Resúmenes de

Análisis Matemático I

para ingenieros de telecomunicaciones

Fernando Chamizo Lorente

Curso 2023/24

Fernando Chamizo Lorente

2023/2024

Prefacio

Estos son unos apuntes sin pretensiones. Unos sencillos resúmenes de lo explicado en clase con hojas de ejercicios y enunciados de exámenes resueltos. Su propósito es servir de guía para el estudio.

Con variaciones, se han usado en cursos de un cuatrimestre para estudiantes de ingeniería de telecomunicaciones. En la actualidad, estos son estudiantes cuyos conocimientos previos de matemáticas no son de primer nivel y que, al parecer, solo necesitan para el resto del grado adquirir cierta soltura, más práctica que teórica, con el álgebra y el cálculo.

No son aconsejables estas notas para grados como el de física o el de matemáticas, porque el rigor es bajo y se han suprimido prácticamente todas las demostraciones.

Madrid 14 de enero de 2024

Fernando Chamizo

Índice general

Capítulo 1

Números reales y complejos

1.1. El principio de inducción

Esta sección inicial es singular dentro del curso porque es más teórica, ocupándose de un método para demostrar fórmulas que involucran *números naturales*. Recuerda, estos son los números que sirven para contar:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

y constituyen el conjunto de números más básico de todos.

El principio de inducción dice que habremos probado que una propiedad (fórmula) se cumple para todos los n en $\mathbb{N}$ si completamos las dos tareas siguientes:

1. Verificar que se cumple para $n = 1$.

2. Suponiendo que es cierta para n, deducirla para $n + 1$.

La suposición de que la propiedad es cierta para n se suele llamar *hipótesis de inducción*

La idea que hay debajo es una versión sofisticada del "y así sucesivamente" que se usa en muchos razonamientos. Si tengo unas fila de fichas de dominó y se cae la primera, entonces se cae también la segunda y después la tercera, y así sucesivamente. El primer punto de la inducción asegura que se comience el proceso y el segundo asegura que continúa en cada paso.

Para probar por inducción la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

primero comprobamos que es cierta para $n = 1$. Esto es tan sencillo, sustituyendo, como decir que se cumple $1 = 1 \cdot (1 + 1)/2$.

Para simplificar, llamemos S_n al primer miembro de la fórmula. Lo que me pide el segundo punto de inducción es que suponiendo $S_n = n(n + 1)/2$ sea capaz de deducir la igualdad

$S_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$. Para ello busco una relación entre S_n y S_{n+1} que, claramente, es $S_{n+1} = S_n + (n+1)$. Así, se tiene

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) \overset{\text{HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\Big(\frac{n}{2}+1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

y ya hemos completado la deducción que nos pedía el segundo punto. El paso señalado con HI es en el que se está usando la hipótesis de inducción, la suposición.

Una pequeña variante del método de inducción es cambiar en el primer punto $n = 1$ por $n = n_0$ con n_0 otro número natural (o incluso entero). Entonces la prueba solo se aplicará a $n \geq n_0$. Es como si en las fichas de dominó empujamos la que está en el lugar n_0, en ese caso solo se caerán las que la siguen. La motivación de esta variante es que algunas fórmulas carecen de sentido para ciertos valores pequeños o, al revés, son más naturales empezando por $n = 0$, o incluso más atrás.

Por ejemplo, probemos por inducción

$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) = \frac{n+1}{2n} \qquad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Esta fórmula no tendría sentido literal para $n = 1$ pues el símbolo inicial indica tomar el producto cuando k se incrementa desde 2 hasta n.

Para $n = 2$ es cierta, pues se reduce a $(1 - 1/2^2) = (2+1)/4$. Llamemos al producto $\mathcal{P}_n$. Suponemos $\mathcal{P}_n = (n+1)/(2n)$ y queremos deducir $\mathcal{P}_{n+1} = (n+2)/(2n+2)$. Para ello, como antes, relacionamos $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big) \overset{\text{HI}}{=} \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Otro ejemplo consiste en demostrar que $n^3 + 2n$ es siempre múltiplo de 3. Se cumple obviamente para $n = 1$. Por otro lado, la igualdad

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 2n + 3(n^2+n+1)$$

muestra que si suponemos que $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3 entonces $(n+1)^3 + 2(n+1)$ también lo será, completando la inducción.

Aunque el principio de inducción suene muy teórico, tiene que ver con el diseño de muchos algoritmos que reducen un problema a otro anterior más sencillo. Si te gusta programar, quizá te suenen las funciones recursivas, que se llaman a sí mismas. Por ejemplo, si queremos diseñar una función `fact` que calcule el factorial de un número natural, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, en vez de un bucle se pueden escribir simplemente dos líneas, una que devuelva 1 si $n = 1$ (primer paso de inducción y otra que devuelva en el resto de los casos `n*fact(n-1)`, lo cual corresponde al segundo paso de inducción salvo desplazar la n, porque indica cómo obtener el caso n a partir del caso $n - 1$.

1.2. Conjuntos de números y sus operaciones

Ya conoces los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, los *números enteros*, que añaden los negativos y el cero, $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$, los *racionales* $\mathbb{Q} = \{\text{fracciones}\}$ y los *reales* $\mathbb{R}$, que imaginamos como puntos de una línea. En principio también deberías conocer los *complejos* $\mathbb{C}$, que seguramente te parecerán algo raro que "no existe".

Aunque históricamente las cosas sean más complicadas, se pueden entender $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ como extensiones de $\mathbb{N}$ que solventan el problema de que no podamos efectuar algunas de las operaciones elementales.

	$+$	$-$	$\times$	$\div$
$\mathbb{N}$	Sí	No	Sí	No
$\mathbb{Z}$	Sí	Sí	Sí	No
$\mathbb{Q}$	Sí	Sí	Sí	Sí*

(*) Salvo por cero

En principio $\mathbb{R}$ parece innecesario porque podemos hacer las mismas operaciones elementales que en $\mathbb{Q}$, pero ya los antiguos griegos descubrieron que en algunas de sus construcciones geométricas aparecían longitudes que no eran racionales, por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Dentro de la teoría actual, intuitivamente los reales completan los "huecos" que quedan entre los racionales y esto está relacionado con tomar límites, lo cual es una necesidad básica del análisis matemático.

Sin entrar en las complicaciones de la teoría, seguramente sepas que al dividir una fracción se obtienen cifras decimales que se acaban o que se repiten indefinidamente. Por ejemplo:

$$\frac{1}{8} = 0{,}125, \qquad \frac{7}{11} = 0{,}545454\dots, \qquad \frac{2}{7} = 0{,}285714285714\dots$$

Sin embargo, te puedes imaginar un número decimal que ni se acaba ni se repite, por ejemplo

$$\alpha = 0{,}101001000100001\dots$$

Este número está entre 0,1 y 0,2, que son racionales, y también entre 0,101001 y 0,101002, que siguen siéndolo. Podemos imaginar infinidad de pares de números racionales por debajo y por encima de α, pero nunca lo alcanzarán. De alguna manera, los racionales dejan "huecos" y α está en uno de ellos.

Por otro lado, $\mathbb{C}$ proviene de la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas (hallar raíces de polinomios). Al menos es lo que diría un matemático, pero eso no hace justicia a la cantidad de aplicaciones que tienen en física e ingeniería no relacionadas directamente con esta necesidad. Como veremos, geométricamente $\mathbb{C}$ se asocia a un plano mientras que sabemos que $\mathbb{R}$ corresponde a una recta.

1.3. Desigualdades y acotación

Los números reales muchas veces se representan como los puntos de una recta horizontal, lo cual les da una ordenación natural (más grande cuanto más a la derecha) y permite establecer desigualdades. La distancia entre dos puntos $a, b \in \mathbb{R}$ es $|a-b|$ donde las barras representan el *valor absoluto*:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una *desigualdad* está compuesta por dos expresiones ligadas por los símbolos, $<$, $<$, $\leq$ o $\geq$. Sumando o restando a ambos miembros de una desigualdad una misma cantidad, resulta otra equivalente. Por otro lado, si multiplicamos ambos miembros por un número real positivo, la desigualdad se conserva, pero si es negativo, cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, al multiplicar $-2 < 3$ por 5 se obtiene $-10 < 15$, que sigue siendo cierto. Al multiplicar por -5 se cambia el sentido a $10 > -15$. Dicho sea de paso, dos desigualdades similares se pueden sumar, pero, en general, el resto de las operaciones fallan.

Un problema típico es hallar para qué valores de un parámetro real x se cumple una desigualdad. Siempre puedes seguir el procedimiento de estudiar los casos que corresponden a diferentes signos de los denominadores o de los argumentos de los posibles valores absolutos, aunque a veces hay atajos.

Por ejemplo, determinemos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{x+1}{x+11} \leq 6.$$

Discutimos dos casos:

1. Si $x > -11$ podemos quitar el denominador para obtener $x + 1 \leq 6x + 66$ que produce $x \geq -13$.
2. Si $x < -11$ el denominador es negativo y al quitarlo se cambia el sentido de la desigualdad y resulta $x \leq -13$.

No se considera $x = -11$ porque el primer miembro no tendría sentido. En el primer caso, $x \geq -13$ es superfluo si imponemos $x > -11$. Es decir, tenemos el intervalo $(-11, \infty)$. De la misma forma, $x < -11$ no aporta nada en el segundo caso una vez que sabemos $x \leq -13$. En forma de intervalo, $(-\infty, -13]$. En total, el resultado es

$$x \in (-\infty, -13] \cup (-11, \infty).$$

Otra forma de proceder es escribir el enunciado como $1 - 10/(x + 11) \leq 6$, esto es, $-1/2 \leq 1/(x+11)$. Si $x+11 > 0$, es obvio que se cumple, lo que da el intervalo $(-11, \infty)$ y si $x+11 < 0$, está claro que debe cumplirse $x + 11 \leq -2$ de donde se obtiene $(-\infty, -13]$.

