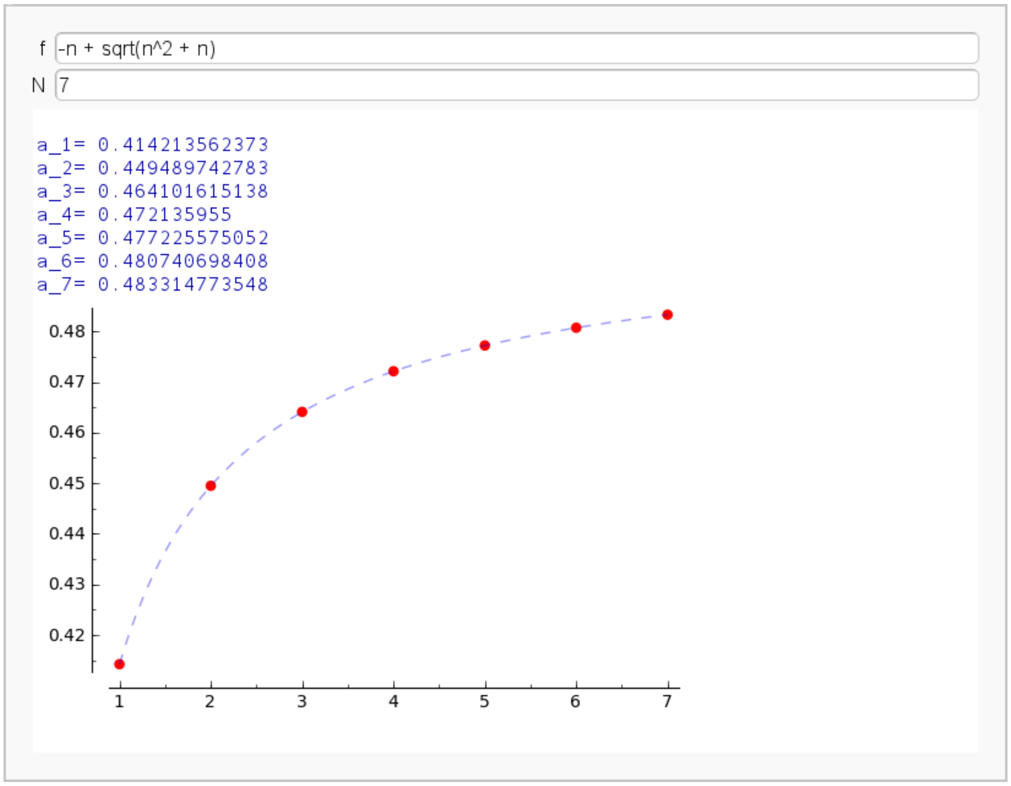
El primer dibujo corresponde al programa tal como está y el segundo a tomar `N = 20`.

9.2. Programas del tema 2

Representación gráfica de sucesiones. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se puede considerar a menudo como una función real f restringida a valores enteros. Ello permite visualizar la sucesión como una gráfica.

```
#
# CALCULA TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN Y LOS DIBUJA  (Sage)
#
#-----------------------------------------------
var("n")
@interact
def _(f = sqrt(n^2+n)-n, N=int(7)):
    for x in range(1,N+1):
        print 'a_'+str(x)+'=',float(f(x))
    li  = [(x,f(x)) for x in range(1,N+1)]
    show( plot(f,1,N,linestyle='--',alpha=0.4)
        +list_plot(li,rgbcolor=(1,0,0),pointsize=30) )
```

La línea de trazos corresponde a la función y los puntos a la sucesión.



Algunas sucesiones especiales. Una de las sucesiones más populares es la llamada *sucesión de Fibonacci* definida de manera recurrente como

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{con } F_1 = F_2 = 1.$$

En el problema (H2-12b) se pide hallar el límite de F_{n+1}/F_n. El resultado es $(1+\sqrt{5})/2$. Este número se conoce como la *razón aúrea*.

```
#
# LA SUCESIÓN DE FIBONACCI RESPONDE A LA FÓRMULA   (Python)
#       a_{n+1}=a_n+a_{n-1}      con a_1=1 y a_2=1
# el cociente a_{n+1}/a_n tiende a (1+\sqrt{5})/2 (llamado razón aúrea)
#
nmax=20
a_n, a_n_mas_1 = 1, 1
for n in range(0,nmax):
        print 'a_'+str(n+1)+'='+str(a_n),
        print '\ta_'+str(n+2)+'/a_'+str(n+1)+'='
               +str(float(a_n_mas_1)/float(a_n))
        a_n, a_n_mas_1 = a_n_mas_1, a_n+a_n_mas_1
```

Nótese en la última línea la comodidad con que Python permite intercambiar variables. Otros lenguajes como C o Java necesitarían una variable extra.

En el problema (H2-6) se habla de un eficiente método para calcular raíces cuadradas con precisión arbitraria (H2-7). Este algoritmo tiene una explicación plena en relación con la interpretación geométrica de las derivadas.

El siguiente programa permite jugar con diferentes valores iniciales y números de iteraciones. El parámetro `ncif` se puede modificar para visualizar más cifras decimales.

```
#
# RECURRENCIA DEL PROBLEMA 6 DE LA HOJA 2   (Sage)
# (método para calcular raíces cuadradas)
#
#--------------------------------------------------------------
@interact
def _(t1=text_control('Número'), x=float(4.0),
                        t2=text_control('Iteraciones'), n=int(1) ):
    ncif = 15
    a = N(2.0,digits=ncif)
    for k in range(1,n+1):
        print '\t\ta_'+str(k)+'=', N(a,digits=ncif)
        a = (a+x/a)/2.0
    print '------------------------------------------------------'
    print 'valor "exacto"\t   =',N(sqrt(x),digits=ncif)
```

Tomando como número `x=3.0` y `n=5` como iteraciones, el resultado es:

```
          a_1= 2.00000000000000
          a_2= 1.75000000000000
          a_3= 1.73214285714286
          a_4= 1.73205081001473
          a_5= 1.73205080756888
------------------------------------------------------
valor "exacto" = 1.73205080756888
```

Es decir, no hay ninguna diferencia con el valor exacto en 15 cifras utilizando sólo 5 iteraciones.

En el problema (H2-3) se considera la sucesión $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$. Se prueba que converge a 2. El siguiente programa muestra un número de términos arbitrario de la sucesión.

```
#
# RECURRENCIA DEL PROBLEMA 3 DE LA HOJA 2  (Sage)
#
#--------------------------------------------------------------
@interact
def _(t2=text_control('Número de iteraciones'), n=int(1)):
    ncif = 15
    a = N(sqrt(2),digits=ncif)
    for k in range(1,n+1):
        print 'a_'+str(k)+'=', a
        a = sqrt(2*a)
```

Velocidad de convergencia. Una serie converge si las sumas parciales se acercan indefinidamente a un número. Eso lleva a pensar que en la práctica el estudio de la convergencia de series puede suplirse con unas cuantas operaciones en un calculadora. El siguiente programa muestra que incluso en ejemplos muy sencillos la velocidad a la que las sumas parciales tienden a ∞ puede ser tan lenta que nos haría creer erróneamente en la convergencia.

```
#
# LAS SERIES \SUM 1/n Y \SUM 1/nLOG(n+1) TIENDEN A oo MUY LENTAMENTE  (Sage)
#
#--------------------------------------------------------------
@interact
def _(t2=text_control('Número de términos'), N=int(100)):
    s1 = 0.0
    s2 = 0.0
    for n in range(1,N+1):
        s1 += 1.0/n
        s2 += 1.0/n/log(n+1.0)
    print '\SUM 1/n=>',s1
    print '\SUM 1/nLOG(n+1)=>',s2
```

Escogiendo por ejemplo como número de términos `N=100`

```
\SUM 1/n=> 5.18737751763962
\SUM 1/nLOG(n+1)=> 3.37013412077757
```

Más curioso todavía es que sea posible en ocasiones aumentar la velocidad de convergencia de una serie

En el problema (H2-14) se indica un sencillo método para las series $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ tales que el criterio de Leibniz asegure su convergencia.

El siguiente programa ilustra la aceleración de $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. Un vistazo a sus líneas debería dar una idea de cómo simplificar el problema (H2-14).

```
#
# LA SERIE \SUM (-1)^n/n CONVERGE MUY LENTAMENTE        (Sage)
#   (problema 14 de la hoja 2: aceleración de series)
#
#--------------------------------------------------------------
@interact
def _(t2=text_control('Número de términos'), n=int(10)):
    s = 0.0
    sa = 0.0
    saa = 0.0
    signo = 1
    k=1
    while k < n+1:
        s += 1.0/k; k += 1; s += -1.0/k; k += 1

    if n %2 != 0:
        s += 1.0/(k-1)
        signo = -1

    print '\SUM (-1)^n/n=>\t',s
```

```
    print '-----------------------------------------'
    print 'Valor "exacto"\t',N(log(2))

    sa = s + 0.5*signo/(n+1)
    print '-----------------------------------------'
    print 'Suma acelerada"\t',sa

    saa = s  + signo*(0.75/(n+1) - 0.25/(n+2))
    print '-----------------------------------------'
    print 'Acel. doble"\t',saa
```

Con `n=40` términos se obtiene

```
\SUM (-1)^n/n=> 0.680803381792694
---------------------------------------
Valor "exacto"  0.693147180559945
---------------------------------------
Suma acelerada" 0.692998503743914
---------------------------------------
Acel. doble"    0.693143683767142
```

En suma, la diferencia con respecto al valor real sin acelerar la serie es $1{,}23 \cdot 10^{-2}$ aproximadamente. Si se acelera una vez pasa a ser $1{,}49 \cdot 10^{-4}$ y acelerando dos veces, se reduce a $3{,}5 \cdot 10^{-6}$. Nótese que en el programa la aceleración no incrementa el número de operaciones porque se realiza a partir de la suma parcial de la serie.

Sucesiones y probabilidades. Consideremos la sucesión tal que su término n-ésimo es el primer dígito (el más significativo) de 2^n. Los primeros términos son

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 1, \dots$$

A pesar de que hay una estrecha correlación entre cada término y el siguiente, la imprevisible acumulación de las llevadas mueve a pensar que estos números se distribuyen al azar en $\{1, 2, 3, \dots\ 9\}$. Sin embargo la lista anterior no muestra ningún 9 y una lista más extensa prueba que éstos son realmente escasos. La llamada *ley de Benford*, aplicable a otros procesos exponenciales (según parece también a la población de las ciudades), afirma que la probabilidad de obtener el dígito k es $\log_{10}(1 + 1/k)$ donde $\log_{10}$ representa el logaritmo en base 10. Su demostración se basa en tomar logaritmos en $k \cdot 10^r \leq 2^n < (k + 1)10^r$.

Examinemos los resultados reales con respecto a los previstos por la ley de Benford.

```
#
# LA LEY DE BENFORD DICE QUE LA PROBABILIDAD DE QUE UNA   (Python)
# POTENCIA DE DOS COMIENCE POR EL DÍGITO k ES LOG(1+1/k)
# DONDE LOG ES EL LOGARITMO DECIMAL

import math

digi = [0,0,0,0,0,0,0,0,0]

n=raw_input('Introduce el número de potencias de dos: ')
```

```
# Calcula las potencias y examina el primer dígito
p2=1
for i in range(0,int(n)):
        p2 *= 2
#        print p2
        lead = int(str(p2)[0])-1
        digi[lead] = digi[lead]+1

# Imprime el resultado
print 'De las '+str(n)+' primeras potencias de 2:'
for i in range(0,9):
        print '\t'+str(digi[i])+' comienzan por '+str(i+1),
        print '\t(ley de Benford: ',
        print str(float(n)*math.log(1.0+1.0/float(i+1))/math.log(10.0))+')'
```

Para 100 términos la previsión es bastante certera.

```
De las 100 primeras potencias de 2:
        30 comienzan por 1      (ley de Benford:  30.1029995664)
        17 comienzan por 2      (ley de Benford:  17.6091259056)
        13 comienzan por 3      (ley de Benford:  12.4938736608)
        10 comienzan por 4      (ley de Benford:  9.69100130081)
        7 comienzan por 5       (ley de Benford:  7.91812460476)
        7 comienzan por 6       (ley de Benford:  6.69467896306)
        6 comienzan por 7       (ley de Benford:  5.79919469777)
        5 comienzan por 8       (ley de Benford:  5.11525224474)
        5 comienzan por 9       (ley de Benford:  4.57574905607)
```

Acabamos de ver que una sucesión sencilla da lugar a una modelo de probabilidad. En otro sentido es también posible utilizar la probabilidad para definir sucesiones "aleatorias". Lo curioso de algunas de ellas es que dan aproximaciones a ciertos conjuntos "fractales" estéticamente atractivos.

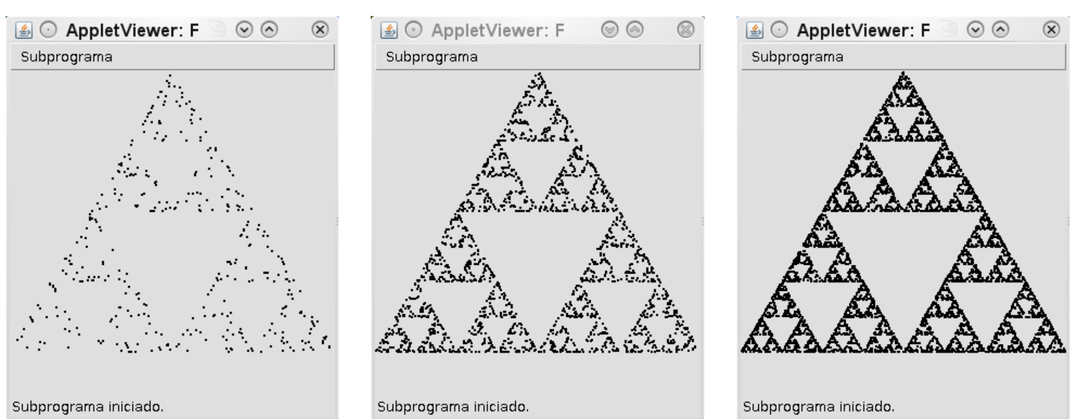
Una de las situaciones más simples y conocidas consiste en tomar (x_1, y_1) como el vértice de un triángulo equilátero y definir (x_{n+1}, y_{n+1}) como el punto medio entre (x_n, y_n) y uno de los vértices elegido al azar.

A pesar de que la definición es puramente aleatoria, al dibujar los pares (x_n, y_n) en el plano se obtiene siempre una aproximación del mismo conjunto, llamado *triángulo de Sierpiński*.

```
import java.awt.*;
import java.applet.*;
import java.util.*;

public class Fractal extends Applet{
    // Este programa aproxima el triángulo de Sierpinski.           (Java)
    // Consiste en iterar aleatoriamente homotecias de razón 1/2
    // centradas en los vértices de un triángulo equilátero.

    public void paint (Graphics g) {
        double escala=300.0;
        double x=0.0;
        double y=0.0;
```

```
        Random alea=new Random();

        // En condiciones ideales 6000* 10 milisegundos = un minuto
        for(int j=0; j<6000; j++){
            // Elige un número al azar = 1,2,3
            int i=Math.abs(alea.nextInt())%3+1;
            if (i==1){
                // Si i=1, homotecia de razón 1/2 por (1,0)
                x+=1.0;
            }
            if (i==2){
                // Si i=1, homotecia de razón 1/2 por (1/2,raíz de 3/2)
                x+=0.5;
                y+=0.8660254;
            }
        // Efectúa la homotecia
        x*=0.5;
        y*=0.5;
        // Espera 10 milisegundos
        pause(10);
            //  escala*(0.8660254-y) en lugar de escala*y porque en
            // java el eje Y apunta hacia abajo
            // y queremos que apunte hacia arriba
            g.drawRect((int)(escala*x),(int)(escala*(0.8660254-y)),1,1);
        }
    }
    public static void pause(int n){
        // Espera n milisegundos
        try{
            Thread.sleep(n);
        }
        catch(InterruptedException e){
        }
    }
}
```

El resultado en diferentes momentos es:



El programa se compila bajo el nombre `Fractal.java` y es necesario construir la siguiente minipágina web `Fractal.html` para lanzarlo con `appletviewer Fractal.html` o abrirlo con un navegador.

```
<HTML>
<APPLET CODE=Fractal.class WIDTH=300 HEIGHT=300></APPLET>
</HTML>
```

9.3. Programas del tema 3

El método de la bisección. El método de la bisección es muy sencillo de programar. Los siguientes ejemplos son programas en Python y en C que aplican el método a $\operatorname{sen} x - e^{-x}$ en $[0,1]$ y a $x - 10 \operatorname{sen} x$ (H3-5) en $[8,9]$, respectivamente. Es fácil cambiar los parámetros.

En `http://wiki.sagemath.org/interact/calculus#RootFindingUsingBisection` hay una implementación del método de la bisección en Sage gráficamente muy atractiva.

```
#
# MÉTODO DE LA BISECCIÓN PARA LA FUNCIÓN f(x) EN [0,1]   (Python)
# [a,b] intervalo n= número de pasos

import math

def f(x):
        return -math.exp(-x)+math.sin(x)

def bisec(n, a, b):
        for i in range(n):
                med = (a+b)/2.0;
                print 'Intervalo en x ['+str(a)+','+str(b)+']\t',
                      'Intervalo en y ['+str(f(a))+','+str(f(b))+']'
                if f(a)*f(med)<=0:
                        b = med
                else:
                        a = med

bisec(10, 0.0, 1.0)
```

```
/*
Método de la bisección    (C)
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Función */
double f(double x){
//      return exp(x)*(x+2)-1;
        return x-10.0*sin(x);
}

/* n= número de pasos [a,b]= intervalo */
```

```
void bisec(int n, double a, double b){
        int i;
        double med;
        for(i=0;i<n;++i){
                med = (a+b)/2.0;
                printf("i=%d, [%f,%f]-->[%.10f,%.10f]\n",i,a,b,f(a),f(b) );
                if( f(a)*f(med)<=0 ) b = med;
                else a = med;
        }
}

main(){
        bisec(10,8.0,9.0);
}
```

La salida de este programa es:

```
i=0, [8.000000,9.000000]-->[-1.8935824662,4.8788151476]
i=1, [8.000000,8.500000]-->[-1.8935824662,0.5151288738]
i=2, [8.250000,8.500000]-->[-0.9760421024,0.5151288738]
i=3, [8.375000,8.500000]-->[-0.2981272392,0.5151288738]
i=4, [8.375000,8.437500]-->[-0.2981272392,0.0922067215]
i=5, [8.406250,8.437500]-->[-0.1071168380,0.0922067215]
i=6, [8.421875,8.437500]-->[-0.0084841339,0.0922067215]
i=7, [8.421875,8.429688]-->[-0.0084841339,0.0416053111]
i=8, [8.421875,8.425781]-->[-0.0084841339,0.0164964309]
i=9, [8.421875,8.423828]-->[-0.0084841339,0.0039900890]
```

En (H3-10) se indica un algoritmo para adivinar números basado en el método de de la bisección. En este programa se introduce una componente de azar en la elección inicial, perdiendo un poco de eficiencia, para que el juego sea menos monótono.

```
#
# ADAPTACIÓN DEL MÉTODO PARA ADIVINAR NÚMEROS    (Python)
# DEL PROBLEMA 10 DE LA HOJA 3 CON LA VARIANTE
# DE QUE EL PRIMER NÚMERO SE ELIGE AL AZAR
#
# PARECE QUE EN ALGÚN CASO EXTRAÑO EL NÚMERO DE
# INTENTOS PODRÍA SER 11 (inicial 346, pensado 1000)

import random

def readn(a,b,c):
        global _inte
        _inte += 1
        print '\nIntento ', _inte
        print '¿Es el '+str(c)+'?',
        ans = 'g'
        while (ans not in '<>=') or (ans == ''):
                ans = raw_input("Escribe si tu número es <, > o =\t")
        if ans == '<':
                return a, c
```

```
        if ans == '>':
                return c, b
        return c, c

_inte = 0
print 'Piensa un número entre 1 y 1024'
print 'Intentaré acertarlo en a lo más 10 intentos'
a,b = readn(0,1026,random.randrange(2,1023))

while b-a>1:
        a,b = readn(a,b,(a+b)//2)
if a == b:
        print '\n¡ACERTÉ!\n'
else:
        print 'Me temo que te has equivocado o has hecho trampas'
```

El diálogo tras pensar el número 300 fue el siguiente:

```
Piensa un número entre 1 y 1024
Intentaré acertarlo en a lo más 10 intentos

Intento  1
¿Es el 7? Escribe si tu número es <, > o =      >

Intento  2
¿Es el 516? Escribe si tu número es <, > o =    <

Intento  3
¿Es el 261? Escribe si tu número es <, > o =    >

Intento  4
¿Es el 388? Escribe si tu número es <, > o =    <

Intento  5
¿Es el 324? Escribe si tu número es <, > o =    <

Intento  6
¿Es el 292? Escribe si tu número es <, > o =    >

Intento  7
¿Es el 308? Escribe si tu número es <, > o =    <

Intento  8
¿Es el 300? Escribe si tu número es <, > o =    =

¡ACERTÉ!
```

9.4. Programas del tema 4

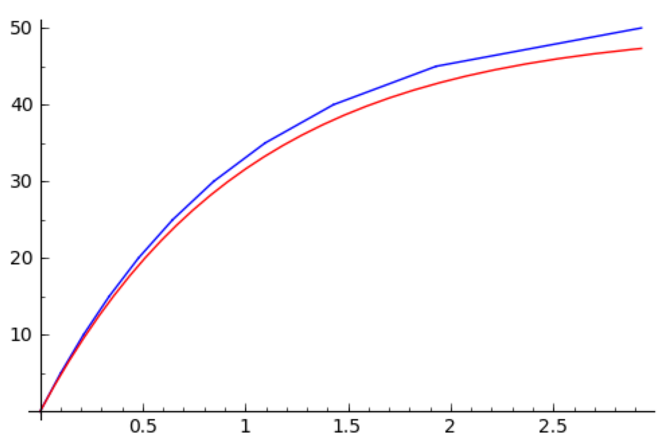
Aproximaciones de la derivada. Un conocido chiste cuenta que un conductor por una carretera secundaria ve una señal que pone “Reduzca a $50km$”. El conductor reduce su velocidad a $50km/h$. Sucesivamente va encontrándose con señales de “Reduzca a $40km$”, “Reduzca a $30km$", "Reduzca a $20km$" y "Reduzca a $10km$". Después de ir a velocidad de tortuga se encuentra finalmente un cartel que dice "Bienvenidos a Reduzca".