Otro ejemplo es hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican

$$|x - 4| < |x + 1|.$$

Analicemos primero la solución discutiendo casos. A la derecha y a la izquierda de $x = 4$ y $x = -1$ hay que cambiar de definición en alguno de los valores absolutos, lo que da lugar a tres situaciones:

1. Si $x < -1$ entonces $|x-4| = -x+4$ y $|x+1| = -x-1$. Al sustituir se obtiene $4 < -1$, que no se cumple, por tanto no hay soluciones en este caso.
2. Si $-1 \le x < 4$ entonces $|x-4| = -x+4$ y $|x+1| = x+1$. Al sustituir se sigue $x > 3/2$.
3. Si $4 \le x$ entonces $|x-4| = x-4$ y $|x+1| = x+1$. De nuevo se cancela la variable y se obtiene $0 < 5$ que se cumple siempre.

La conclusión es que la desigualdad se verifica para

$$(3/2, 4) \cup [4, \infty) = (3/2, \infty).$$

Una manera más rápida de llegar a la solución es escribiendo el enunciado como $d(x,4) < d(x,-1)$, donde d indica la distancia en la recta real. El punto a medio camino entre 4 y -1 es $(4+(-1))/2 = 3/2$, así que la solución son los puntos en el lado de 4, el de la derecha, a partir de este punto medio.

Dado $A \subset \mathbb{R}$, se dice que A está *acotado superiormente* y que C es una *cota superior* si se cumple $x \le C$ para todo $x \in A$. De la misma forma, se dice que está *acotado inferiormente* y que c es una *cota inferior* si se cumple $c \le x$ para todo $x \in A$.

Si solo se dice que A está acotado, sin especificar, se entiende que lo está superior e inferiormente.

Por ejemplo, $A = [-3, 2023)$ está acotado. Una cota superior es por ejemplo un millón y -3 es válida como cota inferior.

La propiedad que tiene $\mathbb{R}$ de rellenar los "huecos" de $\mathbb{Q}$, lo que se llama *completitud* en matemáticas, se traduce en este contexto en que todo conjunto acotado A tiene un *supremo* y un *ínfimo*:

- El supremo es la cota superior mínima, denotado mediante $\sup A$. Si $\sup A \in A$, se dice que es *máximo*.

- El ínfimo es la cota inferior máxima, denotado mediante $\inf A$. Si $\inf A \in A$, se dice que es *mínimo*.

Si $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$, se tiene que $\sup A = 1$ y es máximo porque a partir del segundo elemento todos son menores que 1. Por otro lado, como $1/n$ se va haciendo cada vez más pequeño sin anularse, $\inf A = 0$. El ínfimo es 0 porque no existe ninguna cota inferior $c > 0$, ya que $1/n$ se hace tan pequeño como queramos y a la larga tendríamos $1/n < c$, contradiciendo que es cota inferior. No hay mínimo porque $0 \notin A$.

Intuitivamente, el supremo de un conjunto es el número que está por encima y pegado a él y el ínfimo, lo mismo, pero por debajo. Así en un intervalo finito el supremo y el ínfimo son sus extremos superior e inferior.

Para $A = [-3, 2023)$ se tendría $\inf A = -3$ y $\sup A = 2023$. El primero es mínimo y no hay máximo. Considerando $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ vemos que si no se hubieran inventado los números reales este conjunto acotado no tendría supremo e ínfimo, ya que $\sup A = \sqrt{2}$ e $\inf A = -\sqrt{2}$, que no pertenecen a $\mathbb{Q}$. Para $A = [-4, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, el ínfimo es -4, y es el mínimo, y el supremo es $\sqrt{2}$. No hay máximo porque $\sqrt{2}$ no está en $\mathbb{Q}$.

Un ejemplo un poco más complicado es

$$A = \Big\{ \frac{x^2+1}{x^2+11} \ : \ x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Procediendo como en un ejemplo anterior de desigualdades, escribimos la fracción del enunciado como $1 - 10/(x^2+11)$. Esta expresión será más pequeña cuanto más restemos y esto equivale a que el denominador sea lo menor posible, lo que ocurre para $x = 0$. Así pues, $\inf A = 1 - 10/11 = 1/11$ y es mínimo. Por otro lado, será mayor cuanto menos restemos, lo que corresponde a tomar x muy grande. Se tiene $\sup A = 1$ y como nunca se llega a 1, no hay máximo.

1.4. Los números complejos

Una vez que hemos completado con $\mathbb{R}$ todos los huecos de $\mathbb{Q}$, parece que no es necesario inventar más números. Sin embargo en bachillerato te hablaron de los *números complejos*, $\mathbb{C}$, una extensión de $\mathbb{R}$ que constituye un choque frontal con la abstracción. Seguramente tienes la sensación de que el resto de los conjuntos de números existen y estos no. En cierto modo, todas las construcciones matemáticas son artificiales. Más allá de las discusiones filosóficas sobre su existencia en el mundo real, el caso es que son <u>muy importantes</u> en ingeniería, para estudiar temas bien concretos (ondas, circuitos, filtros. . .) y es totalmente necesario que sepas trabajar con números complejos.

La forma habitual de introducir $\mathbb{C}$ es como el conjunto $\{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ donde i es "algo" que cumple $i^2 = -1$.

Dado un número complejo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que x es su *parte real* y que y es su *parte imaginaria*. A veces se denotan con $\Re(z)$ o $\mathrm{Re}(z)$ y con $\Im(z)$ o $\mathrm{Im}(z)$. Asociado a un número complejo z está su *conjugado* $\overline{z}$ que se obtiene cambiado la parte imaginaria de signo. Esto es, si $z = x + iy$, siempre con $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $\overline{z} = x - iy$. El conjugado respeta las operaciones elementales, que repasaremos a continuación, es decir, $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ y $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.

Aunque utilices calculadoras u ordenadores para hacer cuentas, es importante que conozcas la mecánica de las operaciones elementales en $\mathbb{C}$. Esencialmente lo que tienes que saber es:

- Sumas y restas $\to$ triviales.
- Multiplicación $\to$ emplear $i^2 = -1$.
- División $\to$ multiplicar por el conjugado del denominador.

Respecto al último punto, observa que para $z = x + iy$ se tiene $z \cdot \overline{z} = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$. El método para hacer divisiones se basa en que con la multiplicación por el conjugado se consigue que el denominador pase a ser real.

Por ejemplo, si $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 - i$, no cuesta nada calcular $z_1 + z_2 = 4 + i$ y $z_1 - z_2 = -2 + 3i$. Para la multiplicación se operan de la forma habitual los paréntesis:

$z_1z_2 = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$, donde se ha usado $i^2 = -1$. La división, hecha muy despacio, sería:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{3^2+1^2} = \frac{3+6i+i+2i^2}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Mucho tiempo después de que se introdujeran los números complejos, se llego a la idea de que era conveniente asociarlos a vectores en $\mathbb{R}^2$. El número complejo $z = x + iy$ corresponde al vector (x, y). La longitud de este vector es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{x^2+y^2}$, la raíz cuadrada del producto $z\overline{z}$ que usamos en la división. Esta longitud del vector es lo que se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo z y se indica con $|z|$. La suma y resta de vectores es coherente con la suma y resta de números complejos, por tanto se cumple la llamada *desigualdad triangular* que dice que la longitud de la suma de dos vectores no puede medir más que la suma de sus longitudes. En una fórmula, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

En principio, dibujar en el plano los números complejos parece arbitrario. Las cosas se vuelven más interesante si describimos el vector asociado en coordenadas polares en vez de en coordenadas cartesianas. Esto es, especificando cuánto mide, $r = |z|$, y qué ángulo α forma con el eje OX (la parte positiva del eje X). Este ángulo siempre se considera en sentido contrario a las agujas del reloj y se expresa en radianes. Recuerda que π radianes es lo mismo que 180°. Por supuesto, uno puede entrar en ambigüedades con el ángulo porque 0 indica lo mismo que 2π. La tradición matemática es expresar los ángulos en el rango $(-\pi, \pi]$ o en $[0, 2\pi)$. Aquí van algunos ejemplos con asignaciones de r y α:

z	r	α
i	1	$\pi/2$
-1	1	π
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$

z	r	α
$1+i\sqrt{3}$	2	$\pi/3$
$3+4i$	5	$0{,}927295\dots$
$3-4i$	5	$-0{,}927295\dots$

Las fórmulas que relacionan (x, y) con (r, α) son simple trigonometría, las mismas que expresan el cambio entre coordenadas cartesianas y polares:

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

que podemos invertir mediante $r = \sqrt{x^2+y^2}$, α"=" $\arctan(y/x)$ con cierta precaución en la última fórmula con respecto a lo que nos diga una calculadora porque nos dará los mismos resultados para z y $-z$, aunque sus ángulos son diferentes. Esto se debe a que hay una indeterminación de un múltiplo de π en el resultado de arctan y las calculadoras lo deciden siempre reduciendo el rango a $(-\pi/2, \pi/2)$. Algunos lenguajes de programación incorporan una función de dos argumentos llamada `atan2`, justamente para evitar esta ambigüedad.

Según las fórmulas anteriores, cada número complejo $z = x + iy$ se puede representar en la forma:

$$z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \qquad \text{con} \quad r = |z|.$$

La gracia de todo esto es que, en términos de módulos y ángulos, las multiplicaciones y divisiones son muy fáciles:

- $z_1z_2 \to$ producto de módulos, suma de ángulos.

- $z_1/z_2 \to$ cociente de módulos, resta de ángulos.

El comportamiento de los módulos depende de la inesperada relación $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y el de los ángulos, de las fórmulas trigonométricas de adición. También se cumple que z^s se calcula elevando el módulo a s y multiplicando el ángulo por s, aunque si s no es un número natural, como veremos, aparecen resultados múltiples.