Parece claro que si el número de señales es mayor, el tiempo que se necesita para llegar a Reduzca es también mayor. Matemáticamente cabe preguntarse qué ocurriría si hubiera un continuo de señales, es decir, si en cada punto el conductor redujese su velocidad al valor dado por su distancia a Reduzca. Aunque parezca un problema ocioso, de una forma parecida se inventaron los logaritmos neperianos. Para el continuo de señales la posición en función del tiempo es $x(t) = 50 - 50e^{-t}$, que resuelve $x'(t) = 50 - x(t)$, así que deberían pasar $t = -\log(1 - x/50)$ horas para avanzar x kilómetros y nunca se llegaría a destino pues $-\log(1-x/50) \to +\infty$ cuando $x \to 50^-$.

Intuitivamente parece claro que poner muchas señales aproxima bien esta solución límite y esto es lo que ilustra con una gráfica el siguiente programa.

```
#
# CHISTE DE BIENVENIDOS A REDUZCA                (Sage)
#
# n = Número de señales
n = 10
h = 50.0/n
a = 0.0
b = h/50.0
l = line([(a, 50.0*a), (b, 50.0*b)])

for k in range(1,n):
    a = b
    b += h/(50-k*h)
    l+=line([(a, h*k), (b, h*(k+1))])

f = 50.0*(1.0-exp(-x))
show(l+f.plot(0,b, color='red'))
```

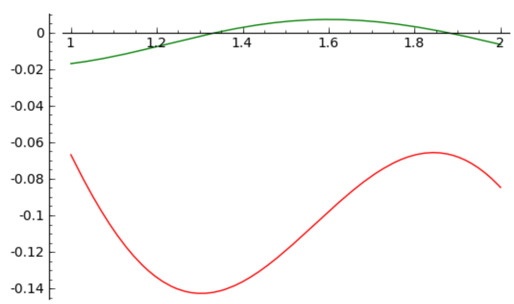
Con 10 señales la aproximación ya es bastante buena.



El problema (H4-12) sugiere que curiosamente aproximar $f'(x)$ por $\big(f(x+h)-f(x-h)\big)/2h$ con h pequeño es más ventajoso que aproximar por $\big(f(x+h)-f(x)\big)/h$, a pesar de que esta cantidad es más natural por la definición de derivada.

```
#
# APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA     (Sage)
# PROBLEMA 12 DE LA HOJA 4
#
#----------------------------------------------

var('x')
@interact
def _(f = cos((x+1)*sin(x)), a = 1, b = 2, h = 0.1 ):
    p = plot( diff(f,x)(x=t)-(f(x=t+h)-f(x=t))/h ,t, a, b, color= 'red')
    p += plot( diff(f,x)(x=t)-(f(x=t+h)-f(x=t-h))/h/2 ,t, a, b, color= 'green')
    show(p)
```

Las gráficas de los errores cometidos con ambas aproximaciones (verde la primera y roja la segunda) para $f(x) = \cos\big((x+1)\sin x\big)$ son bastante ilustrativas.



Derivadas y tangentes. El siguiente programa simplemente dibuja una gráfica y su tangente alrededor de un punto dado.

```
#
# DIBUJA UNA GRÁFICA EN [a-1/2,a+1/2] Y SU TANGENTE EN a   (Sage)
#
#----------------------------------------------

var('x, t')
@interact
def _(f = exp(x-log(x)*cos(x)), a = 1):
    p = plot( f ,x, a-0.5,a+0.5, thickness=2)
    p += plot( diff(f,x)(x=a)*(t-a)+f(x=a) ,t, a-0.47,a+0.47, color='red')
    show(p)
```

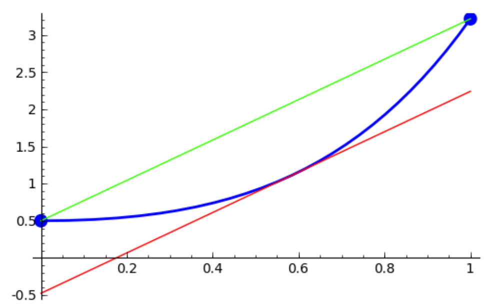
9.5. Programas del tema 5

Dibujando el teorema del valor medio. La idea geométrica del teorema del valor medio es muy sencilla. Simplemente dice que hay al menos una tangente paralela a la secante.

Este programa hace el dibujo tras elegir una función y un intervalo.

```
#
# EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO   (Sage)
#
#----------------------------------------------
var('x,t')
@interact
def _(f = x^2*exp(x)+1/2, a = 0, b = 1 ):
    c = find_root( diff(f,x)-(f(x=b)-f(x=a))/(b-a), a, b)
    p = plot( f ,x, a, b, thickness=2)
    p += point((a,f(x=a)),pointsize=80,rgbcolor=(0,0,1))
    p += point((b,f(x=b)),pointsize=80,rgbcolor=(0,0,1))
    p += plot( diff(f,x)(x=c)*(t-c)+f(x=c) ,t, a, b, rgbcolor=(1,0,0))
    p += line([(a,f(x=a)), (b,f(x=b))], rgbcolor=(0.2,1,0))
    show(p)
```

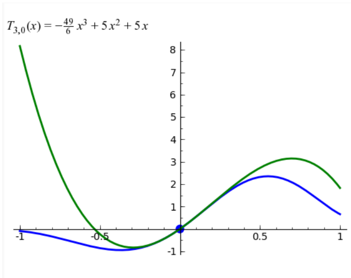
Con los datos por defecto:

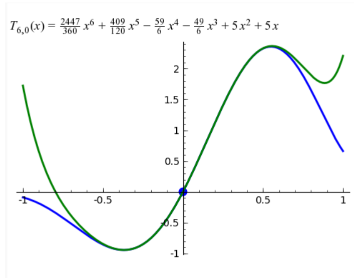


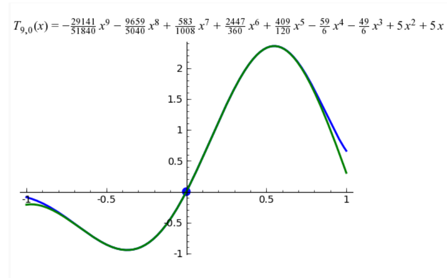
Aproximación por polinomios de Taylor. Para funciones “normales” los polinomios de Taylor dan aproximaciones muy buenas en las cercanías del punto. Este programa permite experimentar cambiando la función, el punto, el tamaño del intervalo y el orden. También imprime el polinomio de Taylor exactamente lo cual puede ser de interés para comprobar soluciones.

```
#
# APROXIMACIONES DE TAYLOR   (Sage)
#
#----------------------------------------------
var('x')
@interact
def _(f = exp(x)*(x+sin(4*x)), a = 0, r=1, order=(1..10)):
    pt = f.taylor(x,a,order)
    html('$T_{%s,%s}(x)=%s$' %(order,a,latex(pt)))
    p = plot(f, a-r, a+r, thickness=2)
    p += point((a,f(x=a)),pointsize=60,rgbcolor=(0,0,1))
    p += plot(pt, a-r, a+r, color='green', thickness=2)
    show( p )
```

Los siguientes dibujos corresponden a órdenes 3, 6 y 9, respectivamente:







Aproximaciones polinómicas en aplicaciones gráficas. En el problema (H5-15) se indica cómo realizar una aproximación cuadrática de la gráfica de una función f simplemente seleccionado tres puntos $t_0 = a$, $t_1 = (a+b)/2$ y $t_2 = b$, y considerando la parábola (o la recta) que pasa por $\big(t_i, f(t_i)\big)$. El mismo argumento se puede aplicar para aproximar curvas parametrizadas $\big(x(t), y(t)\big)$, las cuales no siempre corresponden a gráficas de funciones.

Intuitivamente parece que si tomásemos más valores de t_i y consecuentemente empleamos polinomios de orden superior, las cosas deberían ir mejor. Curiosamente la práctica muestra que ocurre más bien lo contrario. A esta extraña situación se le llama *fenómeno de Runge*. La explicación ya se apunta en (H5-15b). El error depende en el caso general de una derivada de orden muy alto y ésta puede ser gigantesca.

La siguiente aplicación Java permite arrastrar los puntos con el ratón. Para cambiar el número de puntos basta modificar la “constante” `N`.

```java
import java.awt.*;
import java.applet.Applet;

public class Lagrange extends Applet {
        // Este programa interpola entre uno cuantos puntos,          (Java)
        // que se pueden arrastrar con el ratón, usando polinomios.
        // El número de puntos se modifica cambiando N más abajo.

        Point[] puntos; //Puntos de interpolación
        int pcurso;     // Número del punto en curso
        Image lienzo;
        Graphics grafico;
        // Constantes
        static final int N = 3; // Número de puntos
        static final int R = 8; // R de los puntos

        public void init() {
                puntos = new Point[N];
                pcurso = N; // Desactiva el punto en curso
                // Equidistribuye
                for(int i=1;i < N+1;++i)
                        puntos[i-1] = new Point( i*(int)(
                          size().width/(double)(N+1)), (int)(size().height/2));
                // Crea imagen ajustada al tamaño especificado en  <APPLET>
                lienzo = createImage(size().width,size().height);
                grafico = lienzo.getGraphics();
        }
```

```
        // Calcula el valor del polinomio de Lagrange j
        private double lagr(int i, double t){
                double pr=1.0;
                for(int j=0; j < N; ++j)
                        if(j != i) pr*=(t*(N-1.0)-j)/(i-j);
                return pr;
        }

        public void paint(Graphics g) {
                // Pinta el segmento (px,py), (qx,qy)
                double qx=puntos[0].x, qy=puntos[0].y, px, py;

                // Rellena de blanco
                grafico.setColor(Color.white);
                grafico.fillRect(0,0,size().width,size().height);
                grafico.setColor(Color.black);

                // Dibuja los puntos
                for(int i=0;i < N;++i)
                        grafico.fillOval(puntos[i].x-R/2,puntos[i].y-R/2,R,R);

                // Los interpola
                for(double t=0.0; t<=1.0; t+=0.01){
                        // nuevo-> antiguo
                        px=qx; py=qy; qx=0.0; qy=0.0;
                        // Calcula nuevo
                        for(int i=0; i<N; ++i){
                                qx+=(double)(puntos[i].x)*lagr(i,t);
                                qy+=(double)(puntos[i].y)*lagr(i,t);
                        }
                        grafico.drawLine((int)(px-.5),
                                  (int)(py-.5),(int)(qx-.5),(int)(qy-.5));
                }
                grafico.drawLine((int)qx,(int)qy,puntos[N-1].x,puntos[N-1].y);
                g.drawImage(lienzo,0,0,this); // Al lienzo
        }

        public void update(Graphics g) {
                paint(g);
        }
        // Sigue más abajo
```

El resto del programa son *listeners* para leer el ratón que están anticuados (aparecen *deprecation warnings* al compilar) pero que funcionan. Alguien con conocimientos de Java podría reemplazar estas funciones de `java.awt` por otras más modernas.

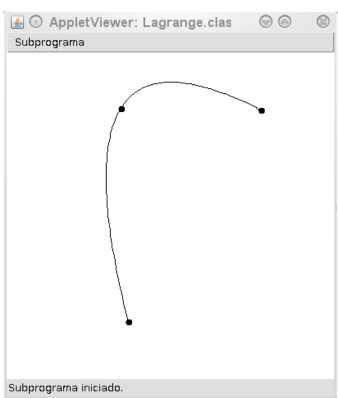
```
        // Continúa el listado anterior
        public boolean mouseDown(Event evt, int x, int y) {
                Point p = new Point(x,y);
                for(int i=0;i < N;++i)
                        if( Math.abs(p.x-puntos[i].x)
                            + Math.abs(p.y-puntos[i].y) < R )
```

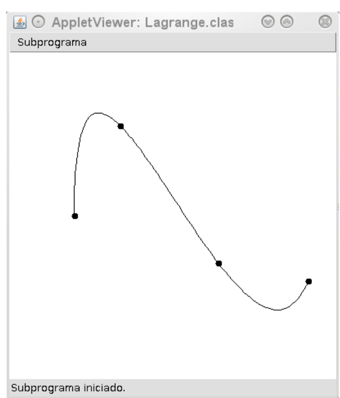
```
                    pcurso=i; // punto i en curso
            return true;
        }

        public boolean mouseDrag(Event evt, int x, int y) {
            if(pcurso < N) { // Si hay un punto activado
                puntos[pcurso].move(x,y);
                repaint(); // actualiza
            }
            return true;
        }

        public boolean mouseUp(Event evt, int x, int y) {
            pcurso = N; // Suelta punto
            return true;
        }
}
```

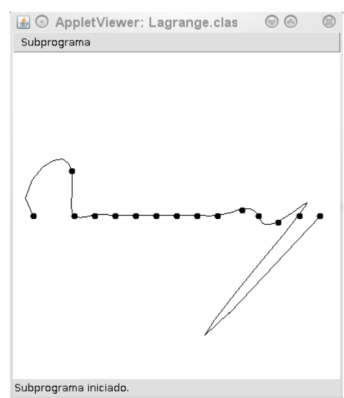
El programa requiere el nombre `Lagrange.java` y para para lanzarlo con `appletviewer` o abrirlo con un navegador es necesario construir un fichero HTML, `Lagrange.html`, conteniendo

```
<HTML>
<APPLET code="Lagrange.class" height="400" width="400"></APPLET>
</HTML>
```

Se muestran algunos resultados para `N=3`, `N=4` y `N=15`. Los dos primeros son razonables, mientras que el último muestra la gran sensibilidad al mover los puntos que hace inútil la aproximación.







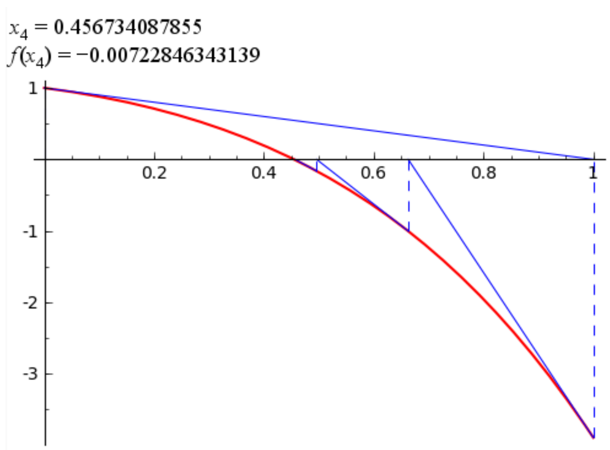
9.6. Programas del tema 6

El método de Newton. Éste es el tema de este capítulo que se presta más a cálculos numéricos y verdaderamente los resultados son bastante espectaculares. Parece mentira que con tan pocas operaciones se obtengan resultados tan precisos.

El siguiente programa aplica el método de Newton y además muestra la interpretación geométrica.

```
#
# MÉTODO DE NEWTON   (Sage)
#
#---------------------------------------------
var('x')
@interact
def _(f = x+cos(x^2)-2*x*exp(x), a = 0, b = 1, x0 = 0, n = 4 ):
    p = plot( f ,x, a, b, thickness=1.5, rgbcolor=(1,0,0))
    for i in range(n):
        x1 = x0 - f(x=x0)/diff(f,x)(x=x0)
        p += line([(x0,f(x=x0)), (x1,0)], thickness=0.75)
        p += line([(x0,f(x=x0)), (x0,0)], linestyle = '--', thickness=0.75)
        x0 = x1
    html('$x_%s = %s$'%(n,float(x1)))
    html("$f(x_%s) = %s$"%(n,float(f(x=x1))))
    show(p)
```

Los datos por defecto dan lugar al siguiente resultado:



A continuación se incluye una variante en Python puro que permite elegir funciones de entre una lista

```
#
# MÉTODO DE NEWTON PARA UNA FAMILIA DE FUNCIONES        (Python)
#
import math

def flin(x,a,b):
    return a*x + b
def flind(x,a,b):
    return a

def fexp(x,a,b):
    return math.exp(x) + a*x + b
def fexpd(x,a,b):
    return math.exp(x) + a
```

```
def fcub(x,a,b):
    return x*x*x + a*x + b
def fcubd(x,a,b):
    return 3*x*x + a

def fcos(x,a,b):
    return math.cos(x) + a*x + b
def fcosd(x,a,b):
    return -math.sin(x) + a

LF=[(flin ,flind),(fexp,fexpd),(fcub,fcubd),(fcos,fcosd)]

print 'Elige una función:'
print '1) ax+b    2) e^x+ax+b    3) x^3+ax+b    4) cos(x)+ax+b'
k, n = 0, 40
a, b, x = -0.125, 0.0, 26.5

while( (k<1) or (k>4) ):
    k = input('Número (1-4): ')
k-=1

a = input('Introduce a: ')
b = input('Introduce b: ')
x = input('Introduce x_0: ')
n = input('Introduce el número de interaciones: ')

print 0, x, LF[k][0](x,a,b)

for i in range(0,n):
    x = x - LF[k][0](x,a,b)/LF[k][1](x,a,b)
    print i+1, x, LF[k][0](x,a,b)

raw_input()
```

Al ejecutarlo, un posible resultado es:

```
Elige una función:
1) ax+b    2) e^x+ax+b    3) x^3+ax+b    4) cos(x)+ax+b
Número (1-4): 4
Introduce a: -1
Introduce b: 0
Introduce x_0: 0.5
Introduce el número de interaciones: 5
0 0.5 0.37758256189
1 0.755222417106 -0.0271033118575
2 0.73914166615 -9.46153806177e-05
3 0.739085133921 -1.18097787105e-09
4 0.739085133215 0.0
5 0.739085133215 0.0
```

Obviamente no hay que tomar literalmente el error cero de las últimas iteraciones, simplemente excede la precisión de la máquina.

Un problema de mínimos. En (H6-6) se propone averiguar las dimensiones de un cercado rectangular pegado a una pared (por lo que no es necesario construir uno de los lados) de forma que el área sea 20 metros cuadrados y el perímetro mínimo.