La situación es más clara cuando se utiliza la notación exponencial basada en la enigmática fórmula

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$$

que justificaremos más adelante en el curso. Con ella,

$$z = re^{i\alpha} \qquad \text{y se sigue inmediatamente} \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Por ejemplo, podríamos calcular $i/(1+i)^3$ mediante

$$\frac{i}{(1+i)^3} = \frac{e^{i\pi/2}}{\big(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\big)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4},$$

donde en el último paso se ha usado $\cos(-\pi/4) = -\sin(-\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

De la relación $e^{in\alpha} = \big(e^{i\alpha}\big)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ se deduce la *fórmula de Moivre*

$$\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha) = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n.$$

Por ejemplo, para $n = 2$ se obtiene operando

$$\cos(2\alpha) + i \operatorname{sen}(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 2i \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

Tomando partes reales e imaginarias se siguen las famosas fórmulas del ángulo doble para seno y coseno.

La simplicidad del cálculo de potencias permite obtener algunos resultados espectaculares:

$$\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2023} = e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot 2023} = e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot(674\cdot 3+1)} = e^{2\pi i\cdot 674} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

La descomposición $2023 = 674 \cdot 3 + 1$ corresponde a la división inexacta de 2023 entre 3 y su propósito es cancelar el denominador con el divisor para quedarnos con el resto.

Para terminar, hagamos una pequeña incursión en las potencias de exponente fraccionario. No hay que perder de vista que hay ambigüedad en el ángulo que se traduce en $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi k)}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, aparece cierta multiplicidad al extraer raíces n-ésimas, ya que $e^{i(\alpha+2\pi k)/n}$ toma valores distintos dependiendo del k escogido. Cambiar $k \mapsto k+n$ no tiene ningún efecto, por tanto cada $z \in \mathbb{C}$ no nulo tiene n raíces n-ésimas dadas por

$$r^{1/n} e^{i(\alpha+2\pi k)/n} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Multiplicando los exponentes por m se tendría una fórmula para z elevado a cualquier fracción irreducible m/n.

Para $n = 2$ se obtienen dos raíces cuadradas, una y su negativa, porque $e^{i\pi} = -1$. Esta última fórmula se considera una de las más bellas de las matemáticas.

Por ejemplo las raíces cuadradas de $z = 4i$ son:

$$2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad 2e^{i(\pi/2+2\pi)/2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Un cálculo sencillo muestra que verdaderamente $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4i$.

Como $-8 = 8\,e^{i\pi}$, las raíces cúbicas de -8 vienen dadas por

$$\left\{2\,e^{i(\pi+2\pi k)/3}\right\}_{k=0,1,2} \longrightarrow 2\,e^{\pi i/3} = 1 + i\sqrt{3}, \quad 2\,e^{\pi i} = -2, \quad 2\,e^{\pi 5\pi i/3} = 1 - i\sqrt{3}.$$

Si queremos comprobar el resultado, un cálculo más laborioso muestra que $(1 \pm i\sqrt{3})^3 = -8$. En realidad, basta comprobar $(1 + i\sqrt{3})^3 = -8$ porque el conjugado respeta los productos.

1.5. *Ejercicios propuestos*

1) Prueba por inducción $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para $n \in \mathbb{N}$.

2) Prueba $\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{2n}{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Puedes usar inducción o una prueba más sencilla basada en que $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.

3) Prueba por inducción que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$.

4) Prueba por inducción que si $k \geq 2$ es par, $3^k + 7$ es siempre divisible por 8.

5) Prueba que $n(n^2 + 11)$ es siempre divisible por 6 para $n \in \mathbb{N}$.

6) Decide si $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ tiene máximo o mínimo.

7) Halla el supremo y el ínfimo de $\left\{\frac{2n^2+1}{n^2+1} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) Halla el supremo y el ínfimo de $\left\{x \in \mathbb{Q} \,:\, 2 \leq x^2 \leq 9\right\}$. ¿Son respectivamente máximo y mínimo? ¿Y si cambiamos 9 por 10?

9) Busca un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\sup A = \infty$, $\operatorname{ínf} A = 0$, no contenga a ningún intervalo (a, b) y no posea mínimo.

10) Halla todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican $\frac{2x-1}{x+3} < \frac{1}{3}$.

11) Calcula el supremo de $\left\{1 - |x^2 - 3x + 2| \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$. ¿Es máximo?

12) Decide si existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x^2 - 1| < |x| - 2$.

13) Halla todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican $|x + 1| + |x + 2| > 1$.

14) Dados $a < b$, explica por qué $|x - a| + |y - b| < b - a$ no tiene solución.

15) Halla la parte imaginaria de $(3 + i)^{-2} - 4(1 + i)^{-1}$.

16) Supongamos que $z \in \mathbb{C}$ tiene parte imaginaria positiva. Explica por qué podemos asegurar que $(3z + 1)/(5z + 2)$ también la tiene.

17) Dibuja el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|3z + 1 + 2i|^2 \leq |3 + (1 + 2i)\overline{z}|^2$.

18) Halla una fórmula para $|(2 + i)\overline{z} + 1|^2 + |z - 2 - i|^2$ que solo dependa de $|z|^2$.

19) Calcula la parte real e imaginaria de $(2i)^{-2022}(\sqrt{3} - i)^{2023}$.

20) Halla una fórmula simplificada para $(1 + i)^{4n+1} + (1 - i)^{4n+1}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

21) Aplicando la fórmula de Moivre para $n = 4$ obtén una fórmula para $\cos(4\alpha)$ en términos de $\cos \alpha$.

22) Calcula todas las raíces cúbicas de $4\sqrt{2}(1 + i)$ expresándolas en términos de senos y cosenos.

Capítulo 2

Límites y series

2.1. Sucesiones

Intuitivamente, una *sucesión* es una lista indefinidamente larga de números reales o complejos:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \;=\; a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \dots$$

Con más rigor, es una regla que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$ un número (real o complejo) a_n. En este curso, prácticamente en todos los ejemplos esa regla será una fórmula explícita o una fórmula que dice cómo construir un término a partir del anterior.

Por ejemplo, la fórmula explícita $a_n = n(n^2-1)/6$ da lugar a la sucesión 0, 1, 4, 10, 20, ... y la relación $b_{n+1} = 2+1/b_n$ con $b_1 = 2$ a la sucesión 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{29}{12}$, $\frac{70}{29}$, ...

Nos gustaría saber la evolución de una sucesión, esto es, cuál es su comportamiento a la larga. Esta cuestión motiva el concepto de *límite*, que es el valor al que se acerca una sucesión. Según la definición rigurosa de límite, $\lim a_n = \ell$ con ℓ un número real o complejo significa que por pequeño que sea un $\epsilon > 0$ que nos inventemos, a partir de un n se cumple $|a_n - \ell| < \epsilon$. Es decir, la distancia entre los términos de la sucesión y ℓ se hace arbitrariamente pequeña. En ese caso se dice que la sucesión es *convergente* y que su límite es ℓ o que tiende a ℓ. Las sucesiones que no tienen límite se dice que son *divergentes*. Otra notación para $\lim a_n = \ell$ es $a_n \to \ell$.

En el primero de los ejemplos anteriores la sucesión no se acerca a nada y entonces no hay límite, a pesar de ello indicaremos mediante $\lim a_n = \infty$ que crece indefinidamente, como se aclara más tarde. En el segundo no está claro qué ocurre. Calculando unos cuantos decimales de los primeros términos se obtiene 2, 2,5, 2,41666, 2,41379, 2,41428, 2,41420, 2,41421 y se atisba la constante 2,4142... En realidad se acerca a $1+\sqrt{2}$ y entonces escribiremos $\lim b_n = 1+\sqrt{2}$. La prueba de ello no es fácil a este nivel. Una posibilidad es notar que la relación $b_{n+1} = 2+1/b_n$ se puede escribir de la forma enrevesada

$$b_{n+1} - (1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{b_n}(1+\sqrt{2}-b_n).$$

Tomando valores absolutos y usando que $(\sqrt{2}-1)/b_n < 1/4$, porque $b_n > 2$, vemos que la distancia de b_n a $1+\sqrt{2}$ se va dividiendo por más de cuatro en cada paso.

Casi todo el rato operaremos con sucesiones de números reales porque los complejos no aportan mucha novedad. En cualquier caso, ∞ no es un número, ni real ni complejo y entonces, paradójicamente, cuando escribimos $\lim a_n = \infty$ (o decimos que a_n tiende a infinito) estamos afirmando que no existe el límite, que la sucesión es divergente. Solo es una notación para indicar que la sucesión crece indefinidamente, lo cual es una forma especial de no tener límite. Reservaremos esta notación para sucesiones reales, aunque sería posible considerar un infinito complejo entendido como $|a_n| \to \infty$. Hay sucesiones, como $a_n = (-1)^n$, que no tienen límite (a_n no se acerca a la larga a un mismo número) y no crecen indefinidamente. En ese caso decimos simplemente que el límite no existe.

Los límites, cuando existen, respetan las operaciones elementales. Por otro lado, el simple hecho de que $\lim n = \infty$ implica que casi todas las sucesiones convergentes que manejaremos estarán construidas mediante operaciones elementales aplicadas a sucesiones que tienden a ∞. Esta situación lleva a una especie de álgebra del infinito que se resume en que para $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$a + \infty = \infty, \qquad a \cdot \infty = \infty, \qquad \frac{a}{\infty} = 0, \qquad \frac{a}{0} = \infty,$$

donde en la última igualdad se exige $a \neq 0$. Estas relaciones deberían estar claras si pensamos en ∞ como algo que crece indefinidamente y 0 como algo que se hace arbitrariamente pequeño. Sin embargo, hay *indeterminaciones*, operaciones cuyo resultado puede variar según el caso:

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty.$$

Las tres últimas no son estrictamente operaciones elementales (sumas, restas multiplicaciones y divisiones), pero conviene tenerlas en mente.