La siguiente *applet* permite jugar interactivamente con las dimensiones del cercado para comprobar la solución del problema.

```java
import java.awt.*;
import java.lang.Math.*;

public class cercado extends java.applet.Applet {
        // PROBLEMA 6 DE LA HOJA 6      (Java)
        Point punto;

        public void init() {
                punto = new Point(300,100);
                setBackground(Color.white);
        }

        public void paint(Graphics g) {
                double x = (punto.x/50.0);  double y = (punto.y/50.0);
                String temp;

                // Borra
                g.setColor(Color.white);
                g.fillRect(0,0,size().width,size().height);

                // Cercado
                g.setColor(Color.green);   g.fillRect(2,5,punto.x,punto.y-3);
                g.setColor(Color.black);   g.fillOval(punto.x-5,punto.y-5,10,10);
                g.drawRect(1,2, punto.x, 3); g.drawRect(1,0, punto.x, punto.y);
                // Información
                g.setFont(new Font("Serif",Font.BOLD,17));
                g.drawString("Horizontal:  " + x, 40, 215);
                temp = "" + (x+2*y); // Redondea
                temp = temp.substring(0, Math.min(6, temp.length()));
                g.drawString("L = " + temp, 300, 215);
                g.drawString("Vertical: " + y, 40, 235);
                temp = "" + (x*y); // Redondea
                temp = temp.substring(0, Math.min(6, temp.length()));
                g.drawString("Área = "+ temp, 300, 235);
        }

        public void update(Graphics g) {
                paint(g);
        }

        public boolean mouseDrag(Event evt, int x, int y) {
                punto.move(x,y);
                repaint(); // actualiza
                return true;
        }
}
```

El fichero HTML que se ha utilizado para lanzar `cercado.class`, el resultado de compilar el código anterior, es:

```
<HTML>
<APPLET CODE=cercado.class WIDTH=500 HEIGHT=250></APPLET>
</HTML>
```

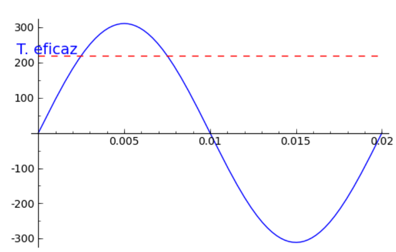
9.7. Programas del tema 7

Valor medio y tensión eficaz. Normalmente entendemos la media de un conjunto discreto de datos como su suma dividida entre el número de ellos. La generalización natural al mundo continuo es que la "media" de una función f en un intervalo $I = [a, b]$ es $|I|^{-1} \int_a^b f$. En Matemáticas se consideran otras medias que involucran potencias de f sobre todo f^2. Como se menciona en (H7-14), una media de este tipo se utiliza cuando se habla de la tensión (voltaje) de un enchufe. En términos generales, si $V = V(t)$ es la tensión como función del tiempo, que suponemos periódica de periodo T, entonces la *tensión eficaz* que se puede aprovechar para generar energía es realmente $\left(\frac{1}{T}\int_0^T V^2\right)^{1/2}$.

El siguiente sencillo programa simplemente dibuja la tensión y la tensión eficaz para el caso de un enchufe casero, ilustrando la solución de (H7-14).

```
# Tensión eficaz            (Sage)

T = 1/50
f = 220*sqrt(2)*sin(2*pi*x/T)

h = sqrt(integral(f^2/T, x, 0, T))
p = plot( f ,x, 0, T)
p += plot(h ,x, 0, T, color='red', linestyle='--')
p += text("T. eficaz",(T/40,h+20),fontsize=14 )
show(p)
```

A pesar de que un enchufe sea de 220V, en cada periodo su tensión alcanza 311.13V.



La regla de Simpson. En (H7-19) se describe la *regla de Simpson*, uno de los métodos más empleados para aproximar integrales, basada en dividir en $2n$ subintervalos el intervalo de integración y aplicar en cada uno de ellos la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

Allí se pide usar la regla de Simpson con 4 subintervalos para aproximar la integral $\int_0^1 e^x/(1+x)\,dx$. El siguiente programa realiza este cálculo, resultando 1.12543120467, y modificando el valor de n permite conseguir resultados más aproximados.

```
import math

def f(x):
        return math.exp(x)/(1.0+x)

n = 4
n = 2*(n/2) # Siempre par

a = 0.0
b = 1
h = (b-a)/n
s = f(b)-f(a)

for k in range(0,n,2):
        s = s + 2.0*f(a+k*h) + 4.0*f(a+(k+1)*h)
print 'Regla de simpson con', n, 'subintervalos:', s*h/3
```

Sumas de Riemann y sumas de series. Escribiendo una integral como límite de sumas de Riemann se pueden calcular algunos límites de aspecto espectacular. En (H7-20) por ejemplo se propone hallar

$$L = \lim a_n \qquad \text{con} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}.$$

Este programa calcula el valor de a_n para un n dado.

```
/*
a_n en el problema 20 de la hoja 7     (C)
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>


int main(int argc, char **argv)
{
    int n,k;
    double a=0.0;

    printf("Introduce un número natural\n");
    scanf("%d", &n);

    for (k = 0; k < n; ++k)
            a+=1.0/sqrt(n*(n+k+1));
    printf("\na_%d = %f\n",n,a);
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

Resolviendo (H7-20), $L = \int_0^1 dx/\sqrt{1+x} = 2\sqrt{2}-2 = 0.8284271\ldots$ y la salida del programa anterior para varios valores de n es:

```
a_10 = 0.814052          a_100 = 0.826965
a_20 = 0.821172          a_10000 = 0.828412
a_40 = 0.824783
```

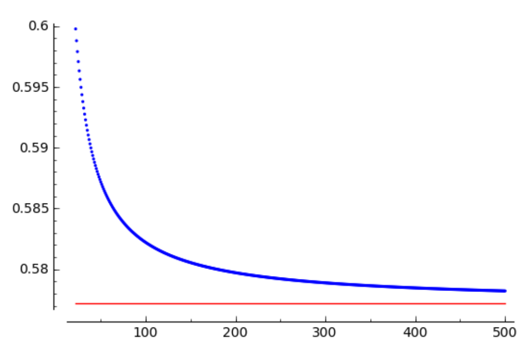
9.8. Programas del tema 8

La constante de Euler-Mascheroni. En el problema (H8-10) se prueba que la sucesión $a_k = \sum_{n=1}^{k} 1/n - \log k$ está acotada. Con un poco de ingenio se puede demostrar que de hecho converge. Su límite es $0.577215665\ldots$ y se le conoce como constante de Euler-Mascheroni. No se conoce si es un número racional.

La convergencia de la sucesión se ve al dibujar los puntos (k, a_k).

```
#
# CONSTANTE DE EULER-MASCHERONI          (Sage)
#

sk = 0 #suma parcial de la serie armónica
li = []
for k in range(500):
        sk += 1/(k+1)
        if k>20:
                li.append( (k+1,sk-log(1+k) ) )

p = list_plot(li,pointsize=4)
c = 0.577215665
p += line( [(li[0][0],c), (li[len(li)-1][0],c)], color ='red' )
show( p )
```

Claramente se observa un comportamiento asintótico



En (H8-10) se decía que la suma parcial mil millones de la serie armónica es menor que 22. De este dibujo se infiere que es menor que $0{,}58 + \log 10^9$ que vale alrededor de 21.30.

Una aproximación de π. En su magnífico libro "Cálculo infinitesimal", M. Spivak escribe: "Todo joven estudiante debería obtener por sí mismo algunos decimales de π". El problema (H8-23) no permite cumplir fácilmente este cometido sólo con lápiz y papel, pero da buenas aproximaciones sucesivas con una calculadora de bolsillo (por supuesto sin usar la tecla de π).

```c
/*
Aproximación de pi con el problema 23 de la hoja 8    (C)
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>


int main(int argc, char **argv){
    int n,k;
    double s=0.0,pot3=-1.0;

    printf("Introduce un número natural\n");
    scanf("%d", &n);

    for (k = 0; k < n; ++k)
            s+=(pot3/=-3.0)/(2*k+1)/(2*k+2);
    s+=log(2.0/sqrt(3.0));
    s*=18.0/sqrt(3.0);

    printf("%d términos -> %.15f\n",n,s);

    return EXIT_SUCCESS;
}
```

Sabemos que $\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$