Lo que vamos a ver ahora son algunas técnicas habituales para enfrentarse a las indeterminaciones. Casi todo debería ser repaso.

Las tres primeras son, en cierto sentido, equivalentes porque $\frac{0}{0} = \frac{1/\infty}{1/\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ y $0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$. Por tanto nos ocuparemos de la primera que es la más común en el caso de sucesiones. La idea es dividir por algo (simplificar, en cierto sentido) para que los infinitos pasen a ser números. Por ejemplo,

$$\lim \frac{2n^3 + 3n - 1}{5n^3 + n^2 + 2} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{2 + 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{2}{5}.$$

La clave es que $2n^3$ domina a los términos del numerador y $5n^3$ a los del denominador.

En esta misma línea

$$\lim \frac{(-3)^n + 4^n}{4^n + 2^n} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \frac{3^n + (-4)^n}{4^n + 2^n} \quad \text{no existe.}$$

En el primer caso basta dividir por 4^n. Al hacer lo mismo en el segundo caso, nos encontramos algo que va oscilando entre valores próximos a 1 y a -1, lo que contradice la definición de límite.

Resolver la indeterminación $\infty - \infty$ requiere operar de alguna manera para cancelar términos similares. Un ejemplo sencillo es:

$$\lim\Big(n^2+2-\frac{n^4+1}{n^2+3}\Big) = \lim\frac{(n^4+5n^2+6)-(n^4+1)}{n^2+3} = \lim\frac{5n^2+5}{n^2+3} = 5.$$

Ejemplos menos intuitivos son la diferencia de raíces cuadradas. En ese caso, la posible cancelación la obtendremos al multiplicar y dividir por el conjugado (cambiar el signo de en medio):

$$\lim\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big) = \lim\frac{\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Las indeterminaciones ∞^0 y 0^0 son equivalentes porque podemos pensar en el segundo caso que el 0 de la base es $1/\infty$. Si escribimos ∞ como $e^{\log\infty}$ llegaremos a un límite del tipo $0\cdot\infty$. Aquí el logaritmo, como siempre en matemáticas medianamente avanzadas, es neperiano. Por ejemplo,

$$\lim n^{1/n} = e^{\lim\frac{\log n}{n}} = e^0.$$

El cálculo del límite del exponente se basa en que el logaritmo de una cantidad grande es de orden mucho menor que dicha cantidad. Seguramente recuerdas de cursos anteriores cómo calcularlo con la regla de L'Hôpital. En cualquier caso, es algo muy sencillo si tienes en mente que el logaritmo de un número grande intuitivamente es comparable al número de cifras de su parte entera. Concretamente si $n \ge 2$ se tiene que $\log n$ está siempre entre 0,5 y 2,5 veces el número de cifras de n.

Finalmente, la indeterminación 1^∞ se relaciona con el número e a través de la siguiente fórmula, que justificaremos más adelante en el curso,

$$\lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n(a_n-1)} \qquad \text{si} \quad a_n \to 1.$$

Por ejemplo,

$$\lim\Big(\frac{n^2+3n+1}{n^2+7}\Big)^{n+5} = e^{\lim(n+5)\big(\frac{n^2+3n+1}{n^2+7}-1\big)} = e^{\lim\frac{(n+5)(3n-6)}{n^2+7}} = e^3.$$

Seguramente la única novedad que encontrarás en la técnica del cálculo de límites de sucesiones es el siguiente resultado llamado *teorema de Stolz*:

$$\lim\frac{a_n}{b_n} = \lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \qquad \text{si} \quad b_n\to\infty \quad \text{y} \quad b_{n+1}-b_n>0 \text{ para } n \text{ grande.}$$

Tiene su principal utilidad para límites "raros" en que las sucesiones vienen dadas por sumas. Por ejemplo, con $a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ y $b_n = n^2+1$ tendremos

$$\lim\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)^2-n^2} = \lim\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} = 0.$$

Un poco más difícil es la variante

$$\lim \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

donde se ha tomado $a_n = n\sqrt{n}$ y $b_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ en el teorema se Stolz. La dificultad radica en que ahora obtenemos una indeterminación $\infty - \infty$ en el numerador, pero ya sabemos que esto se trata multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim \frac{(n+1)^3-n^3}{\big((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\big)\sqrt{n+1}} = \lim \frac{3n^2+\dots}{(n+1)^2+n\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{3}{\big(1+\frac{1}{n}\big)+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}$$

donde los puntos suspensivos son términos de grado menor que 2.

Aunque suene raro, es posible saber que algunas sucesiones convergen sin calcular su límite. Con un notación que se explica por sí misma, se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *creciente* si $a_{n+1} \ge a_n$ y que es *decreciente* si $a_{n+1} \le a_n$. La única diferencia con el lenguaje usual es que en matemáticas se aplican estos adjetivos también en el caso en que un término es igual al siguiente. Así las sucesiones constantes son las únicas simultáneamente crecientes y decrecientes. También en consonancia bastante fidedigna con el lenguaje usual, se llama *monótona* a cualquier sucesión que sea o bien creciente o bien decreciente.

Un resultado afirma que una sucesión acotada y monótona es siempre convergente. La idea es bien sencilla: si es creciente el límite debe ser el supremo y si es decreciente, el límite debe ser el ínfimo.

Algunas sucesiones definidas mediante una recurrencia dan ejemplos nada triviales de acotación y monotonía. Consideremos la sucesión definida mediante

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \qquad \text{con} \quad a_1 = 1.$$

Los primeros términos, redondeados a tres decimales son 1, 1,414, 1,682, 1,834, 1,915. Veamos primero que está acotada inferiormente por cero y superiormente por 2, esto es, $0 \le a_n \le 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La cota inferior es obvia. Para la superior usamos inducción. Cuando $n = 1$ se tiene $a_1 \le 2$ y suponiendo que para cierto n se cumple $a_n \le 2$ (hipótesis de inducción), obtenemos $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \le \sqrt{2\cdot 2} = 2$, terminando el proceso de inducción. Ahora veamos que es monótona creciente. Se tiene que

$$a_{n+1} \ge a_n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2a_n} \ge a_n \quad \Leftrightarrow \quad 2a_n \ge a_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \ge a_n.$$

La acotación y la monotonía asegura que la sucesión converge aunque no hayamos hecho ningún intento de calcular su límite.

En realidad si, por alguna razón, sabemos que una sucesión definida mediante una recurrencia $a_{n+1} = f(a_n)$ converge, muchas veces podemos hallar su límite usando que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. La clave es que usualmente f es continua, un concepto que repasaremos más tarde y esto permite meter el límite dentro de la f y establecer la ecuación $\ell = f(\ell)$ donde ℓ es $\lim a_n$, el límite buscado.

En el ejemplo anterior, se deduce $\ell = \sqrt{2\ell}$ lo que, elevando al cuadrado, lleva a $\ell^2 - 2\ell = 0$ que tiene como soluciones $\ell = 0$ y $\ell = 2$. Evidentemente $\ell = 0$ no es válido porque todos los a_n son al menos 1, entonces $\ell = 2$.

En el ejemplo $b_{n+1} = 2 + 1/b_n$ del principio de la sección, se obtendría $\ell = 2 + 1/\ell$ que da lugar a una ecuación de segundo grado con soluciones $\ell = 1 \pm \sqrt{2}$. La única elección posible es $\ell = 1 + \sqrt{2}$ porque la sucesión es obviamente positiva.

Si aplicamos este método a casos no convergentes obtendremos resultados erróneos. Por ejemplo $a_{n+1} = 3a_n - 1$ con $a_1 = 1$ se hace arbitrariamente grande y por tanto no tiene límite, pero el argumento anterior conduce a $\ell = 1/2$. Sin embargo, el mismo ejemplo con $a_1 = 1/2$ da lugar a la sucesión constante $a_n = 1/2$ y el resultado se vuelve correcto.

Aunque nos hemos centrado en las sucesiones de números reales nada impide considerar sucesiones complejas. El infinito complejo se entiende como una sucesión cuyo módulo da lugar a un infinito real. Las técnicas anteriores funcionan de manera similar salvo en lo relativo a las potencias porque el logaritmo de un número complejo no está unívocamente determinado. Por ejemplo, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $e^{(2k+1/2)\pi i} = i$, por tanto todos los valores $(2k + 1/2)\pi i$ son logaritmos de i y al escribir $i^{\sqrt{2}}$ estamos considerando en realidad infinitos números complejos al tiempo: $e^{(2k+1/2)\pi i\sqrt{2}}$. De esta forma, un número complejo elevado a otro a veces no tiene un sentido concreto. A este respecto, recuerda que la raíz n-ésima de un número complejo tiene n posibles resultados distintos.

Un ejemplo de ∞/∞ es:

$$\lim \frac{(3+i)n^2 - in + 3 + 7i}{(1-i)n^2 + 8 + 5i} = \lim \frac{3 + i - \frac{i}{n} + \frac{3+7i}{n^2}}{1 - i + \frac{8+5i}{n^2}} = \frac{3 + i - 0 + 0}{1 - i + 0} = 2 + i.$$

El problema de las potencias de números complejos no se aplica si el exponente es entero. Por ejemplo:

$$\lim \Big(\frac{n^2 - i}{n^2 + i}\Big)^{n^2+1} = e^{\lim (n^2+1)\left(\frac{n^2-i}{n^2+i} - 1\right)} = e^{\lim \frac{-2in^2 - 2i}{n^2+i}} = e^{-2i} = \cos 2 - i \operatorname{sen} 2.$$

Es instructivo utilizar una calculadora o un paquete matemático que opere con números complejos y comprobar que para n grande se obtienen aproximaciones de este número tan raro.

2.2. Criterios de convergencia de series

Una *serie* no es más que una sucesión dada por la suma de los primeros n términos de otra sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es decir, corresponde a a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$,..., las llamadas *sumas parciales*. La notación habitual identifica una serie con la suma de todos los términos y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ocasionalmente el límite inferior en la suma se sustituye por $n = 0$ o por $n = n_0$ cuando se considera una sucesión que no comienza en a_1.