```
3 términos -> 3.143495666425519        7 términos -> 3.141597891740408
4 términos -> 3.141204593928735        8 términos -> 3.141591291943092
5 términos -> 3.141679779335475        9 términos -> 3.141593017380298
6 términos -> 3.141571782652125        10 términos -> 3.141592554236627
```

Capítulo 10

Soluciones

10.1. Soluciones numéricas

1) *a*) $x \in (-2, 1) \cup (3, \infty)$. *b*) $x \in (-9/2, 1/2)$.

2) *a*) Falsa, por ejemplo $x = 1$, $y = 2$. *b*) Verdadera.

3) No admite una solución numérica. Se emplea $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

4) a) Acotado con $\inf = -\sqrt{3}$, $\sup = \sqrt{3}$.
b) Acotado superiormente (pero no inferiormente) con $\sup = \sqrt[5]{9}$.
c) Acotado con $\inf = -2$, $\sup = 1$.

---

5) a) Converge a 3
b) No converge.
c) Converge a 1/2.

6) No admite una solución numérica.
a) Se emplea $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$.
b) Se emplea $a_n \leq \sqrt{2a_n} \Leftrightarrow a_n \leq 2$. El límite es 2.

7) No admite una solución numérica.
a) Se prueba que si $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2$ entonces $\sqrt{t} \leq x_{n+1} \leq 2$.
b) Se comprueba que $\frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big) \leq x_n$ es cierto porque $\sqrt{t} \leq x_n$.
c) $\lim x_n = \sqrt{t}$ se obtiene tomando límites en la relación de recurrencia.

8) *a*), *b*) y *c*) convergen; *d*) no converge.

9) *a*) para $\alpha \leq 0$, *b*) para $\alpha > 1$ y *c*) para $\alpha < 0$.

10) Converge para $r \leq 1$.

11) Es monótona creciente, está acotada superiormente por $(1+\sqrt{5})/2$ e inferiormente por 1 y es convergente con límite $(1+\sqrt{5})/2$.

12) La sucesión converge si y sólo si $\alpha \geq -1/2$ y la serie converge si y sólo si $\alpha > 1/2$

---

13) Por ejemplo $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x$, $g(x) = \big(1+f(x)\big)/2$ y $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

14) a) No es posible porque $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.
b) No es posible porque $\lim_{x\to 2^+} = 3 \neq \lim_{x\to 2^-} = 4$.
c) Sí es posible definiendo $f(1) = f(-1) = \cos 1$.
d) Sí es posible definiendo $f(x) = 0$ en $(-\infty, 0] \cup [1/2, \infty)$.

15) Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ -1+x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -1+x & \text{si } x \geq 0 \\ 1+x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

---

16) Las derivadas son $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$ y $g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = 0$. Por otro lado $\nexists \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{h}$.

17) a) $y = e^{-1}x + 1$.
b) $y = x$.
c) $y = \sqrt{3}\big(x - \frac{\pi}{6}\big) - \frac{1}{2}$.
d) $y = -\frac{7}{25}x + \frac{29}{25}$.

18) $f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$.

---

19) $\big(f^{-1}\big)''(x) = \dfrac{-f''\big(f^{-1}(x)\big)}{\Big(f'\big(f^{-1}(x)\big)\Big)^2 f'\big(f^{-1}(x)\big)}$.

20) *a*) una; *b*) una; *c*) tres.

21) Para f, $T_{3,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Para g, $T_{3,0}(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{16} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{768}$.

22) *a*) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}$ que converge en $-1 \leq x \leq 1$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n+5}}{(2n+1)!}$ que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

---

23) a) $\pi^2/2$; b) 4; c) 1; d) a.

24) Los lados perpendiculares a la pared miden $\sqrt{10}$ y el otro $2\sqrt{10}$.

25) El dominio de esta función es $(0,\infty)$. Decrece en $(0, e^{-1})$ y crece en (e^{-1},∞) alcanzando un mínimo global en $x = e^{-1}$. Es convexa en todo su dominio por tanto no hay puntos de inflexión.

26) El mínimo global es 0 y se alcanza en $x = 1$ y $x = 3$. El máximo global es 3 y se alcanza en los extremos $x = 0$ y $x = 4$. Se alcanza un máximo local en $x = 2$.

27) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

28) Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$, Es creciente en $(0, \infty)$.

29) L no existe y $M = \frac{1}{8}$.

30) Tiene una asíntota (horizontal) $y = 0$. Se alcanza un máximo global en $x = 1$ y $x = -1$ y un mínimo global en $x = 0$. No se alcanzan otros extremos. Es convexa en $(-\infty, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$ y es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(0, \sqrt{3})$.

---

31) *a)* $(1 + x^2)^{-2}$; *b)* $(1 + x^4)^{-3} \cdot 2x$; *c)* $(1 + x^4)^{-3} \cdot 2x - (1 + x^6)^{-3} \cdot 3x^2$; *d)* $-e^{7x}/(1 + e^{4x})$.

32) $-\frac{9}{125}\big(25x^2 + 10x + 2\big)e^{-5x+3}$

33) *a)* $\frac{1}{4}\log|x + 1| + \frac{3}{4}\log|x - 3| + K$.
b) $\frac{1}{8}\log|x - 1| - \frac{1}{8}\log|x + 3| + \frac{1}{2}(x + 3)^{-1} + K$.

34) $\log|x - 1| - 5\log|x + 1| + 2\log(x^2 + 2x + 2) + 3\arctan(x + 1) + K$.

35) *a)* $2 - 4e^{-1}$; *b)* $\frac{1}{2}\arctan\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

36) $\frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$.

37) $L = 2$.

38) $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $\big(f^{-1}\big)'(\pi/4) = 1$.

---

39) $\frac{\pi-1}{2}$.

40) $\frac{2}{3}$.

41) 324.

42) No admite una solución numérica. Se calculan las integrales $A = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ y $V = \pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$.

43) $A = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)$ y $V = \frac{10\pi}{3}$.

44) $A = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}$.

10.2. Soluciones desarrolladas

Nada se aprende mirando las soluciones sin haber estudiado antes la teoría e intentado los problemas. En algunos casos estas soluciones son un poco esquemáticas. Se deja al lector completar los detalles.

Números naturales, racionales y reales

1) a) O bien denominador y numerador son ambos positivos o bien son ambos negativos. El primer caso requiere $x<1$ y $(x+2)(x-3)<0$. Esto último ocurre sólo si $x\in(-2,3)$, por tanto $x\in(-2,1)$. El segundo caso requiere de la misma forma $x>1$ y $(x+2)(x-3)>0$ que se dan simultáneamente para $x>3$.

Por consiguiente la solución es $(-2,1)\cup(3,\infty)$.

b) Si $x\ge -1$ entonces la ecuación es $(x+1)+(x+3)<5$ que equivale a $x<1/2$. Si $-3\le x\le -1$ entonces la ecuación es $-(x+1)+(x+3)<5$ que se cumple siempre. Finalmente, si $x\le -3$ entonces la ecuación es $-(x+1)-(x+3)<5$ que equivale a $x>-9/2$.

Combinando estos tres casos se obtiene la solución $(-9/2,-3]\cup[-3,-1]\cup[-1,1/2)$, es decir, $(-9/2,1/2)$.

---

2) a) Falso por ejemplo para $x=1$, $y=2$.

b) $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{xy}\le x+y\Leftrightarrow 4xy\le x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow 0\le x^2-2xy+y^2$ y esto se cumple siempre porque el segundo miembro es $(x-y)^2$.

---

3) Claramente se cumple para $n=1$ porque $1^2=1(1+1)(2+1)/6$. Ahora partiendo de la identidad del enunciado tenemos que llegar a la misma cambiando n por $n+1$. Con este fin sumamos $(n+1)^2$ en ambos miembros. El primer miembro es lo que esperamos y podemos manipular el segundo de la siguiente forma:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)=\frac{n+1}{6}\big(2n^2+7n+6\big).$$

Factorizando, $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$ y se obtiene entonces que la expresión anterior es $(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)/6$, como deseamos.

---

4) a) $x^4<9\Leftrightarrow x^2<3\Leftrightarrow |x|<\sqrt{3}$ que representa el intervalo $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, por tanto $\inf=-\sqrt{3}$ y $\sup=\sqrt{3}$.

b) $x^5<9\Leftrightarrow x<\sqrt[5]{9}$ por tanto no está acotado inferiormente y $\sup=\sqrt[5]{9}$.

c) Los elementos negativos son de la forma $-1-\frac{1}{n}$ con n impar. Claramente su ínfimo es el que corresponde a $n=1$, es decir, $\inf=-2$. El resto de los elementos son de la forma $1-\frac{1}{n}$ con n par. El supremo es 1 porque van acercándose indefinidamente a este valor sin llegar a superarle.

Sucesiones y series

5) En cada caso tranformamos la fórmula para a_n para que sea más sencillo estudiar la convergencia

a) Dividiendo entre n^4,

$$a_n = \frac{3 - 2/n^4}{1 + 2/n^2 + 2/n^4}$$

que claramente converge con $\lim a_n = 3$.

b) Dividiendo entre 6^n,

$$a_n = \frac{1}{(5/6)^n + (-1)^n}.$$

Notando que $(5/6)^n \to 0$, se sigue que $\lim a_{2n} = 1$ mientras que $\lim a_{2n+1} = -1$, por tanto no existe $\lim a_n$. La sucesión no converge.

c) Sacando factor común n, multiplicando y dividiendo por el conjugado y, finalmente, dividiendo por n,

$$a_n = n\big(\sqrt{n^2+1} - n\big) = n\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}$$

que claramente converge con $\lim a_n = 1/2$.

---

6) a) La desigualdad $a_n < 2$ se cumple para $n = 1$. Si la suponemos cierta para un n, entonces $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, que es la desigualdad para $n+1$.

b) Consideramos las implicaciones

$$a_n \le a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; a_n \le \sqrt{2a_n} \;\Leftrightarrow\; a_n^2 \le 2a_n$$

y la última desigualdad es cierta porque $0 < a_n < 2$ (simplifíquese entre a_n). Por el teorema de Bolzano-Weierstrass la sucesión es convergente. digamos $l = \lim a_n$. Tomando límites en la recurrencia $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ se tiene $l = \sqrt{2l}$ y las posibilidades son $l = 0$ y $l = 2$. La primera es claramente imposible porque $a_1 = 1$ y la sucesión es creciente.

---

7) La desigualdad $(a+b)^2 \ge 4ab$ se cumple para todo $a, b \ge 0$ porque $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

a) La desigualdad anterior con $a = x_n$, $b = t/x_n$ implica que $x_{n+1}^2 \ge t$ de donde $\sqrt{t}$ es una cota inferior para la sucesión. Por otro lado, la cota superior 2 se sigue por inducción, ya que $x_n \le 2$ se cumple para $n = 1$ y suponiéndola para algún n, se deduce para $n+1$ gracias a

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big) \le \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{\sqrt{t}}\big) \le \frac{1}{2}\big(2 + \sqrt{t}\big) \le 2.$$

b) Se tienen las implicaciones

$$x_{n+1} \le x_n \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big) \le x_n \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{x_n} \le x_n \;\Leftrightarrow\; t \le x_n^2$$

y esta última desigualdad es cierta por el apartado anterior.

c) El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que existe el límite. Digamos que $L = \lim x_n$, entonces $L = \lim x_{n+1}$ y tomando límites en la fórmula que define la sucesión se deduce $L = \frac{1}{2}\big(L + \frac{t}{L}\big)$. Resolviendo esta ecuación en L se concluye $L = \sqrt{t}$ o $L = -\sqrt{t}$. La segunda posibilidad no es válida porque $x_n > 0$.

---

8) En cada caso llamamos a_n a la expresión que aparece dentro del sumatorio.

a) Se cumple $\lim a_n/(n2^{-n}) = 1$ y por comparación basta estudiar $\sum b_n$ con $b_n = n2^{-n}$ que converge por ejemplo por el criterio del cociente: $\lim b_{n+1}/b_n = 1/2 < 1$.

b) Converge por el criterio de la raíz ya que $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim 2^{1/\sqrt{n}}/n = 0 < 1$.

c) Veamos que la serie sin signos $\sum |a_n|$ converge, por ello la original también converge.

Por comparación $\sum |a_n|$ y $\sum 1/n^2$ tienen el mismo carácter, y esta última serie converge por ejemplo por el criterio de condensación.

d) Transformamos un poco primero la serie multiplicando y dividiendo por el conjugado,

$$a_n = \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^2 = \frac{\big(n+1-n\big)^2}{\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)^2} = \frac{1}{\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)^2}.$$

Es fácil ver que $\lim a_n/(n^{-1}) = 1$ por tanto $\sum a_n$ tiene el mismo carácter que la serie armónica $\sum n^{-1}$, que no converge usando por ejemplo el criterio de condensación.

---

9) Como antes, llamemos en cada caso a_n a la expresión que aparece dentro del sumatorio.

a) Si $\alpha > 0$ entonces $\lim a_n = \infty$ y la serie no converge. Si $\alpha = 0$, $a_n = (n^2+1)^{-1}$ que se puede comparar con $1/n^2$ o aplicar el criterio de la integral, siendo convergente. Finalmente, para $\alpha < 0$, $a_n \le (n^2+1)^{-1}$ y también converge por comparación.

b) Multiplicando y dividiendo por el conjugado se sigue que $\lim a_n/n^{-\alpha} = 1$ y la serie tiene el mismo caracter que $\sum n^{-\alpha}$ la cual converge exactamente para $\alpha > 1$.

c) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{\frac{(2n+3)!}{(n+2)!(n+1)!}}{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}}\right)^{\alpha} = \lim \left(\frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+2)(n+1)}\right)^{\alpha} = 4^{\alpha}.$$

Entonces la serie converge para $\alpha < 0$ y no converge para $\alpha > 0$. Tampoco lo hace para $\alpha = 0$, ya que en este caso $\lim a_n = 1$.

---

10) La serie es $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n = r^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^{-n} n^{-1}$. Se cumple

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim r\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{-1} n^{-1/n} = r \cdot 1 \cdot 1 = r,$$

donde se ha usado $\lim n^{1/n} = \lim e^{(\log n)/n} = e^0 = 1$.

Por el criterio de la raíz, si $0 < r < 1$ la serie sin signos $\sum a_n$ converge y por tanto S también converge (absolutamente).

Si $r > 1$, claramente $\lim a_n = \infty$ (nótese que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$) y por tanto S no converge.

Finalmente, para $r = 1$, S converge por el criterio de Leibniz, ya que en este caso $\lim a_n = 0$ y a_n decrece. Esta última afirmación requiere recordar que la sucesión que define el número e, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, es monótona creciente.

---

11) Dando valores se obtiene 1, $\sqrt{2} = 1{,}41\dots$, $\sqrt{1+\sqrt{2}} = 1{,}55\dots$, $\dots$ entonces si es monótona debe ser creciente. Para comprobarlo seguimos las implicaciones

$$a_{n+1} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; \sqrt{1+a_n} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; 1 + a_n - a_n^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; a_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donde se ha usado que $a_n \ge 0$ y que $-x^2 + x + 1 = 0$ tiene a $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ como soluciones. Entonces es monótona creciente si y sólo si está acotada superiormente por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esto se sigue por inducción:

Claramente $a_1 = 1 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y suponiendo $a_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se deduce

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \le \sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

En definitiva, a_n es monótona creciente, está acotada superiormente por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e inferiormente por $a_1 = 1$. El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que converge. Digamos $l = \lim a_n$, entonces al tomar límites en $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ se sigue $l = \sqrt{1+l}$ que conduce a $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

---

12) Es más conveniente escribir la sucesión como

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}{n^\alpha\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)} = \frac{4}{n^\alpha\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}.$$

El denominador tiende a ∞ si $\alpha > -1/2$, tiende a cero si $\alpha < -1/2$ y tiende a 2 si $\alpha = -1/2$. Por tanto la sucesión converge si y sólo si $\alpha \ge -1/2$, en otro caso $\lim a_n = \infty$.

A partir de $\lim n^{\alpha+\frac{1}{2}} a_n = 2$ se deduce que $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ tienen el mismo carácter. La segunda serie converge si y sólo si $\alpha + 1/2 > 1$ (por ejemplo por el criterio de condensación o por el de la integral), esto es, para $\alpha > 1/2$.

Funciones continuas y sus propiedades

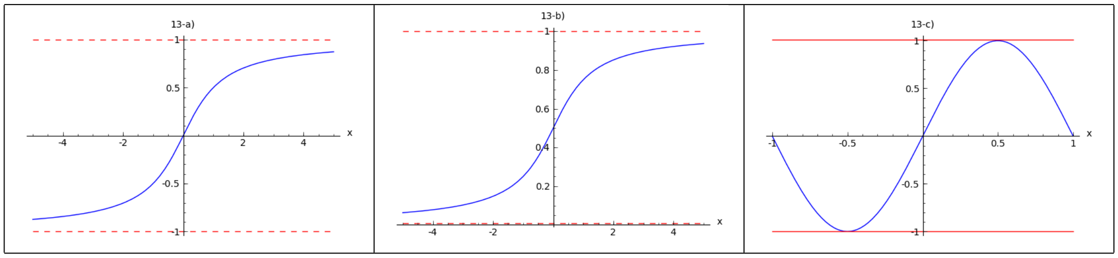
13) En cada apartado hay muchas soluciones posibles.

a) Por ejemplo $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x$. Quizá es más sencillo pensar en ejemplos definidos a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \ge 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

b) $g(x) = \big(1 + f(x)\big)/2$ con f como en el apartado anterior.

c) $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. Nótese que $|h(x)| \le 1$ y $h(\pm 1/2) = \pm 1$.



14) Los posibles problemas aparecen en los límites en puntos de la frontera.
a) No. La función no está acotada:

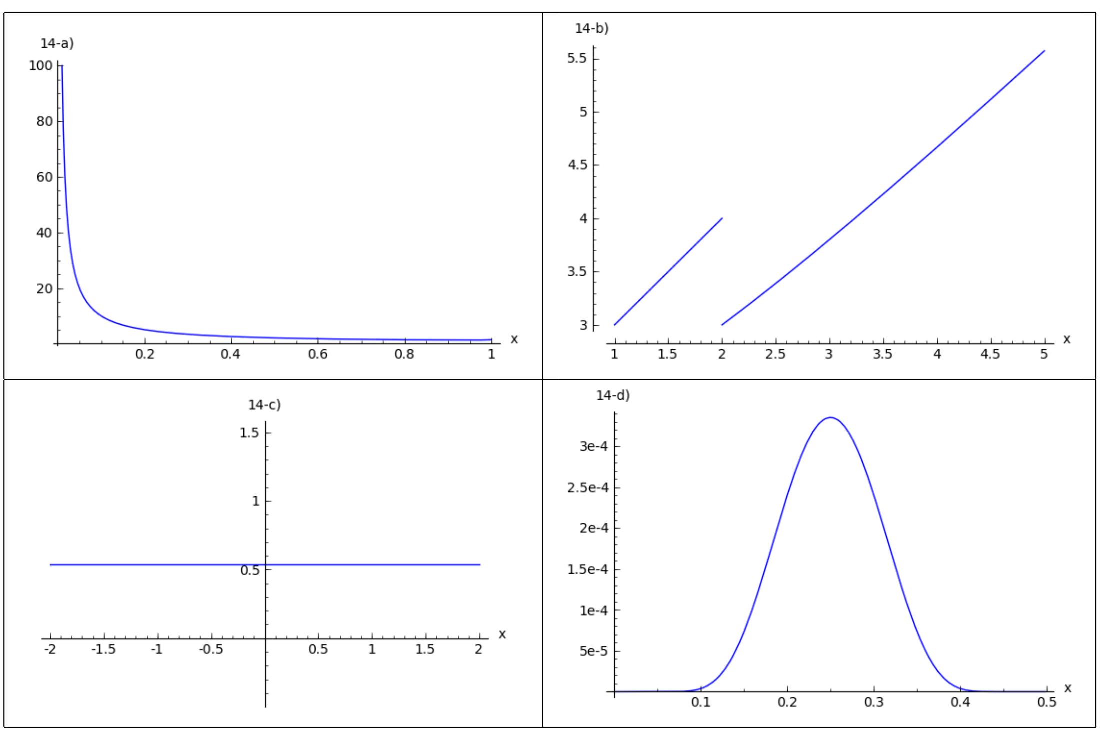
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^2\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)} = \infty.$$

b) No. Los límites laterales en $x=2$ no coinciden:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3.$$

c) Sí. De hecho $f(x)=\cos 1$ en todo su dominio de definición porque $\cos 1 = \cos(-1)$.
d) Sí. Basta definir $f(x)=0$ fuera de $(0,1/2)$ porque

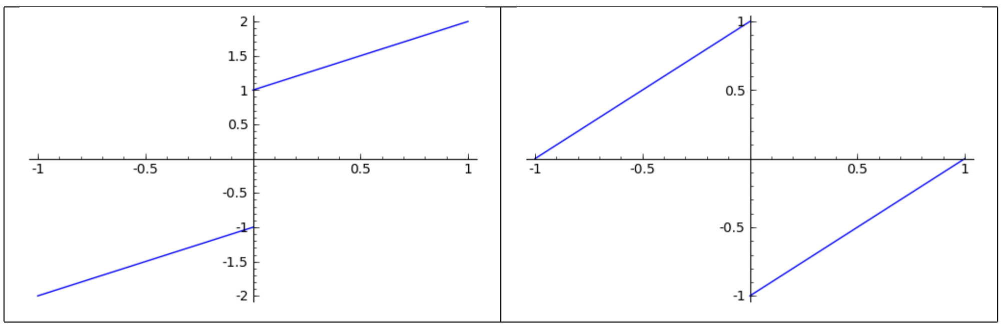
$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^{-1}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{-1}} \qquad \text{implica} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1/2^-} f(x) = 0.$$



15) Las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ -1+x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -1+x & \text{si } x \geq 0 \\ 1+x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

verifican $f(x)+g(x) = 2x$ y $f(x) \cdot g(x) = x^2 - 1$.



La derivada y sus propiedades básicas

16) Para la primera función:

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1/(t^2|t|+1) - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-t|t|}{t^2|t|+1} = 0.$$

Para la segunda:

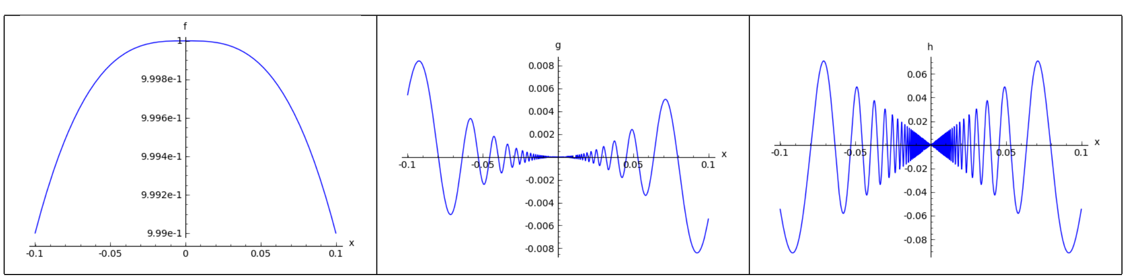
$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(0+t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen}(1/t)}{t} = \lim_{t \to 0} t \operatorname{sen}(1/t) = 0$$

porque $\operatorname{sen}(1/t)$ está acotado y t tiende a cero.

Sin embargo para la tercera función se llega con el mismo argumento a

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(0+t) - h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \operatorname{sen}(1/t)}{t} = \lim_{t \to 0} \operatorname{sen}(1/t)$$

que no existe porque el seno de ángulos grandes no se aproxima a ningún valor en particular, sino que oscila.



---

17) En todos los casos se aplica que la recta tangente en $x = a$ viene dada por la fórmula $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Por tanto todo el trabajo está en hacer las derivadas.

a) Recta $y = e^{-1}x + 1$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{e + \sin(x)}, \qquad f'(0) = e^{-1} \qquad \text{y} \qquad f(0) = 1.$$

b) Recta $y = x$

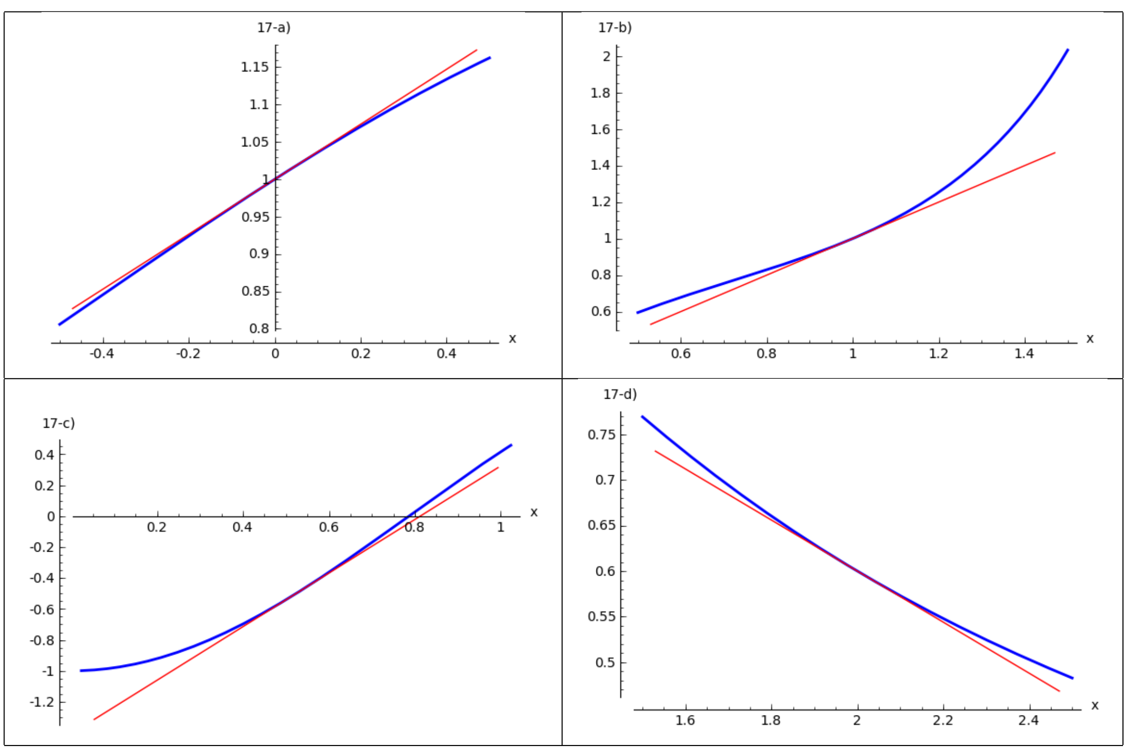
$$f'(x) = \left((2\,x - 1)\log(x) + \frac{x^2 - x + 1}{x}\right)x^{\left(x^2 - x + 1\right)}, \qquad f'(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1.$$

c) Recta $y = \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 4\,\sin(x)\cos(x)\,, \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

d) Recta $y = -\frac{7}{25}x + \frac{29}{25}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2\,(x + 1)x}{\left(x^2 + 1\right)^2}, \qquad f'(2) = -\frac{7}{25} \qquad \text{y} \qquad f(2) = \frac{3}{5}.$$



---

18) Se va derivando sucesivamente

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg'\\ (fg)'' &= f''g + 2f'g' + fg''\\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.\end{aligned}$$

Teoremas sobre derivación

19) Simplemente hay que derivar la fórmula para $(f^{-1})'$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \qquad \Rightarrow \qquad (f^{-1})''(x) = -\frac{1}{\big(f'\big(f^{-1}(x)\big)\big)^2} \cdot f''\big(f^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

---

20) *a*) Definiendo $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ se cumple $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ por tanto hay a lo más una solución, y $f(0) = -1 < 0 < f(\pi) = 2\pi - 1$ implica que hay uno en $[0, \pi]$ Por tanto hay solución única y está en $[0, 1]$.

b) Tomamos $f(x) = 2x^3 + ax - a$. De nuevo se tiene $f' > 0$ y $f(0) < 0 < f(1)$.

c) La función $f(x) = x^5 - 5x - 3$ cumple $f'(x) < 0$ en $(-1, 1)$ y $f'(x) > 0$ en $\mathbb{R} - [-1, 1]$. Se tiene $f(-2) < 0 < f(-1)$ por tanto hay solución única en $(-\infty, 1)$. De la misma forma, $f(1) < 0 < f(-1)$ y el signo constante de la derivada en $(-1, 1)$ implica que hay solución única en $(-1, 1)$. El mismo argumento se aplica a $(1, \infty)$ ya que $f(1) < 0 < f(2)$. En total hay tres soluciones en $\mathbb{R}$.

---

21) Una posibilidad es calcular las derivadas y sustituir en la fórmula, pero para f empleamos los polinomios de Taylor de orden 3 de $\log(1 + x)$ y de $\operatorname{sen} x$ que son respectivamente

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad \text{y} \qquad x - \frac{x^3}{3}.$$

sustituyendo la segunda en la primera y extrayendo los términos de grado menor o igual que 3 se obtiene el polinomio deseado:

$$\big(x - \frac{x^3}{3}\big) - \frac{1}{2}\big(x - \frac{x^3}{3}\big)^2 + \frac{1}{3}\big(x - \frac{x^3}{3}\big)^3 \qquad \Rightarrow \qquad T_{3,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Para g calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(3 + e^x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{-e^x(3 + e^x)^2 + 2e^{2x}(3 + e^x)}{(3 + e^x)^2} = \frac{e^{3x} - 9e^x}{(3 + e^x)^4}$$

y

$$f'''(x) = \frac{3\left(e^{3x} - 3\,e^{x}\right)}{\left(e^{x}+3\right)^4} + \frac{-4\left(e^{3x} - 9\,e^{x}\right)e^{x}}{\left(e^{x}+3\right)^5}.$$

De aquí $f(0) = \frac{1}{4}$, $f'(0) = -\frac{1}{16}$, $f''(0) = -\frac{1}{32}$ y $f''(0) = \frac{1}{128}$. Entonces

$$T_{3,0}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{768}x^3.$$

---

22) Para resolver este ejercicio usamos las series de Taylor de $\log(1+x)$ y $\operatorname{sen} x$ que son:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La primera converge en $(-1,1]$ y la segunda en todo $\mathbb{R}$. La convergencia de la primera serie en $x=1$ se deduce del criterio de Leibniz y su no convergencia en $x=-1$ de que es la serie armónica. En el resto de los casos basta el criterio del cociente sobre las series sin signos.

Efectuando las operaciones indicadas en el enunciado se obtiene

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n+5}}{(2n+1)!}, \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Para $c)$ la definición en $x=0$ asegura la continuidad. La serie de $a)$ converge en $[-1,1]$ y las otras en todo $\mathbb{R}$.

Aplicaciones de la derivada

23) En todos los casos denotamos con L el límite a calcular.

a) Regla de L'Hôpital dos veces:

$$L \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-\pi\operatorname{sen}(\pi x)}{2x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

b) Regla de L'Hôpital dos veces simplificando:

$$L \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-6\tan(6x)}{-3\tan(3x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{12\cos(6x)}{3\cos(3x)} = 4.$$

En la segunda igualdad se ha usado que $\cos(3x)/\cos(6x) \to 1$ cuando $x \to 0^+$.

c) Se toman logaritmos primero y después se usa la regla de L'Hôpital una vez:

$$\log L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L = e^0 = 1.$$

d) Se cambia la variable y se emplea la regla de L'Hôpital una vez:

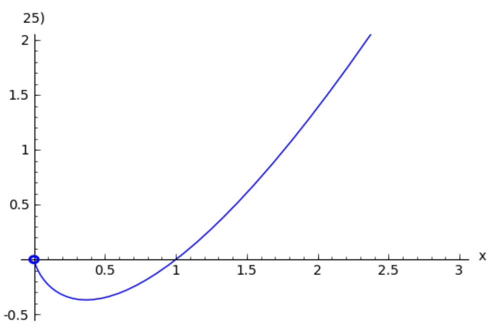
$$L \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(ay)}{y} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{a\cos(ay)}{1} = a.$$

---

24) Digamos que x es la longitud del lado paralelo a la pared e y es la longitud de cada uno de los dos lados perpendiculares a la pared. La condición de área es $xy = 20$. La longitud es $L(x) = x + 2y = x + 40/x$. El único punto crítico con $x > 0$ es $x = 2\sqrt{10}$ porque resuelve $f'(x) = 1 - 40/x^2 = 0$. Se alcanza un mínimo porque f decrece en $[0, 2\sqrt{10}]$ y crece en $[2\sqrt{10}, \infty)$. El otro lado es $y = 20/x = \sqrt{10}$. Entonces la longitud de cercado es $4\sqrt{10}$ y la relación entre los lados es 2.

---

25) El dominio de esta función es $(0, \infty)$ porque el logaritmo sólo existe para números positivos.



El único corte con los ejes es $x = 1$ (el valor para el que se anula el logaritmo), aunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Éste límite y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ prueban que no hay asíntotas.

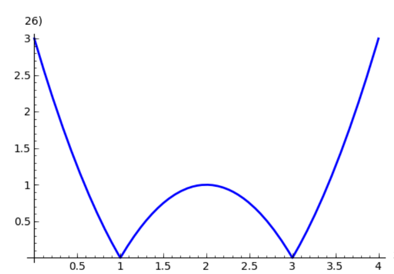
Calculamos la derivada $f'(x) = \log x + 1$. La solución de $\log x + 1 = 0$ es $x_0 = e^{-1}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene $\log x < -1$ y para $x > x_0$, $\log x > -1$, entonces la función decrece en $(0, x_0)$ y crece en (x_0, ∞) alcanzando por tanto un mínimo (global) en $x = x_0$ que es $f(x_0) = -e^{-1}$.

Derivando una vez más $f''(x) = 1/x$ que es positiva en $(0, \infty)$. Por consiguiente la función es convexa en todo su dominio y no hay puntos de inflexión.

---

26) Factorizando, $f(x) = |g(x)|$ con $g(x) = (x-1)(x-3)$ que es ≤ 0 exactamente en $[1, 3]$. Entonces

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{si } x \in [1,3] \\ g(x) & \text{si } x \in [0,1] \cup [3,4]. \end{cases}$$



Se cumple $g'(x) = 2x - 4$ que se anula en $x = 2$, además $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Por tanto $-g$ es creciente en $[1, 2]$ y decreciente en $[2, 3]$; mientras que g es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[3, 4]$. Entonces se alcanzan mínimos locales de f en $x = 1$ y $x = 3$. Como $f(1) = f(3) = 0$, el mínimo alcanzado es cero que de hecho es global (un valor absoluto es siempre no negativo).

De la misma forma, se alcanzan máximos locales en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. De $f(0) = f(4) = 3$ y $f(2) = 1$, se sigue que 3 es el máximo global (alcanzado en $x = 0$ y $x = 4$) mientras que 1 es máximo local (alcanzado en $x = 2$)

---

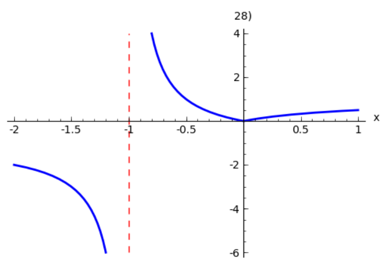
27) Es de tipo $0/0$ y se puede aplicar la regla de L'Hôpital. Para simplificar los cálculos se puede usar previamente (pero no es imprescindible) que $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}\sqrt{x-a}$ y que $\sqrt{x+a} \to \sqrt{2a}$ si $x \to a^+$. Entonces

$$L = \frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x\to a^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x\to a^+} \Big(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}} + 1 \Big)$$

y se tiene $L = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

---

28) Se distinguen dos casos según el signo de x.



La función para $x > 0$ es $f(x) = x/(1+x)$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

Por tanto f es creciente en $(0, \infty)$.

Si $x < 0$ hay que excluir $x = -1$ donde $f(x) = -x/(1+x)$ no está definida. La derivada es la negativa de la anterior, por tanto f es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$.

---

29) Claramente $|x|/x = 1$ si $x > 0$ y $|x|/x = -1$ si $x < 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} e^{|x|/x} = e^1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^-} e^{|x|/x} = e^{-1}.$$

Por tanto el primer límite no existe.

Para el segundo nótese que $\cos x \to 1$ cuando $x \to 0$. Esto permite escribir M como

$$M = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{\arctan(x/2)}{\operatorname{sen}(2x)}.$$

El límite de cada uno de los factores se calcula fácilmente con la regla de L'Hôpital:

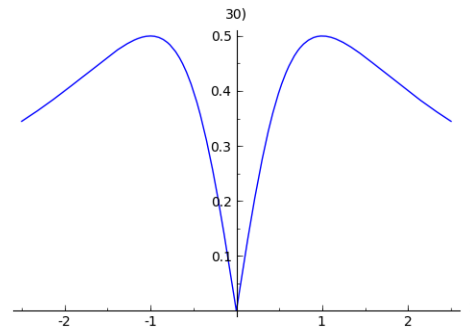
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x/2)}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1/2}{1+(x/2)^2}}{2\cos(2x)} = \frac{1}{4}.$$

Lo que prueba $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

---

30) El eje $y = 0$ es una asíntota horizontal porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. No hay asíntotas verticales porque f es de hecho continua (es cociente de funciones continuas).

Para el resto de los apartados distinguiremos $x > 0$ y $x < 0$ porque en $x = 0$ el valor absoluto no es derivable.



Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ que se anula en $x = 1$ pasando de positiva a negativa. Entonces se alcanza un máximo local en $x = 1$.

Si $x < 0$, $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ que se anula en $x = -1$ y procediendo como antes se comprueba que se alcanza un máximo local en $x = 1$. De hecho esto se puede deducir sn ningún cálculo observando que f es par, es decir, que $f(x) = f(-x)$.

Claramente en $x = 0$ se alcanza un mínimo global porque $f(0) = 0 \le f(x)$. También $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$ es un máximo global porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y no hay otros máximos.

Derivando de nuevo, para $x > 0$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

que se anual en $x = \sqrt{3}$ pasando de negativa a positiva. Así pues f es cóncava en $(0, \sqrt{3})$ y convexa en $(\sqrt{3}, \infty)$. Por la simetría par también es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0)$ y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3})$.

La integral y técnicas de integración

31) En todos los casos se emplea el teorema fundamental del cálculo en la forma:

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt \qquad \Rightarrow \qquad F'(x) = h\big(g(x)\big)g'(x) - h\big(f(x)\big)f'(x)$$

que se deduce de la versión habitual escribiendo la integral como

$$F(x) = \int_a^{g(x)} h(t)\, dt + \int_{f(x)}^a h(t)\, dt = \int_a^{g(x)} h(t)\, dt - \int_a^{f(x)} h(t)\, dt.$$

Los resultados son:

a) $(1+x^2)^{-2}$, *b*) $(1+x^4)^{-3}\cdot 2x$,

c) $(1+x^4)^{-3}\cdot 2x - (1+x^6)^{-3}\cdot 3x^2$, *d*) $-\dfrac{e^{7x}}{1+e^{4x}}$.

---

32) Llamemos I a la integral. Integrando por partes con $u = 9x^2$ y $dv = e^{-5x+3}\, dx$ se tiene

$$I = -\frac{9x^2}{5}e^{-5x+3} + \frac{18}{5}\int xe^{-5x+3}\, dx.$$

Integrando una vez más por partes con $u = x$ y $dv = e^{-5x+3}\,dx$, se termina de calcular I:

$$I = -\frac{9x^2}{5}e^{-5x+3} + \frac{18}{5}\big(-\frac{x}{5}e^{-5x+3} - \frac{1}{25}e^{-5x+3}\big) = -e^{-5x+3}\big(\frac{9}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{18}{125}\big).$$

---

33) En ambos casos son funciones racionales y hay que calcular su descomposición en fracciones simples.

a) Las raíces son simples y reales, entonces

$$\frac{x}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \qquad \Rightarrow \qquad x = A(x-3) + B(x+1)$$

que sustituyendo $x = -1$ y $x = 3$ da lugar a $A = -1/4$ y $B = 3/4$. Y la integral es

$$\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{3}{4}\log|x-3| + K.$$

b) La raíz $x = -3$ está repetida y entonces corresponde a dos fracciones simples:

$$\frac{2}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1).$$

Sustituyendo $x = 1$ y $x = -3$ se sigue $A = 1/8$ y $C = -1/2$. Por ejemplo comparando los coeficientes de x^2 se obtiene $B = -1/8$. Integrando término a término, el resultado final es

$$\frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+3| + \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + K.$$

---

34) El factor $x^2 + 2x + 2$ tiene raíces complejas, mientras que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, por tanto buscamos una descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Comparando los numeradores

$$5x^2 + 5 = A(x+1)(x^2+2x+2) + B(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2-1).$$

Sustituyendo $x = -1$ y $x = 1$ se tiene $B = -5$ y $A = 1$. Comparando los coeficientes de x^3 se deduce $C = 4$ y comparando los términos independientes $D = 7$.

La integral es entonces

$$\log|x-1| - 5\log|x+1| + \int \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Completando cuadrados el denominador en el integrando es $(x+1)^2 + 1$ por tanto el cambio de variable $t = x + 1$ lleva a

$$\int \frac{4t+3}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\log(t^2+1) + 3\arctan t.$$

Deshaciendo el cambio se obtiene finalmente que la integral buscada es

$$\log|x-1| - 5\log|x+1| + 2\log(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + K.$$

---

35) En ambas integrales lo más natural es hacer un cambio de variable.
a) Con $x = t^2$ eliminamos la raíz cuadrada:

$$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx \underset{x=t^2}{=} 2\int_0^1 te^{-t}\,dt = 2\big(-te^{-t} - e^{-t}\big)\Big|_0^1 = 2 - 4e^{-1}.$$

b) Con $x = \log t$ (o equivalentemente $t = e^x$) obtenemos una integral racional:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}\,dx \underset{x=\log t}{=} \int_1^e \frac{dt}{\big(t+\frac{4}{t}\big)t} = \int_1^e \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_1^e \frac{dt}{(t/2)^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\Big|_1^e.$$

Sustituyendo los límites, el resultado es $\frac{1}{2}\arctan\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

---

36) El procedimiento habitual es integrar por partes repetidamente para bajar el grado. La primera vez elegimos $u = x^3$, $dv = \cos x\,dx$

$$I = x^3 \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} - 3\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi^3}{8} - 3I_1 \qquad \text{con} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x\,dx.$$

Esta integral se hace de nuevo por partes con $u = x^2$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$

$$I_1 = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = 2I_2 \qquad \text{con} \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx.$$

Finalmente, se integra por partes I_2 con $u = x$, $dv = \cos x\,dx$

$$I_2 = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Las relaciones

$$I = \frac{\pi^3}{8} - 3I_1, \qquad I_1 = 2I_2 \qquad \text{e} \qquad I_2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

implican

$$I = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6.$$

---

37) Es una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicando la regla de L'Hôpital en combinación con el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}$$

que de nuevo es del tipo $0/0$. Una nueva aplicación de la regla de L'Hôpital conduce al resultado

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}}{1} = 2.$$

---

38) Para $x = 1$ la integral es

$$f(1) = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^4}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+(t^2)^2} \cdot 2t\, dt = \arctan(t^2)\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

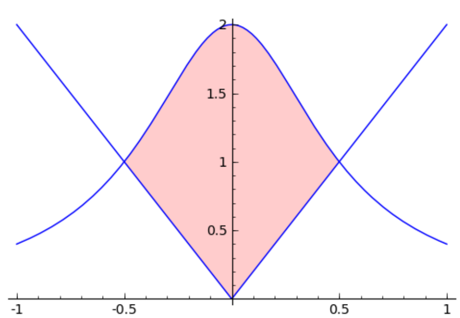
El teorema de la función inversa asegura que en $(0,\infty)$ la función f tiene una inversa derivable, ya que $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} > 0$. Además

$$\big(f^{-1}\big)'(\pi/4) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\pi/4)\big)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2/(1+1^4)} = 1,$$

donde se ha usado en la segunda igualdad $f(1) = \pi/4$.

Aplicaciones de la integral

39) Ambas funciones tienen simetría par por tanto basta considerar el área limitada cuando $x \geq 0$ y multiplicarla por dos.



Para $x \geq 0$, $g(x) = 2x$ y la única intersección de ambas gráficas se produce en $x = 1/2$, porque

$$\frac{2}{4x^2+1} = 2x \quad \Rightarrow \quad 1 = x(4x^2+1)$$
$$\Rightarrow \quad 0 = (2x-1)(2x^2+x+1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

ya que $2x^2 + x + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

En $x \geq 0$ la función f decrece y la función g crece, por consiguiente la gráfica de f está por encima en $(0, 1/2)$ y el área buscada es

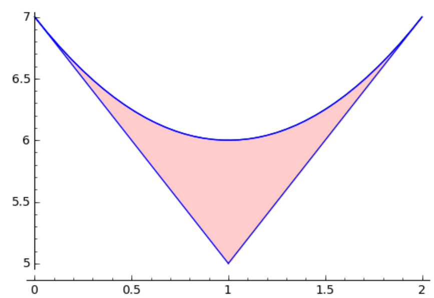
$$A = 2\int_0^{1/2} \big(\frac{2}{4x^2+1} - 2x\big)\, dx = 2\int_0^{1/2} \frac{2}{(2x)^2+1}\, dx - 4\int_0^{1/2} x\, dx.$$

Cada una de estas integrales es elemental, resultando

$$A = 2\arctan(2x)\big|_0^{1/2} - 2x^2\big|_0^{1/2} = 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

---

40) En primer lugar calculamos las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$



$$f(0) = 7, \quad f'(0) = -2 \quad \longrightarrow \quad y = -2(x-0)+7$$
$$\longrightarrow \quad y = -2x+7.$$

y

$$f(2) = 7, \quad f'(2) = 2 \quad \longrightarrow \quad y = 2(x-2)+7$$
$$\longrightarrow \quad y = 2x+3.$$

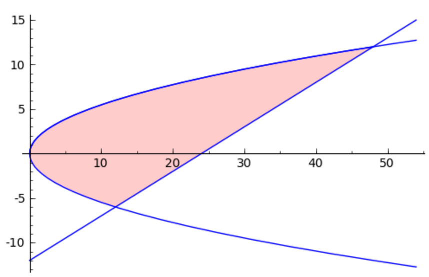
La intersección de estas rectas tangentes se produce, resolviendo el sistema, en $x = 1$, $y = 5$. La función f es convexa ($f'' > 0$), así pues las tangentes quedan por debajo de la gráfica y el área viene dada por

$$A = \int_0^1 \big((x^2-2x+7)-(-2x+7)\big)\,dx + \int_1^2 \big((x^2-2x+7)-(2x+3)\big)\,dx$$
$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \big(x^2-4x+4\big)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \big(x-2\big)^2\,dx = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Es posible emplear también la simetría de la figura para llegar más rápido a la solución.

---

41) Comenzamos buscando los puntos en los que se cortan.



Despejando e igualando la variable x en ambas ecuaciones se sigue $2y+24 = y^2/3$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtienen los dos puntos de intersección $(x, y) = (12, -6)$ y $(x, y) = (48, 12)$.

La curva $y^2 = 3x$ es una parábola girada 90 grados respecto a su posición habitual (intercambiar la x y la y) y la recta tiene pendiente $1/2$. Entonces el segmento de recta que queda dentro de la parábola es el que corresponde a $x \in [12, 48]$ y el área de la región viene dada por:

$$A = \int_0^{12} \big(\sqrt{3x}-(-\sqrt{3x})\big)\,dx + \int_{12}^{48} \big(\sqrt{3x}-(\frac{x}{2}-12)\big)\,dx$$
$$= \sqrt{3}\int_0^{12} \sqrt{x}\,dx + \sqrt{3}\int_0^{48} \sqrt{x}\,dx + \int_{12}^{48} \big(-\frac{x}{2}+12\big)\,dx.$$
$$= 48+384+(-540+432) = 324.$$

Una alternativa para simplificar un poco los cálculos es integrar con respecto de y, o dicho de otra forma resolver el problema intercambiando x e y en el enunciado. Con ello se evitan las raíces cuadradas.

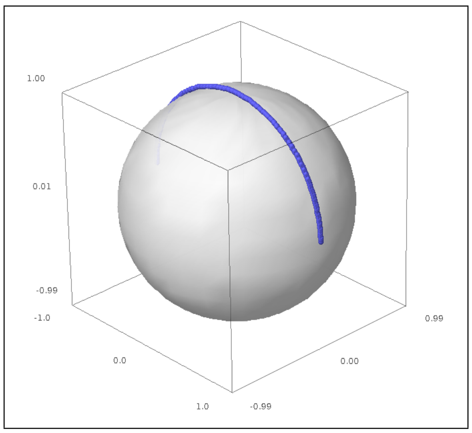
---

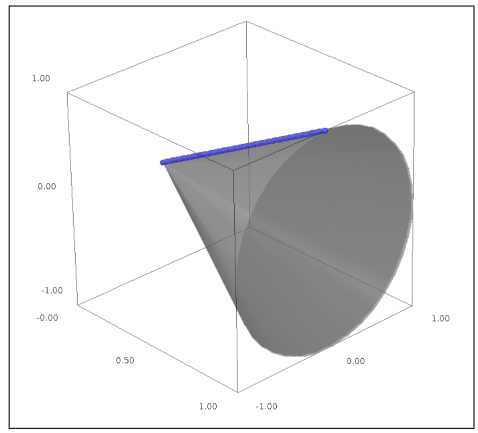
42) La esfera de radio r se obtiene al hacer girar la semicircunferencia $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ de radio r alrededor del eje X. Por tanto su volumen es

$$V = \pi\int_{-r}^{r} \big(\sqrt{r^2-x^2}\big)^2\,dx = \pi\int_{-r}^{r} \big(r^2-x^2\big)\,dx = \pi\big(2r^3-2\frac{r^3}{3}\big) = 4\pi\frac{r^3}{3}.$$

El cono se obtiene girando alrededor del eje X el segmento que une $(0,0)$ con (h,r). La ecuación de tal segmento es $y = rx/h$ con $x \in [0,h]$. Aplicando la fórmula el volumen es

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

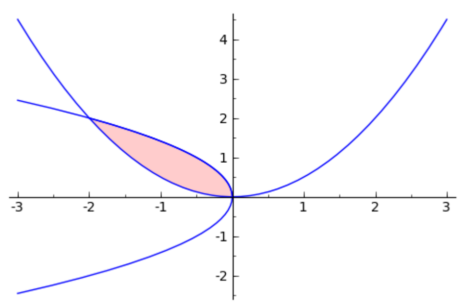




---

43) Las desigualdades sólo indican a qué lado de las curvas fronteras están las regiones. En el primer caso es en la zona de los y grandes y en el segundo en el de los x pequeños.

La frontera de estas regiones son las parábolas $2y - x^2 = 0$ y $2x + y^2 = 0$. Resolviendo el sistema se deduce que los puntos de intersección son $(0,0)$ y $(-2,2)$.



Despejando la y se tiene $y = x^2/2$ e $y = \pm\sqrt{-2x}$. La intersección se produce en la rama con signo positivo, además para $x \in [-2,0]$ se cumple $\sqrt{-2x} \ge x^2/2$, por tanto el área es

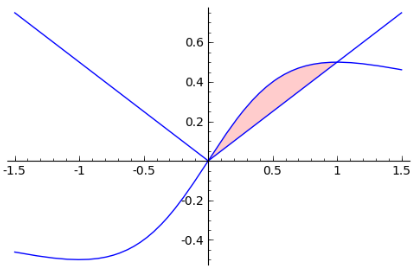
$$A = \int_{-2}^0 \left(\sqrt{-2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}.$$

Para hallar el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X restamos el volumen correspondiente al giro de la gráfica de arriba menos el correspondiente al giro de la de abajo. Esto es

$$V = \pi \int_{-2}^0 \left(\sqrt{-2x}\right)^2 dx - \pi \int_{-2}^0 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = -\pi x^2\Big|_{-2}^0 - \frac{\pi}{12}x^3\Big|_{-2}^0 = \frac{10\pi}{3}.$$

---

44) Como veremos, la parte $x < 0$, y por tanto el valor absoluto, es irrelevante.



Claramente hay una intersección para $x = 0$. Si $x > 0$, $x/(1 + x^2) = x/2$ implica $2 = 1 + x^2$ y de aquí $x = 1$. Si $x < 0$, $x/(1 + x^2) = -x/2$ implica $-2 = 1+x^2$, que no tiene solución. Entonces $x \in [0, 1]$ en la región buscada. Además la gráfica de la primera función está por encima ya que $x/(1 + x^2) \geq x/2$ en $[0, 1]$. El área es por tanto,

$$A = \int_0^1 \big(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2}\big)\, dx = \big(\frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{4}\big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}.$$

10.3. Generación de gráficas

En las soluciones desarrolladas hay algunas gráficas. Aquí están los programas Sage que las generan.

Problema 13