Se dice que la serie *converge* si a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$,... se acerca a un límite ℓ. En otro caso, se dice que *diverge*. A diferencia de lo que ocurre con las sucesiones que hemos visto antes, incluso para series sencillas, es difícil hallar el límite ℓ, que identificamos con el valor de la serie. Por ejemplo, las evaluaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}=-\log\Big(2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Big),$$

se escapan del nivel de este curso y causaría una pequeña revolución en matemáticas que alguien encontrara una fórmula sencilla en términos de constantes comunes para $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^3$.

Dada la dificultad del problema de evaluación del límite, nos contentamos con estudiar si tal límite tiene sentido, es decir, si la serie converge o no. Desde un punto de vista práctico, es de esperar que si la serie converge podamos utilizar un ordenador para aproximar su resultado sumando muchos términos, mientras que si no converge, tal esperanza es vana y hay que revisar el modelo.

Incluso solo el estudio de la convergencia da lugar a problemas muy difíciles, incluso del nivel de investigación, para ciertas series de números complejos o de números reales que involucran números de diferentes signos. Por ello, *en toda esta sección, sin indicarlo cada vez, nos restringiremos a series reales con $a_n\ge 0$ para n suficientemente grande.*

Una familia de series de las que sabemos decidir la convergencia son las *series geométricas*, en las que cada a_n es igual al anterior multiplicado por cierto r. Es decir, $a_n=Cr^n$ con $C>0$ una constante. Claramente $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge para $r\ge 1$ porque las sumas parciales crecen indefinidamente. Por otro lado, en los cursos de bachillerato se obtiene una fórmula para $\sum_{n=1}^{\infty}Cr^n$ válida cuando $r\in(-1,1)$, concretamente $Cr/(1-r)$. En particular, la serie converge en este caso. Si nos atenemos a $r\ge 0$ y eliminamos la constante, que es irrelevante, la conclusión es

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\qquad\begin{cases}\text{converge} & \text{si } 0\le r<1,\\ \text{diverge} & \text{si } r\ge 1.\end{cases}$$

Para series más complicadas hay ciertos criterios generales. En muchos cursos de análisis, especialmente en los dirigidos a ingenieros, se exagera con la cantidad de criterios que se introducen, cuando desde el punto de vista matemático muchos se pueden sustituir por razonamientos no demasiado complicados. En esta sección solo veremos cuatro criterios.

C1. Condensación. Su alcance es limitado, pero permite decidir la convergencia de cierta familia de series que se utiliza a menudo en combinación con el criterio de comparación.

Si a_n es decreciente a partir de cierto n,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad\textit{converge}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}\quad\textit{converge.}$$

El ejemplo fundamental es $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$. Está claro que la serie diverge para $\alpha \leq 0$. En el resto de los casos, $1/n^{\alpha}$ decrece y según el criterio anterior, la convergencia equivale a la de

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$$

que es una serie geométrica, por tanto convergerá cuando $2^{1-\alpha} < 1$, esto es, para $\alpha > 1$. En resumen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Este es un ejemplo que conviene tener en mente.

Estudiemos ahora la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(n \log n)^{-1}$. El hecho de comenzar en $n = 2$ se debe a que $\log 1 = 0$ y el sumando correspondiente a $n = 1$ no tendría sentido. Según el criterio de condensación, debemos estudiar

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que diverge según lo que hemos visto antes.

C2. Comparación. Es el criterio más poderoso una vez que conocemos unas pocas series básicas con las que poder comparar. Muchos de los criterios de convergencia de series están en realidad basados en el de comparación aunque sus enunciados no lo sugieran. A menudo, antes de utilizar otros criterios es conveniente simplificar el enunciado aplicando el de comparación.

La idea es extremadamente simple, si para n grande $b_n > Ca_n$ con $C > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace (intuitivamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no llega hasta ∞, tampoco puede hacerlo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$). Recíprocamente, si $b_n < Ca_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

La formulación anterior es lo que se llama a veces *comparación directa*, pero lo habitual es utilizar la *comparación por paso al límite* que es algo muy similar recogido en el siguiente enunciado:

Si a_n y b_n son dos sucesiones y $\ell = \lim a_n/b_n$. Si $0 < \ell < \infty$ (suponiendo la existencia del límite)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{converge.}$$

Además se puede afirmar lo siguiente en los casos extremos:

$$\begin{cases} \textit{Si } \ell = 0, & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge,} \\ \textit{Si } \ell = \infty, & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{diverge.} \end{cases}$$

Para aplicar el criterio, lo que se intenta es encontrar una serie b_n sencilla que capture el comportamiento de a_n. A menudo se busca

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad \text{que indicaremos con } a_n \sim b_n$$

y corresponde al caso $\ell = 1$ del criterio.

Por ejemplo,

$$\frac{n^2+1}{n^4+7n} \sim \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+7n} \quad \text{converge porque} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(5^n+1)/(3^n+n^2)$ lo natural es la comparación con $(5/3)^n$ que es una serie geométrica y sabemos que diverge.

Un ejemplo más complicado es $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\big)$. Para decidir con qué comparar empleamos el truco, ya usado en el cálculo de límites, de multiplicar y dividir por el conjugado:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\big)\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\big)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Ahora debería estar claro que $a_n \sim 1/(2\sqrt{n}) = \frac{1}{2}n^{-1/2}$. Ya conocemos las series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ y al ser $1/2 < 1$ se tiene que diverge.

Un ejemplo algo enrevesado de comparación directa es $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3)/(2^n-1)$ (que en breve se tratará de forma sencilla con el criterio del cociente). Intuitivamente 2^n "gana" a n^2, que es irrelevante en comparación, por tanto la serie debería converger. Pero no podemos comparar con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ ya que estaríamos en el caso $\lim a_n/b_n = \infty$. Tomamos artificialmente $b_n = 1/1{,}5^n$, que todavía da una serie convergente y se cumple para n grande $(n^2+3)/(2^n-1) < 1/1{,}5^n$, ya que esto equivale a $n^2+3+(2/3)^n < (4/3)^n$ y a la larga una potencia de base mayor que 1 siempre supera a cualquier potencia de su exponente y $(2/3)^n \to 0$.

Otro ejemplo menos enrevesado pero conceptualmente más difícil es $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-2}$ donde p_n indica el n-ésimo primo: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. En principio te puede entrar el pánico porque no tenemos una fórmula explícita para p_n. Sin embargo, si lo piensas un momento, está claro que $p_n > n$ porque no todos los números naturales son primos. De $p_n^{-2} < n^{-2}$ y la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ se deduce la de $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-2}$. Dicho sea de paso, en el siglo XVIII se demostró que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ no converge, pero eso escapa a las técnicas de este curso.

C3. Criterio del cociente. Es un criterio bastante mecánico especialmente adaptado para casos en los que hay potencias o factoriales.

Suponiendo la existencia del siguiente límite o que es ∞,

$$\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \textit{implica} \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{converge si } \ell < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{diverge si } \ell > 1 \ (\textit{o } \ell = \infty). \end{cases}$$

El caso $\ell = 1$ es dudoso, el criterio no sirve porque unas veces hay convergencia con $\ell = 1$ y otras no. Ejemplos de este caso dudoso son $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Ya sabemos que la primera diverge y la segunda converge. En realidad el criterio del cociente es dudoso a no ser que la sucesión crezca o decrezca muy rápido.

Recuperando un ejemplo anterior, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2^n-1} \quad \text{converge porque} \quad \lim \frac{\frac{(n+1)^2+3}{2^{n+1}-1}}{\frac{n^2+3}{2^n-1}} = \lim \frac{(n+1)^2+3}{n^2+3} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

En este y otros ejemplos, merece la pena aplicar comparación primero para no entrar en cálculos innecesariamente complicados. En este caso sería con $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/2^n$ que permite una aplicación más limpia del criterio del cociente. Si el enunciado hubiera sido estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(n^3-5n+1)/(2^n+3n^2)$, se pasaría a $\sum_{n=1}^{\infty} n^3/2^n$ por comparación. Para esta última serie de nuevo el criterio del cociente da la convergencia.

Un ejemplo que combina potencias y factoriales es $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$. El límite a calcular es:

$$\lim \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = e^{\lim \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} < 1,$$

por tanto la serie converge. En la segunda igualdad se ha usado $(n+1)!/n! = n+1$. Esta simplificación de los factoriales habría sido imposible si partimos por ejemplo de la simple variante $\sum_{n=1}^{\infty}(n!+8)/(n^n+9)$. En ese caso es prácticamente obligatorio utilizar el criterio de comparación para pasar a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$.

C4. Criterio de la raíz. Es el criterio hermano del criterio del cociente. De hecho se puede probar que si los límites de su enunciado existen, dan lo mismo. La diferencia práctica es que está más adaptado a potencias.

Suponiendo la existencia del siguiente límite o que es ∞,

$$\ell = \lim \sqrt[n]{a_n} \quad \textit{implica} \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{converge si } \ell < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{diverge si } \ell > 1 \ (\textit{o } \ell = \infty). \end{cases}$$

De nuevo, el criterio no dice nada en el caso $\ell = 1$.

Su aplicación a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ es algo más compleja que la del criterio del cociente, aunque, por supuesto, con el mismo resultado:

$$\lim \frac{n^{1/n}}{2} = \frac{1}{2} \lim e^{(\log n)/n} = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{la serie converge.}$$

Para practicar, apliquemos el criterio a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^2+4}{n^2+2}\Big)^{n^3+2023}.$$

En realidad, este es un ejemplo de abuso de los criterios. Está claro que $a_n > 1$, por tanto la serie no puede converger. Es decir, apelando al criterio de comparación o al sentido común, es inmediato. Apliquemos de todos modos el de la raíz:

$$\lim \Big(\frac{n^2+4}{n^2+2}\Big)^{n^2+2023/n} = e^{\lim (n^2+2023/n)\left(\frac{n^2+4}{n^2+2}-1\right)} = e^{\lim \frac{2n^2+4046/n}{n^2+2}} = e^2.$$

Al ser $e^2 > 1$ se tiene que diverge.