```
# 13               (Sage)
f = 2*arctan(x)/pi
# a)
p = plot( f ,x, -5,5)
p += plot(1.0,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p += plot(-1.0,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p.axes_labels(['x','13-a)'])
show(p)
# b)
p = plot( (1+f)/2 ,x, -5,5)
p += plot(1.0,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p += plot(0.01,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p.axes_labels(['x','13-b)'])
show(p)
# c)
p = plot( sin(pi*x) ,x, -1,1)
p += plot(1.01,x, -1, 1, color='red', linestyle='-')
p += plot(-1.0,x, -1, 1, color='red', linestyle='-')
p.axes_labels(['x','13-c)'])
show(p)
```

Problema 14

```
# 14            (Sage)
# a)
p = plot( (sqrt(1+x)-sqrt(1-x))/x^2,x,0.01,1)
p.axes_labels(['x','14-a)'])
show(p)
# b)
p = plot( (x^3-8)/(x^2-4),x, 2+10^-6,5)+plot(x+2,x,1,2)
p.axes_labels(['x','14-b)'])
```

```
show(p)
# b)
p = plot( cos( (x^2-1)/abs(x^2-1) ),x,-2,2)
p.axes_labels(['x','14-c)'])
show(p)
# b)
p = plot( exp(-1/(x-2*x^2) ),x,0,1/2)
p.axes_labels(['x','14-d)'])
show(p)
```

Problema 15

```
# 15          (Sage)
p1 = plot( 1+x,x,0,1) + plot( -1+x,x,-1,0)
p2 = plot( -1+x,x,0,1) + plot( 1+x,x,-1,0)
show(p1)
show(p2)
```

Problema 16

```
# 16             (Sage)
f = 1/(x^2*abs(x)+1)
p = plot( f ,x, -0.1,0.1)
p.axes_labels(['x','f'])
show(p)

g = x^2*sin(1/x)
p = plot( g ,x, -0.1,0.1)
p.axes_labels(['x','g'])
show(p)

h = x*sin(1/x)
p = plot( h ,x, -0.1,0.1)
p.axes_labels(['x','h'])
show(p)
```

Problema 17

```
# 17             (Sage)

def plot_tg(f, a, s):
    var('t')
    p = plot( f ,x, a-0.5,a+0.5, thickness=2)
    p += plot( diff(f,x)(a)*(t-a)+f(a) ,t, a-0.47,a+0.47, color='red')
    p.axes_labels(['x',s])
    show(p)


# a)
plot_tg( log(exp(1)+sin(x)), 0, '17-a)')

# b)
plot_tg( x^(x^2-x+1), 1, '17-b)')
```

```
# c)
plot_tg( (sin(x))^2-(cos(x))^2, pi/6, '17-c)')

# d)
plot_tg( (x+1)/(x^2+1), 2, '17-d)')
```

Problema 25

```
# 25              (Sage)
f = x*log(x)
p = plot( f ,x, 0.01,3.0, ymin = -0.5, ymax = 2)
p += circle((0,0), 0.03, color='blue', thickness=2)

p.axes_labels(['x','25)'])
show(p)
```

Problema 26

```
# 26              (Sage)
f = abs(x^2-4*x+3)
p = plot( f ,x, 0.0,4.0, thickness=2)
p.axes_labels(['x','26)'])
show(p)
```

Problema 28

```
# 28              (Sage)
f = abs(x)/(1+x)
p = plot( f ,x, -2.0,-1.2, thickness=2)
p += plot( f ,x, -0.8,1.0, thickness=2)
p += line([(-1,-6), (-1,4)], color='red', linestyle='--')
p.axes_labels(['x','28)'])
show(p)
```

Problema 30

```
# 30           (Sage)
p = plot( abs(x)/(x^2+1),x,-2.5,2.5)
p.axes_labels(['x','30)'])
show(p)
```

Problema 39

```
# 39           (Sage)
p = plot( 2/(4*x^2+1),x,-1,1) + plot( 2*abs(x),x,-1,1)
p += plot(2/(4*x^2+1),x, -1/2, 1/2, fill=2*abs(x), fillcolor='red',
        fillalpha=0.2, thickness=0)
show(p)
```

Problema 40

```
# 40          (Sage)
p = plot( x^2-2*x+7,x,0,2)
p += plot( -2*x+7,x,0,1)
p += plot( 2*x+3,x,1,2)
p += plot( x^2-2*x+7,x, 0, 1, fill=-2*x+7, fillcolor='red', fillalpha=0.2)
p += plot( x^2-2*x+7,x, 1, 2, fill= 2*x+3, fillcolor='red', fillalpha=0.2)
show(p)
```

Problema 41

```
# 41          (Sage)
p = plot( sqrt(3*x) ,x,0,54)
p += plot( -sqrt(3*x),x,0,54)
p += plot( x/2-12,x,0,54)
p += plot( sqrt(3*x),x, 0, 12, fill=-sqrt(3*x), fillcolor='red', fillalpha=0.2)
p += plot( sqrt(3*x),x, 12, 48, fill= x/2-12, fillcolor='red', fillalpha=0.2)

show(p)
```

Problema 42

```
# 42          (Sage)
S = sphere(size=0.99, mesh=True, color='white', opacity=0.8)

alpha = var('alpha')
S += parametric_plot3d( (cos(alpha), 0, sin(alpha)), (alpha,0,pi), thickness=8)
#show(S, mesh=True)
show(S)

from sage.plot.plot3d.shapes import Cone
C = Cone(1, 1, color='gray', opacity=0.4).translate(0.0,0.0,-1.0).rotateY(pi/2)
C += parametric_plot3d( ( alpha, 0, alpha), (alpha, 0, 1), thickness=8)
show(C)
```

Problema 43

```
# 43          (Sage)
p = plot( x^2/2,x,-3,3)
p += plot( sqrt(-2*x),x,-3,0)
p += plot( -sqrt(-2*x),x,-3,0)
p += plot( sqrt(-2*x),x, -2, 0, fill=x^2/2, fillcolor='red', fillalpha=0.2)

show(p)
```

Problema 44

```
# 44             (Sage)
p = plot( x/(1 + x^2),x,-1.5,1.5) + plot(0.5*abs(x),x, -1.5, 1.5)
p += plot(0.5*abs(x),x, 0, 1, fill=x/(1 + x^2), fillcolor='red',
      fillalpha=0.2, thickness=0)
show(p)
```

10.4. Un examen resuelto

Los cinco ejercicios siguientes corresponden al examen final de Cálculo I del primer curso de grado de Ingeniería Informática, que tuvo lugar el 19 de enero de 2011.

Enunciado

---

1) Consideramos la sucesión a_n definida por

$$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

a) Demostrar que $-1 \leq a_n \leq 1$ para todo número natural n.
b) ¿Es a_n monótona?

---

2) Calcular

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx.$$

---

3) Calcular los límites siguientes

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(4x+3)} - 2x)$.

---

4) Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. Indicando, si los hubiera, extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad.

---

5) Hallar qué valores reales debe tomar el parámetro α para que la siguiente serie converja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\alpha n}+1}{2^{\alpha n}+2^{-\alpha n}}.$$

Soluciones

---

1) a) Lo que se pide probar es $|a_n| \le 1$. Procedemos por inducción. Claramente $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \le 1$. Ahora suponemos que se cumple $|a_n| \le 1$. De aquí, $0 \le a_n^2 \le 1$, por tanto $0 \le 2a_n^2 \le 2$ y finalmente $-1 \le 2a_n^2 - 1 \le 1$ que equivale a $|a_{n+1}| \le 1$, es decir, hemos obtenido la propiedad cambiando n por $n+1$.

b) Sustituyendo tenemos $a_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$, y $a_4 = 2 \cdot \frac{49}{81} - 1 = \frac{17}{81}$. Entonces $a_1 > a_2$ pero $a_3 < a_4$ (basta mirar el signo). Por tanto la sucesión no es monótona.

---

2) La primera integral es inmediata:

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x\,dx = \log|x^2-1|\Big|_2^3 = \log 8 - \log 3 = \log\frac{8}{3}.$$

La segunda es suma de dos integrales inmediatas después de usar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \big(\operatorname{sen} x + (\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)\big)\,dx \\ &= \Big(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

---

3) Llamemos a los límites L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente.

a) Usando que la exponencial es la inversa del logaritmo y que $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = 1$ (esto se puede hacer por L'Hôpital (0/0) o usando que $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1$ cuando $t \to 0$), se tiene

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} e^{(\log x)\operatorname{sen}(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}(\log x)\operatorname{sen}(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

En el último paso se ha empleado la regla de L'Hôpital.

b) La manera más rápida consiste en escribir $t = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ y utilizar el límite del seno antes mencionado. También se puede aplicar directamente la regla de L'Hôpital (0/0):

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x}{\cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Es un límite de tipo 0/0 sin la menor complicación:

$$L_3 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-\operatorname{sen} x)/\cos x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

d) Como es habitual para eliminar la indeterminación $\infty - \infty$ con raíces, multiplicamos por el conjugado:

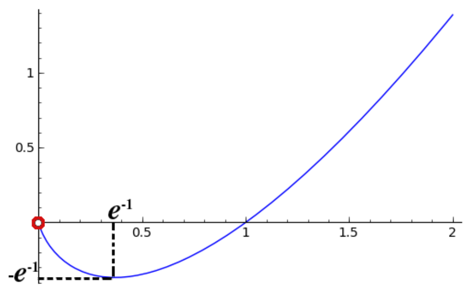
$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x(4x+3)} - 2x)(\sqrt{x(4x+3)} + 2x)}{\sqrt{x(4x+3)} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3x-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}.$$

Ahora en esta expresión dividimos numerador y denominador entre x, "el mayor exponente":

$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{4+3/x}+2} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}.$$

---

4) El dominio de esta función es $(0,\infty)$ porque el logaritmo sólo existe para números positivos.



El único corte con los ejes es $x = 1$ (el valor para el que se anula el logaritmo), aunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, por L'Hôpital para $(\log x)/x^{-1}$. Éste límite y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ prueban que no hay asíntotas.

Calculamos la derivada $f'(x) = \log x + 1$. La solución de $\log x + 1 = 0$ es $x_0 = e^{-1}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene $\log x < -1$ y para $x > x_0$, $\log x > -1$, entonces la función decrece en $(0, x_0)$ y crece en (x_0,∞) alcanzando por tanto un mínimo (global) en $x = x_0$ que es $f(x_0) = -e^{-1}$.

Derivando una vez más $f''(x) = 1/x$ que es positiva en $(0,\infty)$. Por consiguiente la función es convexa en todo su dominio y no hay puntos de inflexión.

---

5) Escribamos a_n para la expresión en el sumatorio. Lo más fácil es percatarse de que

$$a_n = \frac{2^{2\alpha n}+1}{2^{\alpha n}+2^{-\alpha n}} = \frac{2^{2\alpha n}+1}{2^{-\alpha n}\big(2^{2\alpha n}+1\big)} = 2^{\alpha n}.$$

Por el criterio de la raíz, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha n}$ converge para $\alpha < 0$ y diverge para $\alpha > 0$. Además para $\alpha = 0$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ que claramente diverge ($\lim a_n \neq 0$).

Incluso sin percatarse de esta simplificación, lo más natural es aplicar el criterio de comparación con $b_n = 2^{\alpha n}$ o usar previamente que $\lim a_n = 0$ no se cumple para $\alpha \geq 0$.

Apéndice A

Hojas del curso 2010-2011

Las hojas 6 y 7 fueron compuestas en colaboración con Adrián Ubis y Carlota Cuesta.

A.1. Hoja 1

1) Indicar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $|4x+3| \le 1$,

b) $|x+1| \le |x-1|$,

c) $|x^2-5x+6| < 2$,

d) $|x+1|+|x+3| < 5$,

e) $\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

f) $\dfrac{x^2-2}{x^2-4} \le 0$.

2) Escribir condiciones con desigualdades lo más sencillas posibles para decidir si dos intervalos $[a,b]$ y $[A,B]$ tienen puntos comunes. En ciertas interfaces gráficas de programación los rectángulos son estructuras (conjuntos de datos) $\{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{w},\mathtt{h}\}$ donde el punto $(\mathtt{x},\mathtt{y})$ es la esquina inferior izquierda, `w` la anchura y `h` la altura. Dar fórmulas matemáticas implementables en un ordenador que permitan saber si dos rectángulos tienen puntos comunes. Tales problemas son básicos para el estudio de colisiones en videojuegos.

3) Decidir si las siguientes desigualdades son válidas para los valores de x e y que se indican.

a) $|x-y| \le |x|-|y|$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$

b) $|x-y| \le |x|+|y|$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$

c) $|x-y|^2 \le x+y$ para todo $x,y \in [0,1]$.

d) $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$ para todo $x,y \in \mathbb{R}^+$.

4) Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

d) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.

5) Consideremos un programa de la forma

```
for(j = 0; j < N; ++j)
        for(i = 2*j-2; i < 6*j; ++i)
                calc(i,j);
```

que para cada $\mathtt{0} \leq \mathtt{j} < \mathtt{N}$ ejecuta la función `calc` para todos los valores $\mathtt{2} * \mathtt{j} - \mathtt{2} \leq \mathtt{i} < \mathtt{6} * \mathtt{j}$ donde `i` y `j` son enteros. Supongamos que esta función requiere 5 *ms* (milisegundos) mientras que las otras líneas de programa un tiempo despreciable.

a) Hallar el tiempo `T(N)` que tarda el programa para algunos valores pequeños de `N`, conjeturar una fórmula sencilla para `T(N)` y probarla por inducción.

b) Si sólo disponemos de 4 horas de cálculo en el laboratorio, ¿cuál es el máximo `N` que se puede elegir?

6) Si partimos una tarta con un cuchillo dando tres cortes que no pasen por el mismo punto conseguimos un máximo de 7 trozos (desiguales). Buscar una fórmula para el número máximo de trozos al dar n cortes y probarla por inducción. *Indicación*: La fórmula es de segundo grado.

7) Indicar si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

a) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^4 < 9\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^5 < 9\}$,

c) $\{x + x^{-1} \,:\, x \in \mathbb{R}^+\}$, d) $\{(-1)^n - n^{-1} \,:\, n \in \mathbb{Z}^+\}$,

8) Si nos fijamos en el protagonista de nuestro videojuego favorito veremos que no pasa desde el reposo a la velocidad máxima `V` sino que hay cierto periodo de aceleración para dar mayor realismo. Una forma sencilla y efectiva de programar este efecto es definir la velocidad en un instante como $\mathtt{v} + \alpha(\mathtt{V} - \mathtt{v})$ donde `v` es la velocidad en el instante anterior y $0 < \alpha < 1$.

a) Explicar por qué, partiendo del reposo, la velocidad está acotada superiormente por `V`.

b) ¿Para qué puede emplearse el parámetro α en la práctica? ¿Debe ser mayor en un juego de carreras de coches o al representar a un personaje corriendo?

9) Supongamos una subrutina $\mathtt{F} = \mathtt{F}(\mathtt{x})$ que termina el programa si $\mathtt{x} > \mathtt{1.999}$ y llama a $\mathtt{F}(\mathtt{1.0} + \mathtt{x}/\mathtt{2.0})$ en otro caso. ¿Se colgará el programa al llamar a `F(1.0)`?

A.2. Hoja 2

1) Estudiar si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y en caso afirmativo hallar su límite.

$$a)\ a_n = \frac{3n^4-2}{n^4+2n^2+2}, \qquad b)\ a_n = \sqrt{n^2+1}-n, \qquad c)\ a_n = n\sqrt{n^2+1}-n^2,$$

$$d)\ a_n = \frac{4^n}{5^n+6^n}, \qquad e)\ a_n = \frac{6^n}{5^n+(-6)^n}, \qquad f)\ a_n = \frac{\sqrt{2n^6+1}-1}{n^3+n^2+1}.$$

2) Dar en cada apartado un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman o explicar por qué no es posible construirla.
a) $|a_n|$ es monótona y acotada y a_n no converge.
b) b_{n+1}/b_n converge pero b_n no converge.
c) c_n es monótona y positiva pero $c_n/(2+c_n)$ no converge.
d) $d_n^2-2d_n$ converge pero d_n no converge.

3) Consideremos la sucesión $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ con $a_1=1$.
a) Probar por inducción que $a_n<2$.
b) Justificar que a_n es monótona creciente y hallar su límite.
c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n. Intentar hallarla.

4) El ejercicio anterior da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$ que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión allí indicada y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.

Construyendo sucesiones convergentes adecuadas hallar el valor que habría que asignar a las expresiones

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\dots}}}$$

y comprobar con una calculadora que el resultado es coherente con tomar unos cuantos términos de ellas.

5) Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n=a_n+b_n$ y llamemos C a su supremo.
a) ¿Se cumple siempre $A+B\ge C$?
b) ¿Se cumple $A+B=C$ si a_n y b_n son crecientes?
c) ¿Se cumple siempre $A+B=C$?

6) Fijado $1<t\le 4$ consideramos la sucesión recurrente dada por $x_{n+1}=\frac{1}{2}\big(x_n+\frac{t}{x_n}\big)$ con $x_1=2$.
a) Probar que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2\ge 4ab$ para $a,b\ge 0$.
b) Demostrar que es monótona decreciente.
c) Deducir que $\lim x_n=\sqrt{t}$.

7) Los procesadores por sí mismos hacen sólo operaciones muy básicas y todas las funciones matemáticas radican en algoritmos. Aquí analizaremos la aproximación de raíces cuadradas mediante el ejercicio anterior.

a) Utilizando $\sqrt{a2^{2n}} = 2^n\sqrt{a}$ y recordando que los ordenadores trabajan en base 2, explicar por qué un algoritmo para raíces cuadradas de números en $(1,4]$ se extiende fácilmente a $\mathbb{R}^+$.

b) Probar que la sucesión del ejercicio anterior cumple $x_{n+1} - \sqrt{t} \le \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{t}\big)$ y por tanto si x_n aproxima $\sqrt{t}$ con k bits de precisión entonces x_{n+1} lo aproxima con al menos $k+1$.

c) Escogiendo valores concretos de t y unos pocos x_n comprobar que la convergencia es muchísimo más rápida de lo que afirma el apartado anterior.

8) Utilizando la relación $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ dar una fórmula exacta sencilla para las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ y utilizarla para averiguar a qué valor converge esta serie.

9) Consideremos la serie geométrica $S = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. ¿Para qué valores de x converge? Deducir para ellos que $S = x/(1-x)$ usando la relación $S_{n+1} = xS_n + x$ entre las sumas parciales.

10) Decidir si las siguiente afirmaciones son verdaderas, dando una pequeña explicación, o falsas, dando un contrejemplo.

a) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge.

b) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ no converge.

c) Si $\lim a_n = 0$ entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge.

d) Si $a_n > 0$ y a_n es monótona y no está acotada entonces $\sum a_n^{-n}$ converge.

e) Si $a_n > 0$ entonces $\sum \left(\frac{a_n}{2a_n+1}\right)^n$ converge.

11) Estudiar si las series siguientes son convergentes. Los sumatorios se sobreentienden sobre $n \ge 1$.

$$a)\ \sum \frac{n^2+1}{n2^n}, \qquad b)\ \sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}, \qquad c)\ \sum (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}, \qquad d)\ \sum \frac{n^2-6}{n^3+1},$$

$$e)\ \sum \big(\sqrt{n^4+1} - n^2\big), \qquad f)\ \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad g)\ \sum \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^2, \qquad h)\ \sum \frac{n!}{n^n}.$$

12) La sucesión de Fibonacci está definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_1 = F_2 = 1$.

a) Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n}^{-1/2010}$ converge.

b) Sabiendo que $a_n = F_{n+1}/F_n$ es una sucesión convergente hallar su límite. *Indicación*: ¿Qué relación hay entre a_n y a_{n+1}?

Nota: La convergencia de a_n se sigue de que tanto a_{2n} como a_{2n+1} son sucesiones monótonas y acotadas.

13) Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a)\ \sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}, \qquad b)\ \sum \big(\sqrt{n^{2\alpha}+2} - n^\alpha\big), \qquad c)\ \sum \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha},$$

$$d)\ \sum \big(1 - \frac{\alpha}{n}\big)^{n^2}, \qquad e)\ \sum \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^\alpha, \qquad f)\ \sum \frac{3^{\alpha n} + n^{-\alpha}}{2^{\alpha n} + n\log^2 n}.$$

14) Muchos problemas de ingeniería tienen soluciones dadas por series y hay varios métodos que permiten "acelerar" su convergencia para economizar tiempo de computación. En este problema veremos uno de los más sencillos que se aplica a series alternadas $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $\lim a_n = 0$ y $a_n > 0$ decreciente (el criterio de Leibniz asegura la convergencia).

a) Probar que

$$S = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}A \qquad \text{con} \qquad A = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n - a_{n+1}).$$

¿Qué relación hay entre las sumas parciales de S y A?

b) Calcular la serie "acelerada" A en el caso $a_n = 1/n$ y también la serie "doblemente acelerada" $\widetilde{A}$ (la acelerada de A).

c) Sabiendo que $S = -\log 2 = 0{,}69314718\ldots$ para $a_n = 1/n$ calcular con ayuda de un pequeño programa (o con menos valores) el error cometido al aproximar este valor cuando se toman en la serie original 10, 20 y 100 términos, y repetir los mismos cálculos usando A y $\widetilde{A}$.

15) Es conocido que si el criterio del cociente no es concluyente para una serie porque el límite da 1, entonces tampoco puede serlo el de la raíz. Dando esto por conocido, deducir el valor de $\lim \sqrt[n]{n!}/n$ estudiando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n)^{-n} n!$ para $\alpha > 0$.

16) Numerosos algoritmos tienen una estructura llamada "divide y vencerás" que consiste en que una entrada de n bits se divide en k trozos y después de unas cuantas manipulaciones sencillas se llama al algoritmo v veces. Por ello es habitual que el tiempo máximo que tarda el algoritmo sea una sucesión creciente t_n que satisface

$$t_n = v t_{\lceil n/k \rceil} + \epsilon_n$$

donde ϵ_n es el tiempo de las manipulaciones sencillas y $\lceil n/k \rceil$ es el entero más cercano por arriba a n/k (la longitud máxima de cada trozo).

a) Supongamos que $0 \le \epsilon_n \le Cn$ para cierta constante C. Probar que

$$t_{k^m} \le t_1 v^m + C v^m \left(\frac{k}{v} + \left(\frac{k}{v}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{v}\right)^m \right).$$

b) Deducir que fijados $v > k$ y t_1, la sucesión $n^{-\alpha} t_n$ con $\alpha = \frac{\log v}{\log k}$ está acotada. *Indicación*: Por ser creciente, $t_{k^m} \le t_n < t_{k^{m+1}}$ si $k^m \le n < k^{m+1}$, entonces $n^{-\alpha} t_n \le k^{-\alpha m} t_{k^{m+1}}$.

17) Para un ordenador sumar dos números de n bits con n grande requiere un tiempo proporcional a n pero multiplicarlos es más costoso. El método más simple, como el que usamos a mano, necesitaría un tiempo proporcional a n^2 y fue reducido por primera vez por el estudiante ruso (y después eminente matemático recientemente fallecido) A.A. Karatsuba.

a) Dos números x e y de $2n$ bits se escriben como $x = 2^n a + b$, $y = 2^n c + d$ con $0 \le a, b, c, d < 2^n$ simplemente separando la mitad de los bits (cifras). Comprobar que

$$xy = 2^{2n} L + 2^n M + N$$

con $L = ac$, $N = bd$ y $M = (a+b)(c+d) - (L+N)$.

b) Deducir que calcular xy requiere tres multiplicaciones de números de n bits y algunas sumas (multiplicar por 2^k es inmediato para el ordenador como para nosotros multiplicar por la unidad seguida de ceros). Por tanto el tiempo t_n que se tarda en multplicar dos números de n bits verifica $t_n = 3t_{\lceil n/2 \rceil} + Cn$ para cierta constante C.

c) Concluir usando el ejercicio anterior que se pueden multiplicar dos números de n bits en a lo más Kn^α segundos con $\alpha = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5849\dots$ y K una constante que depende de la velocidad del procesador.

Nota: Actualmente se conocen métodos mucho mejores cuando n es enorme.

18) Consideramos la serie

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \dots$$

a) Comprobar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ esta serie es convergente. Mas tarde en el curso demostraremos que converge a $\operatorname{sen} x$.

b) Suponiendo lo afirmado en el apartado anterior, probar que para $|x| \le 1$

$$-\frac{x^7}{7!} \le \operatorname{sen} x - \big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\big) \le 0$$

y utilizarlo para aproximar $\operatorname{sen} 1$ con tres cifras decimales de precisión sin calculadora. *Indicación*: Agrupar los términos por parejas.

A.3. Hoja 3

1) Encontrar funciones continuas f, g y h con las siguientes propiedades:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ es biyectiva.

b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ es inyectiva.

c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que la imagen de $(-1,1)$ por h es $[-1,1]$.

2) Decidir si es posible definir las siguientes funciones fuera de los valores que se indican para que sean funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2}$ si $0 < x < 1$, *b)* $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)\big(\operatorname{sen} \dfrac{1}{x-\pi}\big)$ si $x < \pi$, *d)* $f(x) = e^{-1/(x-2x^2)}$ si $0 < x < 1/2$,

e) $f(x) = \cos \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$ si $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, *f)* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \\ x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

3) Empleando el método de la bisección hallar una aproximación de la solución de la ecuación $xe^x + 2e^x = 1$ con dos cifras decimales correctas.

4) Probar que al calentar un aro siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura. *Indicación*: Considérese $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha + \pi)$ donde $T(\alpha)$ es la temperatura en función del ángulo en radianes. ¿Qué relación hay entre $f(\alpha)$ y $f(\alpha + \pi)$?

5) Para este problema es necesario conocer que la gráfica se $f(x) = \operatorname{sen} x$ es cóncava (curvada hacia arriba) en $[0, \pi]$ y convexa (curvada hacia abajo) en $[\pi, 2\pi]$.

a) Hallar el número de soluciones de la ecuación $10 \operatorname{sen} x = x$ y obtener una aproximación con al menos una cifra decimal de una solución en $(8, \infty)$.

b) Dado $N \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario hallar el número de soluciones de $N \operatorname{sen}(2\pi x) = x$.

6) Si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua probar que existe al menos un valor $x_0 \in [0, 1]$ que queda fijo, es decir, tal que $f(x_0) = x_0$.

7) La implementación más simple del método de la bisección para resolver $f(x) = 0$ corresponde a iterar cierto número `N` de veces el siguiente código