En relación con el ejemplo anterior, no es difícil ver que para que los criterios del cociente y de la raíz den divergencia se debe tener $\lim a_n = \infty$, lo cual permite que a menudo por inspección directa sea obvio $a_n > 1$ para n grande y, con ello, también sea obvia la divergencia.

2.3. Convergencia absoluta y condicional

Ahora abordaremos sin profundizar la convergencia de las series $\sum_{n=1}^\infty a_n$ para las que no se tiene a la larga $a_n \ge 0$. Está claro que si para n grande se tuviera $a_n \le 0$ entonces usando $\sum_{n=1}^\infty a_n = -\sum_{n=1}^\infty (-a_n)$ se podrían aplicar los criterios anteriores. El problema está en el resto de los casos y puede ser muy difícil estudiar la convergencia de una series cuando se permiten signos o números complejos. Pensemos por ejemplo en $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\cos n$. Ya hemos mencionado que se sabe incluso evaluar. Sin embargo nuestros conocimientos no alcanzan para obtener la convergencia. Sabemos que $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ diverge, pero $\cos n$ introduce unos signos que podrían dar lugar a una cancelación que llevase a la convergencia, como de hecho ocurre. La naturaleza de tal cancelación, a nuestro nivel, es misteriosa porque el patrón de signos de $\cos n$ parece tener cierta regularidad ternaria que esporádicamente se rompe:

$$+,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\ +,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\dots$$

lo cual está relacionado con que $\pi \approx 3$. Para series de números complejos el problema se agrava porque hay infinitas direcciones posibles, algo así como infinitos signos.

En este curso nos limitaremos a hacer unas observaciones generales y a ver un solo criterio.

La primera observación es muy elemental:

$$\lim |a_n| \ne 0 \quad \textit{o no existe} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \quad \textit{diverge.}$$

La razón es simple: si añadimos términos que no tienden a cero las sumas parciales no se pueden acercar a un número concreto.

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\big(1+(-1)^n\big)n^2 - 7n}{n^2+8n+1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{(2+i)n^2 - 7n}{(3+i)n^2 + i} \qquad \text{divergen.}$$

En el primer caso, $|a_n|$ no tiene límite porque para n grande alterna entre valores muy próximos a 2 y a 0. En el segundo caso $|a_n|$ tiende a $|(2+i)/(3+i)|$ que, independientemente de su valor numérico, está claro que no es cero.

Otro ejemplo es una variante de una serie tratada antes:

$$\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{n^2+4}{n^2+2}\Big)^{n^2+2023}.$$

Con un cálculo muy similar al ya hecho, se tiene que $\lim a_n = e^2$ y por tanto la serie diverge. También es el caso reemplazando $n^2 + 2023$ por $n + 2023$ porque $\lim a_n = 1$.

La segunda observación es ligeramente más profunda. Es algo así como la mitad del criterio de comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge.}$$

Intuitivamente, si una serie converge sin signos converge, al incorporar la cancelación inducida por los signos o por las diferentes direcciones de los números complejos las sumas parciales no se pueden desbocar. Cuando se cumple la hipótesis de esta observación, es decir, cuando $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente*. La convergencia absoluta es, por tanto, más que la convergencia, es la convergencia incluso sin signos.

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+4i)^n}$$

convergen y lo hacen absolutamente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} |\cos n|/n^2$ converge, por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|3+4i|^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/5^n$ converge porque es una serie geométrica con $r < 1$. Supongamos que este último ejemplo lo modificamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+4i)^n + n - 2} \quad \text{que lleva a considerar} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big|(3+4i)^n + n - 2\big|}.$$

La convergencia de esta última serie, y por tanto de la original, se deduciría por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|3+4i|^n$. Nótese que no es una versión nueva de comparación, pues una vez que hemos tomado los módulos las series son reales y de términos positivos.

Las series convergentes que no son absolutamente convergentes, es decir, a las que no se aplica la observación anterior, se dice que son *condicionalmente convergentes*. La terminología se basa en que son convergentes *a condición* de que dejes los signos como están. El único caso que se estudia en este curso es el de signos alternos, cubierto por el *criterio de Leibniz*:

Si $a_{n+1} \le a_n$ para n suficientemente grande y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/\sqrt{n}$ converge, gracias a este criterio, y lo hace condicionalmente porque sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ diverge.

Un ejemplo más complicado es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

El hecho de que aparezca $(-1)^{n+1}$ o $(-1)^n$ es irrelevante a la hora de aplicar el criterio de Leibniz pues siempre podemos sacar un signo fuera de la suma. Lo importante es comprobar las hipótesis:

$$a_{n+1} \le a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \le \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \big((n+2)n\big)^{n+1} \le (n+1)^{2n+2}.$$

Extrayendo la raíz $(n+1)$-ésima se obtiene $(n+2)n \le (n+1)^2$ que es cierto operando. Por otro lado, $a_n \to 0$ ya que, sin entrar en detalles, sabemos que $(n+1)^n/n^n \to e$ y $1/n \to 0$. En definitiva, la serie converge.

2.4. *Ejercicios propuestos*

1) Considera las sucesiones $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{5}{11}\dots$ y 2, 6, 12, 20, 30, 42... Busca fórmulas sencillas para el término general de cada una de ellas. La segunda está relacionada con los cuadrados.

2) Calcula el límite de $a_n = \big(n^2+(-2)^{-n}\big)/(n^2+7)$ y de $b_n = (3^n-4^n+5^n)/(3^n+4^n-5^n)$.

3) Estudia si $a_n = \big(1+\sqrt{2n^2+n}\big)/\sqrt{n^2+1}$ y $b_n = \sqrt{n^2-n+2023}-\sqrt{n^2-n+2022}$ son convergentes.

4) Sean $a_n = (n^3-n^2+1)^{2n}$ y $b_n = n^{6n}$. Calcula $\lim a_n/b_n$ y $\lim a_n^{1/n^2}$.

5) Halla los límites de las sucesiones complejas $a_n = \big((n^2+i)^3-n\big)/n^7$ y $b_n = \big(\frac{1+in}{n}\big)^{4n}$. Quizá prefieras escribir el paréntesis de la segunda como $i(1-i/n)$.

6) Sea a_n la suma de los n primeros cubos, esto es, $a_1 = 1^3$, $a_2 = 1^3+2^3$, $a_3 = 1^3+2^3+3^3$, $a_4 = 1^3+2^3+3^3+4^3$, etc. Calcula $\lim a_n/n^4$.

7) Busca un ejemplo de una fórmula sencilla para el término general de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\inf\{a_n\} = -2$, $\sup\{a_n\} = 1$ y $\lim a_n = 0$.

8) Busca un ejemplo de una fórmula sencilla para el término general de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que sea monótona decreciente y cumpla $\inf\{a_n\} = -2$ y $\sup\{a_n\} = 1$.

9) Sea a_n la sucesión definida por $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$ para cierto $\lambda > 1$. Prueba por inducción que λ es una cota inferior y deduce que la sucesión es creciente.

10) Si a_n es como en el problema anterior, pero sin restricciones en λ, prueba por inducción que cualquiera que sea λ, incluso complejo, se cumple $a_n = 1+(\lambda-1)2^{n-1}$.

11) Un algoritmo muy eficiente de origen antiquísimo para aproximar $\sqrt{2}$ consiste en considerar términos de la sucesión $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + a_n^{-1}$ con $a_1 = 2$. Halla qué fracción es a_4 y comprueba con una calculadora que $a_4 - \sqrt{2}$ es pequeño (a_6 ya da 24 cifras correctas). Suponiendo que es convergente (véase el siguiente ejercicio), explica por qué $\lim a_n = \sqrt{2}$.

12) Para a_n como en el ejercicio anterior, comprueba que $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})^2/a_n + \sqrt{2}$ y demuestra que $\sqrt{2}$ es cota inferior. Explica también por qué es decreciente. En particular, al ser monótona y acotada, es convergente.

13) Si $0 \le a_n < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, ¿es siempre cierto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge? ¿Y que $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+a_n}$ converge?

14) Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{2n^3-1}$ y de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2(-1)^n}{n^2-(-1)^n}$.

15) Sea $a_n = (n+2i)/(n^2-i)$. Comprueba que la parte real de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge, pero la parte imaginaria sí.

16) Halla todos los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^{\lambda n}}{4^n+1}$ es convergente.

17) Sea $a_n = (n^2+1)^{\lambda}(1+\log n)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ dependiendo del valor de λ.

18) Halla el menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2023} - \sqrt{n+1}\right)^k$ es convergente.

19) Recuerda la notación de los números combinatorios $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{n}{2}+1\right)^{-1}$.

20) Con la notación del ejemplo anterior, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} 13^{-n}\binom{5n}{n}$ converge y, sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} 12^{-n}\binom{5n}{n}$ diverge.

21) Estudia si las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n+3}}{(2n+1)^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(3^n+1)n^n}$ son convergentes.

22) Encuentra un ejemplo sencillo de dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tales que ninguna de ellas converja y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converja condicionalmente

23) Estudia la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1-(4/5)^n}{\sqrt[3]{n}}$ y de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+(4/5)^n}{1-(4/5)^n}$. ¿Es alguna de ellas condicionalmente convergente?

24) Estudia si las series complejas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n+6}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(3+8i)^n}{2(5+7i)^n+1}$ convergen absolutamente.

Capítulo 3

Funciones continuas

3.1. Funciones elementales

En todo este capítulo consideramos solo funciones reales. No aparecerán números complejos.