```
med = (ext1+ext2)/2.0;
if( f(ext1)*f(med)<=0 ) ext2 = med;
else ext1 = med;
```

donde `ext1` y `ext2` son los extremos del intervalo y `med` se acercará a la solución buscada. Supondremos, como ocurre en la práctica para funciones mínimamente complicadas, que todo el tiempo del algoritmo radica en las dos evaluaciones de f en cada paso.

a) Explicar en pocas palabras porqué el código anterior corresponde al método de la bisección.

b) Si inicialmente `ext1` $= 0$ y `ext2` $= 1$ (esto es, $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos distintos) y cada evaluación de f requiere 5 *ms* (milisegundos), estimar el `N` mínimo y el tiempo de ejecución para asegurar que la diferencia entre `med` y la solución exacta es menor que 10^{-12}.

c) ¿Es posible mejorar el algoritmo para que sólo sea necesaria una evaluación por paso y por tanto la mitad de tiempo?

8) Hallar dos funciones discontinuas tales que su suma sea continua y no constante. Hallar también dos funciones discontinuas tales que su producto sea continuo. ¿Es posible resolver los dos apartados anteriores con el mismo par de funciones?

9) Hallar cuántas funciones continuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumplen $(f(x))^2 = x^2$ justificando la respuesta con rigor.

10) Consideremos un juego en que una persona piensa un número entre 1 y 1024 que su oponente debe adivinar. A cada intento incorrecto el primer jugador sólo puede responder si es mayor o menor.

a) Adaptar el método de la bisección para elaborar un algoritmo que permita adivinar el número tras a lo más 10 intentos incorrectos.

b) Probar que es imposible encontrar un algoritmo mejor, en el sentido de que el número máximo de fallos sea menor. *Indicación*: Las formas de elegir una tira de k signos de desigualdad es 2^k porque hay dos posibilidades para uno de ellos mientras que por otro lado $\sum_{k=0}^{9} 2^k < 1024$.

A.4. Hoja 4

1) Usando la definición de derivada comprobar que las funciones $f(x) = 1/(x^2|x| + 1)$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ verifican $f'(0) = g'(0) = 0$. Comprobar que $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ no es derivable en cero.

2) ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = x_0$?

3) Supongamos que $|f(x)| \le x^2$ en cierto intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. Utilizar la definición de derivada para calcular $f'(0)$.

4) Si $f'(x^2)$ y la derivada de $f(x^2)$ coinciden en $x = a \neq 0$, ¿qué puede decirse de $f'(a^2)$?

5) Calcular las derivadas de las funciones

a) $f(x) = \operatorname{sen}\big(x + \dfrac{\cos x}{x}\big)$, *b)* $f(x) = \log\big(e^{5x} + 1\big)$, *c)* $f(x) = (x + 2^x)e^x$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$, *e)* $f(x) = \dfrac{x \log x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x}$, *f)* $f(x) = \dfrac{x + 2\cos x}{\sqrt{2 + x(4 + x^4)}}$,

g) $f(x) = \dfrac{2^x(4x^2 - 1)}{(5x + 4)^2}$, *h)* $f(x) = e^{\left(e^{1/x}+1\right)^2}$, *i)* $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{(3 + \operatorname{sen}(0.7x)) \log x}$.

6) Calcular las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto que se indica

a) $f(x) = \log(e + \operatorname{sen} x)$ en $x = 0$, *b)* $f(x) = x^{x^2 - x + 1}$ en $x = 1$,

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en $x = \pi/6$, *d)* $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

7) Algunos autobuses interurbanos tienen una palanca a la derecha del volante llamada freno electromagnético que cuando se activa hace que unos electroimanes ligados a las ruedas ejerzan una fuerza opuesta al movimiento proporcional a la velocidad que lleva el vehículo.

Supongamos que un autobús de 10 toneladas baja un puerto con una pendiente del 10 % a una velocidad de $30m/s$ (esto son $108km/h$) y en cierto momento $t = 0$ se queda sin frenos por lo que el conductor activa el freno electromagnético, que produce una fuerza de 2500 veces la velocidad del vehículo.

a) Las leyes de la mecánica aseguran $F = ma$ y que la aceleración debida a la gravedad es aproximadamente $9.8 \operatorname{sen}(0.1) \approx 0.98$, por lo que

$$10000 \cdot 0.98 - 2500\frac{dx}{dt} = 10000\frac{d^2x}{dt^2}$$

donde $x(t)$ son los metros recorridos por el vehículo. Al cabo de un tiempo frenando se llega esencialmente a que la velocidad del autobús es constante, es decir $x'(t) = c$. ¿Cuál es esa constante?

b) Se sabe que la solución es de la forma $x(t) = At + B(1 - e^{Ct})$. Calcula las constantes A, B y C. *Indicación*: usar la condición inicial $x'(0) = 30$ y la ecuación.

c) Desde que empieza a frenar, al autobús le quedan $82m$ hasta una curva muy cerrada. Para tomarla sin salirse debería llegar a ella a menos de $14m/s$ (unos $50km/h$). ¿Lo conseguirá?

8) La fórmula

$$f'(x) = f(x)\big(\log f(x)\big)'$$

se llama *derivación logarítmica* y se dice que L. Euler (matemático del siglo XVIII) lo consideraba su truco favorito. Su fuerza para calcular $f'(x)$ se muestra sólo en los casos en que se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos: $\log(a+b) = \log a + \log b$, $\log a^b = b \log a$.

a) Usar la derivación logarítmica para hallar las derivadas de

$$f(x) = (x^2+1)^7(e^x+1)(\cos x + \operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = (x^2+1)^{x^2+1}.$$

b) Escribir una regla para derivar un producto de funciones $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$.

9) Recuérdese que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

a) Demostrar que $1/\cos^2 x$ es la derivada de $\tan x$.

b) La función $\operatorname{arc\,sen} x$ es la inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow (-1, 1)$. Deducir derivando $(f \circ f^{-1})(x) = x$ que $1/\sqrt{1-x^2}$ es la derivada de $\operatorname{arc\,sen} x$.

10) ¿Qué se obtiene al derivar tres veces $f(x)g(x)$?

11) Se está inflando un globo, que suponemos de forma esférica, con una bomba de aire a un ritmo de 20 centilitros por segundo. ¿A qué ritmo cambia el radio del globo en el instante en que el globo contiene 1 litro de aire? (Recuérdese que el volumen de una esfera de radio R es $(4/3)\pi R^3$). Intentar explicar también por qué la derivada del volumen es el área de la superficie esférica, $4\pi R^2$.

12) En muchas fórmulas de ingeniería aparecen derivadas. A la hora de programar, la derivada de f se suele aproximar por

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad \text{en vez de por} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

con h pequeño.

a) Comprobar que la primera aproximación es exacta para polinomios de grado 2 mientras que la segunda no lo es.

b) Escogiendo una función f complicada, como $f(x) = \cos\big((x+1)\operatorname{sen} x\big)$, y un punto x_0 que no sea exacto, como $x_0 = \sqrt{2}$. Dando valores con una calculadora comprobar que la primera aproximación para $f'(x_0)$ es típicamente mejor que la segunda para h pequeño.

c) Encontrar f y x_0 tales que f no es derivable en x_0 pero sí existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Así la aproximación permite ampliar la definición de derivada. *Indicación*: Intentar que el numerador sea pequeño en comparación con $f(x_0+h) - f(x_0)$.

13) Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_1 \in \mathbb{R}$, sea x_2 la intersección con el eje X de la recta tangente en $x = x_1$ a la gráfica de f, x_3 la intersección de la tangente en $x = x_2$ y así sucesivamente.

a) Escribir la fórmula que da x_{n+1} en función de x_n.

b) Comprobar que para $f(x) = x^2 - t$ se tiene $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big)$ que apareció en un problema anterior para aproximar $\sqrt{t}$.

c) Explicar geométricamente por qué es lógico que bajo condiciones adecuadas la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a una solución de $f(x) = 0$.

Nota: Este método para resolver $f(x) = 0$ se llama *método de Newton* y suele ser más rápido que el de bisección.

14) La fórmula $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m = (x^{m+1} - 1)/(x - 1)$ es bien conocida y se prueba por inducción o simplemente multiplicando por $x - 1$.

a) Derivando, utilizarla para calcular $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 15 \cdot 2^{15}$.

b) ¿Cómo calcular $1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + 15^2 \cdot 2^{15}$?

15) Como parte de un videojuego, se quiere simular el aterrizaje de un avión. Para hacer que el programa sea eficiente se elige que la trayectoria del avión en pantalla venga descrita por un polinomio de grado 3, es decir $y = p(x)$, con $p(x)$ dicho polinomio y (x, y) el punto con distancia horizontal x y distancia vertical y a la esquina inferior izquierda de la pantalla.

a) Queremos que el inicio del aterrizaje sea el punto $(2, 4)$ y el final en $(5, 1)$, y además que las tangentes a las trayectorias en esos dos puntos sean horizontales. ¿Qué polinomio debemos elegir para obtener ese resultado? *Indicación*: Escribir $p(x) = 3f\big(\frac{x-2}{3}\big) + 1$ donde f es un polinomio cúbico.

b) Deseamos que nuestro programa sea muy realista: vamos a hacer que el avión se mueva por la trayectoria obtenida en a) con velocidad horizontal constante $x'(t) = V$ y que la aceleración vertical cumpla $y''(t) \le 96$. ¿Cuánto puede valer V a lo más para que esto ocurra?

Nota: La idea de este problema tiene que ver con técnicas de *splines*, empleadas en la práctica en muchos contextos tales como escalado de una fotografías digitales, animación y sombreado de imágenes 3D.

A.5. Hoja 5

1) Hallar una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

2) Se llama arco seno hiperbólico a la función inversa de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Explicar por qué el arco seno hiperbólico es derivable en todo punto y comprobar que su derivada es $1/\sqrt{x^2 + 1}$.

3) Las funciones $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ y $g(x) = \arccos x$ se definen en $(0, 1)$ como las inversas de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, respectivamente, restringidas a $(0, \pi/2)$.

a) Comprobar que $f'(x) = -g'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

b) Empleando que $f + g$ tiene derivada nula, hallar una relación entre $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\arccos x$.

4) Hallar un $c \in (1, 22)$ tal que $\big(f(22) - f(1)\big)/(22-1) = f'(c)$ para $f(x) = x^3 + x$.

5) Sea f es una función dos veces derivable tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos tres soluciones en un intervalo $[a, b]$.
a) Usando el teorema de Rolle, probar que existe un $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.
b) Generalizar este hecho a una función n veces derivable con $n+1$ soluciones de $f(x) = 0$.

6) Explicar con detalle cómo se deduce del teorema del valor medio que dos funciones cuyas derivadas coinciden en todo un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo.

7) En Cosmología el estado del Universo se representa por un factor de expansión $C = C(t)$ no negativo que en el instante inicial $t = 0$ (el *big-bang*) cumple $C(0) = 0$. En el tiempo actual $t = T_a$ (la edad del Universo) toma un valor indeterminado, sin embargo es posible aproximar experimentalmente el valor de $H_0 = C'(T_a)/C(T_a)$, llamado constante de Hubble, dividiendo velocidades y distancias de galaxias lejanas. Además, según el "modelo plano", C debe satisfacer $\big(C(C')^2\big)' = 0$.
a) Deducir que $\sqrt{C}C'$ es igual a una constante K y que $\frac{2}{3}\big(C(t)\big)^{3/2} = Kt$.
b) Dividiendo las ecuaciones del apartado anterior encontrar una relación entre H_0 y T_a, y deducir la edad del Universo T_a en años a partir del valor a veces aceptado $H_0 = 2.5 \cdot 10^{-18} s^{-1}$.

8) Calcula el número exacto de soluciones $x \in \mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones usando los Teoremas de Bolzano y de Rolle:

a) $2x - 1 = \operatorname{sen} x$	*b)* $2x^3 + ax = a$, con $a > 0$	*c)* $x = \arctan x$
d) $x^2 + 2.5 = 4^x$	*e)* $x^5 - 5x - 3 = 0$	*f)* $(x+2)^{1/4} - x^{1/4} = 1$.

Indicación: Por el teorema de Rolle si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo.

9) Hallar los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$ y estimar sin calculadora el error cometido al utilizarlos como aproximación de $\sqrt{16.2}$. Comprobar después con ayuda de una calculadora la precisión de dicha estimación. Con una estrategia similar encontrar también aproximaciones sencillas de e y de $\log 0.8$.

10) Hallar los polinomios de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para las siguientes funciones

$$a)\ f(x) = \log(1 + \operatorname{sen} x), \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{3 + e^x}, \qquad c)\ f(x) = \operatorname{sen}\big(\frac{x}{1+x}\big).$$

11) ¿Para qué valores de x convergen las series de Taylor (en $a = 0$) de las funciones $f(x) = 1/(1-x)$ y $g(x) = 1/(1-x^2)$?

12) Obtener la serie de Taylor de $f(x) = (x^2 - 3x)e^{x^4}$ en $a = 0$ a partir de la de e^x y utilizarla para hallar $f^{(5)}(0)$ y $f^{(10)}(0)$.

13) Hallar las series de Taylor en $a = 0$ para las siguientes funciones, indicando dónde convergen

$$a)\ f(x) = x\log(1+x^2), \qquad b)\ f(x) = x^2\operatorname{sen}(x^3), \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

14) Queremos construir una lente maciza que dirija los rayos de luz que salgan del punto $(0,0)$ al punto $(0,1)$. Haciéndola de cierto cristal, una lente perfecta vendría dada por la curva

$$\sqrt{x^2+y^2} + 3\sqrt{x^2+(1-y)^2} = 2.$$

Esta curva define y como función de x, con $y(x) > 0$. Es complicado construir una lente así, y por eso elegimos aproximar $y(x)$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a = 0$. Calcular dicho polinomio y dibujar su gráfica. *Indicación*: Para el cálculo de $y'(0)$ y de $y''(0)$ derivar la ecuación de partida.

15) Muchas veces en informática (por ejemplo en representaciones gráficas) sólo se conoce una tabla de unos pocos valores de una función f y se quieren aproximar otros valores. Hay varios métodos con este propósito (como las curvas de Bézier o los splines cúbicos). La interpolación cuadrática sugiere que si conocemos $f(a)$, $f\big((a+b)/2\big)$ y $f(b)$ entonces $f(x)$ con $x \in [a,b]$ se debería aproximar por

$$L\big(\frac{2x-a-b}{b-a}\big) \qquad \text{donde} \qquad L(x) = \frac{f(a)}{2}(x^2-x) + \frac{f(b)}{2}(x^2+x) + f\big(\frac{a+b}{2}\big)(1-x^2).$$

a) Con ayuda de una calculadora aproximar de esta forma $\log 8.3$ suponiendo conocidos $\log 7$, $\log 8$ y $\log 9$.

b) Suponiendo que el valor absoluto del error E en la aproximación es máximo para cierto $c \in (a,b)$, consideremos la función

$$F(x) = E(x) - E(c)\frac{(x-a)(x-(a+b)/2)(x-b)}{(c-a)(c-(a+b)/2)(c-b)} \qquad \text{donde} \qquad E(x) = f(x) - L\big(\frac{2x-a-b}{b-a}\big).$$

Comprobar que F se anula en a, b, c y $(a+b)/2$. Deducir de un problema anterior que $F'''(d) = 0$ para cierto $d \in (a,b)$ y, usando $E'''(x) = f'''(x)$, concluir finalmente

$$E(c) = \frac{f'''(d)}{6}(c-a)(c-(a+b)/2)(c-b).$$

En definitiva, la aproximación es buena siempre que los puntos no estén alejados y la derivada tercera no sea muy grande.

16) Según la Mecánica Cuántica la probabilidad de de detectar un electrón a distancia x del núcleo en un átomo de hidrógeno es proporcional a $\psi^2(x)$, con $\psi(x) = e^{-\alpha x}g(x)/x$ donde $\alpha > 0$ es un parámetro relacionado con la energía y g es una función con $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ que satisface la ecuación

$$\frac{d^2g}{dx^2} - 2\alpha\frac{dg}{dx} + \frac{2}{x}g = 0.$$

a) Demostrar que los coeficientes a_n de la serie de Taylor de g en cero responden a la recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{2(\alpha n - 1)}{n(n+1)} a_n, \qquad a_1 = 1$$

y comprobar que dicha serie converge para todo x. *Indicación*: Escribir $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y sustituir en la ecuación suponiendo que se puede derivar término a término..

b) Demostrar que para $\alpha = 1, 1/2, 1/3 \ldots$ $g(x)$ es un polinomio, y que para otros valores de α esto no ocurre.

c) Calcular $g(x)$ para $\alpha = 1$, $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 1/3$. En cada caso, decidir si es más probable encontrar el electrón a una distancia de 3 o de 4 unidades del núcleo.

A.6. Hoja 6

1) Calcular los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(6x))}{\log(\cos(3x))}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ con $a, b, c > 0$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(a/x)$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - 2\log(1+x)}{x^2}$.

2) Encontrar el error al aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-8x+7}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{3x^2-6x} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-2}{6x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{6}{6} = 1\,.$$

Hallar el valor correcto de este límite.

3) El volumen $v = v(T)$ de 1 gramo de agua (en cm^3) se expresa como función de la temperatura T por la siguiente fórmula (aproximada) obtenida experimentalmente:

$$v(T) = 1 + 8.38 \cdot 10^{-6}(T-4)^2.$$

¿A qué temperatura este volumen será mínimo? ¿Cuál es ese volumen mínimo? Usando el método de Newton calcular aproximadamente la temperatura a la que el volumen es de 1.001 cm^3.

4) El movimiento de cierto punto por una recta está descrito por la siguiente dependencia entre su posición x y el tiempo $t \geq 0$:

$$x = at^2 + bt + c \quad \text{con} \quad a > 0\,.$$

¿Qué se puede decir de su aceleración? ¿Para qué tiempos t en un intervalo $[0, T]$ se alcanzan la velocidad mínima y máxima? ¿Cuál es la velocidad media en ese intervalo? ¿Para qué valor de t se alcanza la velocidad media?

5) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$,
b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ con p, q, $r \in \mathbb{R}$,
c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(100x) - x$.

6) Queremos construir un cercado rectangular de 20 metros cuadrados pegado a la pared de una granja (luego no es necesario construir uno de los lados). ¿Cuántos metros de cercado debemos construir como mínimo? En ese caso, ¿cuál es la relación entre los lados?

7) Dibujar la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = e^{1/x}$,
b) $f(x) = x\log(x)$,
c) $f(x) = x + 1 - 1/x - 1/x^2$,
d) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)^2$.

Para ello buscar los intervalos de definición, continuidad y derivabilidad de las funciones. Calcular y utilizar f' y f'' para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, extremos locales (también llamados relativos) y puntos de inflexión.

8) Desde nuestro puesto de controlador en un aeropuerto vemos en la pantalla del radar que un avión está siguiendo la trayectoria dada por la ecuación $y = 2 - x^{2/3}$, con $x \geq 0$. Si el aeropuerto está en el punto $(0,0)$, ¿cuál es la distancia mínima a la que ha pasado el avión? Utilizar el método de Newton para aproximar la solución.