En primer lugar, recordemos (o aprendamos) que la *composición* de dos funciones consiste simplemente en sustituir una en otra y se indica con un pequeño círculo:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

En la composición importa el orden y casi siempre $f \circ g$ y $g \circ f$ dan resultados diferentes. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ y $g(x) = \log x$, se tiene

$$(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(2\log x) \qquad \text{y} \qquad (g \circ f)(x) = \log \operatorname{sen}(2x).$$

Esencialmente, las *funciones elementales* son aquellas que aparecen en una calculadora científica (como el seno, el coseno, la raíz, el logaritmo) y las que podemos construir a partir de ellas mediante operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) o composiciones.

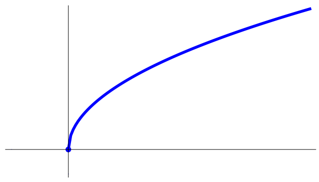
Para ser un poco más precisos, esas funciones de las "calculadoras científicas" se pueden reducir a e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\arctan x$, dando por supuesto que tenemos las constantes y la *función identidad*, $f(x) = x$. En particular, todos los polinomios son funciones elementales (porque vienen de operar constantes y la identidad con sumas y multiplicaciones) y $\sqrt{x}$ y, en general, x^α también lo son porque coinciden con $e^{\frac{1}{2}\log x}$ y $e^{\alpha \log x}$.

El *dominio* de una función es el subconjunto de los números reales donde está bien definida y la *imagen* de una función es el conjunto de valores que alcanza (puedes haber oído llamar *recorrido* a la imagen en cursos anteriores). Se denotan mediante $\operatorname{Dom}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. En fórmulas:

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists f(x)\}, \qquad \operatorname{Im}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \,:\, x \in \operatorname{Dom}(f)\}.$$

Cuando se aplica todo el rigor matemático, la definición de dominio tiene un sentido muy trivial porque una función no debería venir dada solo por una fórmula sino también por un conjunto inicial que es lo que se llama dominio en un contexto riguroso. Aquí y en las matemáticas de bachillerato, estamos pensando en el dominio de manera diferente, como el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ en que tendría sentido nuestra fórmula para la función.

Es bien conocido que cada función real tiene una gráfica, dada por el conjunto de puntos (x, y) con $y = f(x)$. Veamos para algunas funciones elementales básicas, el aspecto de la gráfica, el dominio y la imagen.

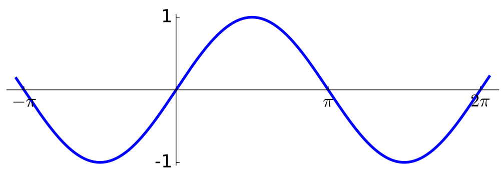


$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

$\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$

$\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$

Por definición, la raíz cuadrada de los números reales $x \geq 0$ se toma positiva, a pesar de que tanto $\sqrt{x}$ como $-\sqrt{x}$ al elevarlos al cuadrado dan x.

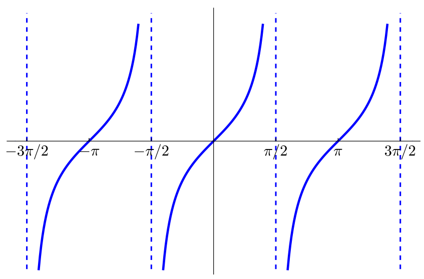


$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$

Recuerda que el argumento de las razones trigonométricas va siempre en radianes. Aunque parezca una manía de matemáticos, es algo necesario en análisis porque operando con grados las fórmulas para las derivadas fallarían.



$\boxed{f(x) = \tan x}$

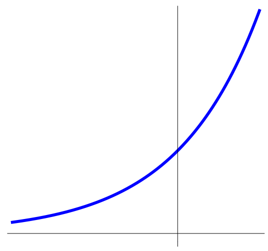
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Aquí en los múltiplos impares de $\pi/2$ observamos asíntotas verticales. Esto significa que la gráfica se acerca indefinidamente a rectas verticales en dichos puntos. La explicación es que $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$ y en esos múltiplos impares obtenemos formalmente $\pm 1/0$.

Se dice que una función f es *periódica* si $f(x) = f(x+p)$ para algún $p \neq 0$. Normalmente se llama *periodo* de una función periódica al mínimo (si existe) de los $p > 0$ con tal propiedad[1]. Con esta definición, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen periodo 2π, mientras que $\tan x$ tiene periodo π, por tanto el periodo no se conserva por divisiones, ni tampoco por el resto de las funciones elementales.

[1] Si te gustan los detalles finos de matemáticas, quizá te asombre que haya funciones periódicas no constantes sin periodo en el sentido anterior. Por ejemplo, la función f que vale 1 para $x \in \mathbb{Q}$ y 0 para $x \notin \mathbb{Q}$ cumple $f(x) = f(x + 1/n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ y el ínfimo de $\{1/n\}$ es cero.

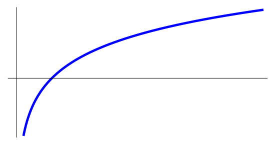


$\boxed{f(x) = e^x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = (0, \infty)$

La función exponencial tiene un crecimiento muy rápido. De nuevo, no hay nada maniático en usar como base un número tan raro como e. Si no lo hiciéramos así y escogiéramos por ejemplo 10, habría fórmulas que se complicarían mucho.



$\boxed{f(x) = \log x}$

$\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Recuerda que los logaritmos son siempre neperianos en matemáticas superiores. En bachillerato muchas veces se escribe $\ln x$ para distinguir el logaritmo neperiano, pero esa precaución es ya innecesaria. El crecimiento del logaritmo es muy lento y también lo es la aproximación a la asíntota vertical dada por el eje Y, el logaritmo de una millonésima todavía no llega a -14.

El hecho de que el dominio y la imagen se intercambien en los dos últimos ejemplos está relacionado con que son *funciones inversas* una de la otra, es decir, que podemos deshacer una con la otra. Con fórmulas, f y g son una la *función inversa* de la otra si $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$ en los dominios correspondientes. Se escribe $f = g^{-1}$ y $g = f^{-1}$. A pesar de la notación, f^{-1} que representa la función inversa, no tiene en general nada que ver con $1/f$.

Consideremos, por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1+2x}{x-1}.$$

Claramente, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Calcular la imagen es más difícil. La manera más sistemática consiste en estudiar cuándo podemos despejar la x en $y = f(x)$ y en $y = g(x)$. Algo más truculento, pero muy rápido, es reescribir las funciones como

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Las divisiones $3/(x-2)$ y $3/(x-1)$ pueden dar cualquier número excepto cero, por tanto se obtiene inmediatamente $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ y $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Si comprobamos las composiciones de f y g veremos que una está deshaciendo a la otra, que una es la función inversa de la otra, por ello se intercambian dominio e imagen:

$$(f \circ g)(x) = \frac{\frac{1+2x}{x-1} + 1}{\frac{1+2x}{x-1} - 2} = \frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3}{x-1}} = x, \qquad (g \circ f)(x) = \frac{1 + \frac{2x+2}{x-2}}{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \frac{\frac{3x}{x-2}}{\frac{3}{x-2}} = x.$$

Como la función inversa de cualquier f, cuando existe, satisface $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$, escribiendo $y = f^{-1}(x)$, una manera de hallarla es despejar la y en la ecuación $f(y) = x$. En el ejemplo anterior, si solo nos hubieran dado la f y nos pidieran f^{-1}, los cálculos serían:

$$f(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y+1}{y-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = xy - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2x = (x-1)y,$$

de donde $y = g(x)$.

Dos funciones que normalmente no se consideran elementales son el valor absoluto $|x|$ y la *parte entera* $\lfloor x \rfloor$. La primera ya la conocemos y la segunda, como su nombre sugiere, es el mayor entero por debajo de o igual a x:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \le x \,:\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para los positivos da lo que todos esperamos, $\lfloor 2{,}3 \rfloor = 2$, $\lfloor 100{,}9 \rfloor = 100$, $\lfloor 2023 \rfloor = 2023$, mientras que a más de uno le sorprenderá $\lfloor -1{,}3 \rfloor = -2$.

Un par de ejemplos (sin desarrollar aquí) que involucran estas funciones elementales son

$$f(x) = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x - 1/2}{|x| - |x-1|}$$

que verifican

$$\begin{cases} \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \\ \mathrm{Im}(f) = (1, \infty) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1/2\}, \\ \mathrm{Im}(f) = [1/2, \infty). \end{cases}$$

Es un buen ejercicio hacer un esbozo de las gráficas para entender estos resultados.

3.2. Límite de una función

El concepto de límite de una función es una generalización del límite de una sucesión. Con la notación

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

queremos indicar el valor (si existe) al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a excluyendo el valor $x = a$, que es lo que representa $x \to a$.

La definición rigurosa que uno podría encontrar en un texto avanzado de que el límite es ℓ es tan críptica como

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 \ne |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

La traducción en palabras es que por pequeño que sea ε siempre podemos conseguir que la distancia de $f(x)$ a ℓ sea menor que ε en cierto entorno restringido de a, esto es, en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ sin el punto central.

Eliminar $x = a$ de la definición permite que el límite pueda existir aunque $f(a)$ no tenga sentido. Por ejemplo, aunque $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ dé problemas al tratar de hallar $f(0)$, se cumple $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ya que para x pequeño, sea lo que sea $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ está en $[-1, 1]$ y al multiplicar por x obtendremos un número pequeño. Por otro lado, si $g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ el límite $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, porque podemos encontrar números pequeños, por ejemplo $(N\pi)^{-1}$ con N un entero grande para los que g se anula y otros, como $2((4N+1)\pi)^{-1}$, de nuevo con N un entero grande, para los que g es uno. Entonces $g(x)$ no se acerca a una cantidad definida cuando $x \to 0$.