9) Dadas las funciones

a) $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{5}}$,
b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$
c) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$,

se pide su dominio, los límites en los extremos de los intervalos de su dominio, puntos de intersección con los ejes, intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, recorrido. Con la infomación obtenida dibujar la gráfica.

10) El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

$$N(t) = 1 + (3-t)^2 e^{-t}, \quad \text{con } t \geq 0, \qquad t = \text{ tiempo que transcurre (en años).}$$

¿Cuándo la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál será la población a largo plazo? ¿Cuál es la velocidad máxima de crecimiento de la población?

11) Calcular aproximadamente, usando el método de Newton, la mayor solución de cada ecuación en el intervalo indicado:

a) $x^3 - 6x^2 - 15x + 1 = 0$, con $x \in \mathbb{R}$

b) $\cos x + x \operatorname{sen} x = 0$, con $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

12) Vamos a diseñar un programa de ordenador y antes de hacerlo calculamos de manera teórica su tiempo de ejecución, obteniendo

$$t = a^2n^2 + (n-a)n^3 + 80$$

donde t es el tiempo en milisegundos, n es el número de bits del dato de entrada y a es un parámetro que depende de cómo distribuyamos la carga de trabajo entre los diferentes procedimientos del programa.

a) Calcular a para que el programa sea lo más eficiente posible.

b) ¿Podemos conseguir que para datos iniciales grandes el tiempo de ejecución sea menor que n^4?

13) Dibujar de manera esquemática las siguientes funciones, teniendo en cuenta su dominio y las regiones de crecimiento y convexidad. A veces no es posible calcular de manera explícita los puntos de máximo o de inflexión; en esos casos, utilizar el Teorema de Bolzano para aproximarlos.

a) $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$ en el intervalo $[-5, 5]$,

b) $f(x) = 2^x - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$ en $x \geq 0$,

c) $f(x) = \cos(x^2)$ en $x \geq 0$.

14) Sabemos que el número de individuos de cierta población de bacterias $N = N(t)$ viene regido aproximadamente por la ecuación

$$N' = (3-2t)N^2e^N$$

para todo $t \geq 0$, y además $N(0) = 20$.

a) Calcular las zonas de crecimiento de N. ¿Cuándo la población es máxima?

b) Se sabe que N' y N convergen a ciertos valores cuando t tiende a infinito. ¿A qué valores?

c) Usa los datos anteriores para dibujar la gráfica de N.

15) Un escalador sube por una pared de pendiente 4 y en cierto instante lanza un pico para que le sirva de ayuda en la ascensión. Lo arroja con un ángulo α y a una velocidad de 5 metros por segundo.

a) Si $x(t)$ e $y(t)$ representan la distancias horizontal y vertical del pico con respecto al escalador, entonces

$$x'(t) = 5\cos\alpha, \quad x(0) = 0$$

$$y''(t) = -g = -9.8, \quad y'(0) = 5\operatorname{sen}\alpha, \quad y(0) = 0.$$

Calcular $x(t)$ e $y(t)$ hallando sus series de Taylor en $a = 0$.

b) Escribir y en función de x. ¿Con qué ángulo debería lanzarlo para llegar lo más lejos posible?

16) Queremos resolver la ecuación $3t - 4t^3 = 0.2$, con $0 < t < 1$.

a) Aproximar la solución con 2 iteraciones del método de Newton, comenzando en $t = 0$.

b) Usar el Teorema de Bolzano para comprobar que la aproximación del apartado anterior da al menos 4 cifras decimales de precisión.

c) Probar la identidad $3 \operatorname{sen} x - 4(\operatorname{sen} x)^3 = \operatorname{sen} 3x$ calculando la serie de Taylor de $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - 4(\operatorname{sen} x)^3 - \operatorname{sen} 3x$ en $a = 0$ y observando que $f''(x) = -9f(x)$. Usar esa identidad y la calculadora para comparar la aproximación del apartado a) con la solución real.

17) Vamos en una piragua de 5.5 metros por un arroyo de anchura de 3 metros. Vemos que viene una curva de 90 grados, y que justo tras ella el arroyo se estrecha a 1 metro. Despreciando la anchura de la piragua, ¿lograremos pasar? Nótese que la mejor estrategia es ir pegados a la esquina interior y con los bordes de la piragua rozando la orilla opuesta.

18) Creemos que dos cantidades físicas, x e y, están relacionadas de manera lineal, es decir $y = ax + b$ para ciertas constantes a y b. Experimentalmente hemos obtenido 3 medidas diferentes para (x, y): $(2.2, 3.6)$, $(4.2, 7.9)$, $(5.0, 9.1)$. Para elegir a, b de forma que se adapten a esos datos, vamos a buscarlos de manera que minimizen la cantidad D, que es igual a la suma de los cuadrados de las distancias verticales de la recta a los puntos obtenidos experimentalmente. Para ello:

a) Consideramos D como función de b y hallamos su mínimo.

b) El mínimo del apartado anterior va a depender de a, luego podemos escribirlo como $M = M(a)$. Hallamos el mínimo de $M(a)$.

c) Los valores de a y b que buscábamos son los que nos han salido en los apartados anteriores. ¿Cuál es la recta obtenida?

19) Estamos diseñando un videojuego y queremos que un personaje vaya de una ciudad a otra parando antes de llegar en algún punto de la costa para pescar. Suponiendo que una ciudad está en el pixel $(30, 50)$ y otra en $(60, 80)$ y que la costa es la línea de píxeles $(2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ¿cuál sería la trayectoria más corta a seguir por el personaje?

20) Al elaborar programas que involucren derivadas segundas se suelen aproximar éstas por

$$D(x, h) = \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} \qquad \text{con } h \text{ pequeño.}$$

Suponiendo que f tiene el número de derivadas que sean necesarias para aplicar la regla de L'Hôpital, calcular

$$\lim_{h \to 0} D(x, h) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{D(x, h) - f''(x)}{h}.$$

Explicar por qué estos resultados implican que la aproximación es buena cuando h es muy pequeño. Con ayuda de una calculadora hallar el error al aproximar $f''(3)$ por $D(3, 0.01)$ cuando $f(x) = x/\log x$.

A.7. Hoja 7

1) Si f es continua y derivable y satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) \quad \text{para todo} \quad x \geq 0\,,$$

calcular $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

2) Comprobar que $\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x\,|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3) Explicar geométricamente por qué se cumple $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

4) Calcular una fórmula explícita para la función $g(a) = \int_0^7 (a+x^2)^{-1}\,dx$, $a > 0$. Hallar el valor de $g'(1)$ a partir de esa fórmula. Como la integral es una suma, la derivada de la integral es la integral de la derivada, es decir

$$\frac{dg}{da} = \int_0^7 \frac{d}{da}\Big(\frac{1}{a+x^2}\Big)\ dx.$$

Usar esta expresión para calcular $\int_0^7 dx/(1+x^2)^2$.

5) Hallar $f'(x)$ si

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-2}\,dt,$

b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt,$

c) $f(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt,$

d) $f(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{1} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt.$

6) Aproximar

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-\,\mathrm{arc\,sen}\,t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

usando el polinomio de Taylor de grado 2 en cero de la función que está dentro de la integral. Hallar también la integral de forma exacta y comparar los resultados.

7) Determinar el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$ de la función

$$h(x) = \int_0^1 y^{3/2} e^{-xy^2}\,dy$$

usando la serie de Taylor de e^t en $a = 0$.

8) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a) $(3+5x+x^2)(x-3)$ *b)* $e^x(e^x - e^{-x}) + \dfrac{1}{5x-2}$ *c)* $3\,\mathrm{sen}(5x) - \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{1+4x^2}$

d) $\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{2}{(4x+1)^2}$ *e)* $\dfrac{4}{\sqrt{1-2x^2}} - \sqrt{x} + \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ *f)* $(x^2+3x)(5x^3 - \dfrac{8}{x^3})$

9) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a) $(x+2)2^x$ *b)* $\log x + x \log x$ *c)* $-9x^2 e^{-5x+3}$

d) $x(\cos(5x)+x)$ *e)* $(x+\operatorname{sen} x)e^{-x}$ *f)* $x\sqrt{x+1}$

10) Integrando por partes con $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$, obtener la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx \qquad \text{para } n \geq 2 \text{ entero}$$

y utilizarla para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 x \, dx$.

11) Calcula las primitivas de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{x}{(x+1)(x-3)}$ *b)* $\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$ *c)* $\dfrac{2}{(x-1)(x+3)^2}$

d) $\dfrac{35x+21}{(2x-3)(x-5)^2}$ *e)* $\dfrac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}$ *f)* $\dfrac{3x^2+2x-13}{x^3-3x^2+x-3}$

12) Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{2x+5}{(x-a)(x-b)(x-c)} \, dx$$

con a, b, c números distintos. Utilizar el resultado para aproximar

$$I = \int \frac{2x+5}{x^3-3x+1} \, dx,$$

probando primero que $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones distintas y aproximándolas por el método de Newton.

13) Calcular $\int_0^1 f(x) \, dx$, con $f(x)$ igual a:

a) $e^{-\sqrt{x}}$ *b)* $\dfrac{1}{e^x + 4e^{-x}}$ *c)* $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$ *e)* $\sqrt{3-x^2}$ *f)* $\dfrac{4^x+1}{2^x+1}$

g) $\sqrt{\dfrac{3+4x}{1+x}}$ *h)* $\dfrac{1}{\sqrt{16+x^2}}$ *i)* $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

Para las dos últimas, auxiliarse de $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + K$.

14) Si $V = V(t)$ indica la tensión en función del tiempo, se define la tensión eficaz (la que en cierto modo pueden aprovechar los motores) en un periodo $[0, T]$ como

$$V_{\text{ef}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |V(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Los enchufes caseros europeos tienen 220 voltios de tensión eficaz y $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(2\pi t/T)$ con $T = 1/50$. Hallar el voltaje máximo V_0 que proporcionan.

15) Calcular $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

a) $\operatorname{tg} x$ *b*) $\cos^4 x$ *c*) $\operatorname{tg}^2 x$

d) $\operatorname{arc\,sen} x$ *e*) $\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x$ *f*) $\operatorname{sen}^2(2x)\cos^2(2x)$

16) Calcular las integrales impropias

a) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\cos^2 x}\,dx,$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-5x}\,dx,$ *c*) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx.$

17) Hallar el valor de la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ con un error menor que 0.01 usando un polinomio de Taylor de $\operatorname{sen} x$ en el punto cero.

18) Expresar la integral $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ en términos de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

19) Cualquier polinomio $f(x)$ de grado tres satisface la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

pero para una función general es sólo una aproximación llamada *Regla de Simpson con dos subintervalos*. La *Regla de Simpson con* $2n$ *subintervalos*, $n \in \mathbb{N}$, consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud y en cada uno aplicar la regla con 2 subintervalos. Comprobar que la fórmula anterior es exacta para $f(x) = x^2$ y usar la regla de Simpson con 4 subintervalos para aproximar la integral $\int_0^1 e^x/(1+x)\,dx$.

20) Utilizando rectángulos de base $1/n$ para aproximar el área se deduce que toda función continua f en $[0, 1]$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx\,,$$

Utilizar este hecho para calcular los límites de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}\,, \qquad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}\,, \qquad c_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\,.$$

A.8. Hoja 8

1) Calcular el área limitada entre el eje X y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2k\pi]$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

2) Calcular el área limitada entre el intervalo $[-\pi, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

3) Hallar el área limitada entre las gráficas de los pares de funciones que se indican:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$,

b) $f(x) = \dfrac{2}{4x^2+1}$ y $g(x) = 2|x|$,

c) $f(x) = x\big(e^x + 1\big)$ y $g(x) = x + x^2e^x$,

d) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

4) Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$ consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f. Hallar el área de T.

5) Hallar el área limitada entre la curva definida por $y^2 = 3x$ y la recta $2y - x + 24 = 0$.

6) Deducir usando integrales que el área del círculo es πr^2.

7) Calcular el área de un sector circular de radio r y ángulo α. *Indicación*: Este problema se puede hacer con integrales o con una simple regla de tres a partir del problema anterior.

8) Deducir usando integrales que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

9) Estudiar la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, *e)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n \log\log n}$, *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$,

10) Comparar la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, s_n, con la integral de la función $f(x) = 1/x$ en intervalos adecuados y concluir que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $|s_n - \log n| \le 1$. En particular $s_{1\,000\,000\,000} < 22$ a pesar de que $\lim s_n = \infty$ porque la serie no converge.

11) Explicar con detalle empleando sumas superiores e inferiores por qué si f es creciente en $[1, N]$, $N \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(N) \ge \int_1^N f \ge f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1).$$

Tomar $f(x) = \log x$ para probar la desigualdad $1 \ge \dfrac{N^N e^{1-N}}{N!} \ge \dfrac{1}{N}$ y explicar cómo obtener a partir de ella el valor de $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

12) Consideremos la región tridimensional infinita $\mathcal{R}$ obtenida al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^{-1}$ alrededor del eje X para $x \geq 1$. Comprobar que el volumen de $\mathcal{R}$ es finito y sin embargo su área (lateral) es infinita. Por tanto se da la paradoja de que pintar $\mathcal{R}$ requiere un área infinita de pintura pero, si es transparente, basta verter un volumen finito de pintura en su interior.

13) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcular el área de la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

14) Calcular el área de la región plana limitada por la párabola de ecuación $(y-2)^2 = x-1$, la tangente a esta párabola en el punto $(2, 1)$ y el eje OX.

15) Calcular el área del recinto formado por los puntos (x, y) del plano que verifican

$$y^2 \geq 9x \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - 36 \leq 0.$$

Indicación: Nótese que la segunda ecuación define un círculo de área 36π y un sector circular suyo de ángulo $2\pi/3$ tendrá área $36\pi/3$.

16) Calcular el área de la figura limitada por la curva cerrada $y^2 = (1 - x^2)^3$.

17) Se considera la región $\mathcal{R}$ del plano definida por la parte positiva de los ejes de coordenadas y la curva $y = \cos x$ con $0 \leq x \leq \pi/2$. Hallar el valor del parámetro λ de modo que la curva $y = \lambda \operatorname{sen} x$ divida a la región $\mathcal{R}$ en dos regiones de igual área. *Indicación*: Escribir $\lambda = 1/\operatorname{tg}\gamma$ y emplear las relaciones trigonométricas.

18) Hallar el área de la región plana definida por las inecuaciones:

$$2y - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + y^2 \leq 0\,,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X.

19) Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la curva

$$y^2 = \frac{1}{9}x(x-3)^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 3$$

al girarla alrededor del eje OX.

20) Una partícula se mueve a lo largo del eje X describiendo una trayectoria $x = x(t)$ con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcular A sabiendo que $x(1) = x(0)$.

21) La proporción x de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye cuando la altura crece con una tasa de variación proporcional a x, es decir

$$\frac{dx}{dh} = -Cx$$

donde h es la altura en kilómetros sobre el nivel del mar.

a) Dividiendo entre x e integrando, hallar una fórmula para $x = x(h)$.

b) Para el oxígeno $C = 0.07$. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar? Responder a la misma pregunta para el hidrógeno, para el que $C = 0.006$.

c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400 000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?

22) La velocidad de un cuerpo en caída libre, teniendo en cuenta el rozamiento del aire, puede ser modelizada mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - Cv^2$$

con t el tiempo en segundos, v la velocidad en metros por segundo, $g = 9.8\, m/s^2$ y C una constante que depende de la forma del cuerpo.

a) Comprobar que la ecuación anterior se puede escribir como $\dfrac{v'}{\alpha - v} + \dfrac{v'}{v + \alpha} = 2\alpha C$ donde $\alpha = \sqrt{g/C}$. Integrar esta expresión para obtener la velocidad en función del tiempo suponiendo que se parte del reposo $v(0) = 0$.

b) Un hombre con el paracaídas cerrado tiene $C = 0.001$, y abierto $C = 0.5$. Calcular la velocidad a largo plazo en ambos casos.

c) En el caso del paracaídas cerrado, ¿cuánto tiempo pasa desde que se tira del avión hasta que alcanza la velocidad de 50 m/s? ¿Y el caso del paracaídas abierto?

23) Calcular la integral $\int_0^{1/\sqrt{3}} \arctan x \, dx$ integrando por partes. Sustituir $\arctan x$ por su serie de Taylor (en cero) e integrar término a término. Concluir de ambos resultados la fórmula

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{18} = \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1\cdot 2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^1 - \frac{1}{3\cdot 4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{1}{5\cdot 6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^3 - \frac{1}{7\cdot 8}\Big(\frac{1}{3}\Big)^4 + \frac{1}{9\cdot 10}\Big(\frac{1}{3}\Big)^5 - \dots$$

24) Teniendo en cuenta que la densidad del agua es $\rho = 1$ gr/cm^3, el principio de Arquímedes asegura que al tirar una pelota al agua y quedar ésta en equilibrio semisumergida, el volumen en centímetros cúbicos de la parte sumergida coincide con el peso en gramos de la pelota. Supongamos que para una pelota de radio 5 cm la línea de flotación describe una circunferencia de 3 cm de radio. Calcular la masa que puede tener la pelota explicando por qué hay dos soluciones y cómo podríamos saber cuál es la correcta.

Índice alfabético