Las funciones elementales tienen límite en los puntos en los que están definidas. Esto no se aplica a las funciones no elementales. Por ejemplo, no existe $\lim_{x\to 2}\lfloor x\rfloor$ porque para números cercanos a 2 un poco mayores, como $2 + 10^{-6}$, obtenemos que la función vale 2 mientras que para los que son un poco menores, como $2 - 10^{-6}$, obtenemos 1.

La definición de límite se extiende al caso $a = \infty$ (esto es, $x \to \infty$) simplemente copiando el concepto ya conocido para sucesiones. También consideramos que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ tiene el mismo sentido que allí: es una manera de indicar que no existe el límite, pero que sabemos que al acercarnos a $x = a$ la función toma valores arbitrariamente grandes (en valor absoluto).

Respecto a la técnica para hallar límites, se aplica lo mismo que sabíamos con las sucesiones. Quizá lo único reseñable es que la indeterminación $0/0$ es más común en el contexto de las funciones que en el de las sucesiones y que suele estar ligada a algún tipo de simplificación.

Por ejemplo, calculemos

$$L_1 = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{xe^x}.$$

Ambos son del tipo $0/0$. En L_1 la simplificación se consigue factorizando:

$$L_1 = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\frac{3}{2}.$$

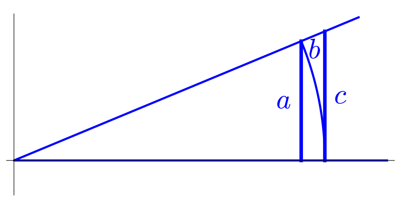
En L_2 el factor e^x es irrelevante porque $\lim_{x\to 0} 1/e^x = 1$ y el límite de un producto es el producto de los límites. Una vez eliminado, la indeterminación $0/0$ persiste. No hay una simplificación directa y multiplicamos y dividimos por el conjugando para llevarla a cabo:

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\big(\sqrt{1+x}\big)^2 - \big(\sqrt{1-x}\big)^2}{x\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.$$

Otro ejemplo, esta vez de 1^∞, es

$$\lim_{x\to 2} \Big(\frac{x}{3x-4}\Big)^{1/(x-2)} = e^{\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{x}{3x-4}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 2} \frac{-2}{3x-4}} = e^{-1}.$$

Por ahora, están fuera de nuestro alcance muchos límites que involucran funciones trigonométricas, logaritmos y exponenciales. Para ellos emplearemos más adelante derivadas. Veamos, no obstante, uno básico que puede tratarse de una forma geométrica



$a = \operatorname{sen} x$
$b = x$
$c = \tan x$

En el dibujo, b es un arco de la circunferencia de radio 1 que tiene ángulo x en radianes (supuesto positivo), lo cual es lo mismo que decir que tiene longitud x. Sabemos que a y c representan el seno y la tangente. Se cumple $a \le b \le c$. La primera desigualdad te parecerá obvia y la segunda creíble (se podría justificar con un argumento geométrico). Esto implica

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1.$$

Aunque el dibujo lo hemos hecho solo para $x > 0$, está claro que estas desigualdades funcionan también para $x < 0$ porque las funciones $\cos x$ y $(\operatorname{sen} x)/x$ son invariantes por $x \leftrightarrow -x$. Si x es pequeño, $\cos x$ se acerca a uno, por tanto debe cumplirse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Este resultado permite el cálculo de límites más complicados usando que las operaciones elementales respetan el paso al límite. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3(2+\operatorname{sen} x)}{(2x-\operatorname{sen} x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2+\operatorname{sen} x}{\left(2-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3} = \frac{2}{1} = 2.$$

Los *límites laterales*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

se definen como el límite usual, pero añadiendo las condiciones $x > a$ y $x < a$, respectivamente. Es decir, en el primer caso solo permitimos acercarnos a a por la derecha y en el segundo caso solo por la izquierda.

Por ejemplo, $f(x) = (x-1)/|x-1|$ es 1 para $x > 1$ y es -1 para $x < 1$, por tanto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = -1.$$

Otro ejemplo un poco más elaborado es:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{-1/(x-1)}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+e^{-1/(x-1)}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = 0.$$

Si los límites laterales no coinciden entonces el límite no puede existir porque por lados diferentes no acercamos a diferentes valores. De hecho, la existencia del límite es equivalente a la existencia de los límites laterales imponiendo además que sean iguales.

Por supuesto, hay funciones para los que los límites laterales no existen (en particular, sin límite), como $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ que no los tiene cuando $x \to 0^{\pm}$.

3.3. Continuidad

Se dice que una función es *continua* en $x = a$ si existen $f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos coinciden.

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica no está rota, aunque para funciones muy raras, como $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ que no tiene límite en cero y por tanto no es continua allí, esta idea intuitiva tiene sus limitaciones.

Las funciones elementales son continuas en todos los puntos donde están definidas. Además, la continuidad es respetada por las operaciones elementales (salvo, como siempre, dividir por cero) y también por la composición. Así podemos decir que $f(x) = \log(1 + \cos x) + x^2$ es continua en todos los puntos excepto en $x = (2k+1)\pi$ porque son los únicos valores que hacen que $1 + \cos x$ se anule y entonces que el logaritmo no esté definido.

Muchas veces se usan funciones definidas a trozos como ejemplos o ejercicios en los que comprobar la continuidad. Si consideramos

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1, \\ A & \text{si } x = 1, \\ (\log x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{con } A \text{ una constante,}$$

para $x < 1$ o para $x > 1$ tenemos funciones elementales y la continuidad está garantizada. El único posible problema está en $x = 1$. Se cumple

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x - 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\log x)^2 = 0.$$

Por tanto existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ y es nulo. Para que coincida con $f(1)$, debemos tomar $A = 0$. Cualquier otra elección de A produce una función discontinua.

Esta situación en la que existen $f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no coinciden se dice que corresponde a una *discontinuidad evitable*. Bastaría con modificar el valor de $f(a)$ para establecer la continuidad.

Hay otro tipo de discontinuidades que reciben un nombre, son las *discontinuidades de salto*. Ocurren cuando porque los límites laterales existen, pero no coinciden, impidiendo que exista el límite. La función $f(x) = (x-1)/|x-1|$, considerada anteriormente, es un ejemplo de ello y su gráfica ilustra la terminología empleada.

Una función puede ser discontinua en muchos puntos, incluso en infinitos puntos incluidos en un intervalo acotado. Así $f(x) = (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}$ definida para $x \in (0,1)$ es discontinua en todos los puntos $\{1/n\}_{n=2}^{\infty}$. Incluso es posible construir una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinua en todos los puntos de $\mathbb{R}$. El ejemplo típico es $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ (que ya apareció en relación con la periodicidad). No tiene límite en ningún punto porque dado un irracional hay números racionales arbitrariamente cerca y viceversa.

Volviendo a ejemplos "normales", consideremos

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ (x - \operatorname{sen} x)/x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \left(1 + e^{-1/x}\right)^{-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

El único punto conflictivo es el cero porque en el resto están bien definidas como funciones elementales. Sabemos que $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ y que $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$. Por tanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - 1$ coinciden. Como también coinciden con $f(0)$, la función f es continua. Para g se tiene $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ porque $e^{-1/x} \to \infty$ para $x \to 0^-$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$. Así pues, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, de donde $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es cero. Sin embargo, su valor no coincide con $g(0) = 1$, por tanto g tiene una discontinuidad en $x = 0$. Es evitable porque modificando $g(0)$ a 0, la eliminaríamos.

Hay dos resultados sobre funciones continuas que son importantes en el desarrollo de la teoría, aunque te parezca que dicen cosas bastante obvias. El primero, además, sirve de base a un método en cálculo numérico.

Teorema de los valores intermedios. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$ pertenece a $\operatorname{Im}(f)$.*

Teorema de Weierstrass. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces $\operatorname{Im}(f)$ tiene supremo e ínfimo que son máximo y mínimo.*

Como ejemplo práctico del primer resultado, estudiemos si la ecuación

$$x^3 + \frac{3}{1 + x^2 + \cos x} = 0$$

tiene alguna solución y en caso positivo, aproximemos su valor.

Partimos de la función f definida por el primer miembro, que es continua (es una función elemental y el denominador no se anula). Obviamente $f(-2) < 0$ y $f(0) > 0$ entonces, por el teorema de los valores intermedios, $0 \in \operatorname{Im}(f)$, esto es, existe $r \in [-2,0]$ tal que $f(r) = 0$. Hemos probado que la complicada ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz.

Para hallarla podríamos ir dividiendo sucesivamente el intervalo $[-2,0]$ por la mitad quedándonos siempre con el trozo en el que los signos son opuestos en los extremos. Con ello conseguiremos una aproximación arbitrariamente buena de r. Este procedimiento se llama *método de la bisección* y es la aplicación al cálculo numérico a la que nos hemos referido. Los primeros pasos serían:

$[a,b]$		$f(a)$	$f(b)$
$[-2,0]$	$\to$	$-7{,}34$	$1{,}5$
$[-2,-1]$	$\to$	$-7{,}34$	$0{,}18$
$[-1{,}5,-1]$	$\to$	$-2{,}47$	$0{,}18$
$[-1{,}25,-1]$	$\to$	$-0{,}91$	$0{,}18$

$[a,b]$		$f(a)$	$f(b)$
$[-1{,}125,-1]$	$\to$	$-0{,}31$	$0{,}18$
$[-1{,}0625,-1]$	$\to$	$-0{,}05$	$0{,}18$
$[-1{,}0625,-1{,}03125]$	$\to$	$-0{,}05$	$0{,}06$
$[-1{,}0625,-1{,}046875]$	$\to$	$-0{,}05$	$0{,}008$

Con esto obtenemos $-1{,}0625 < r < -1{,}046875$. Con una veintena de pasos obtendríamos $r = -1{,}04901\dots$ y la precisión se puede mejorar arbitrariamente a base de incrementar el número de cálculos.

3.4. *Ejercicios propuestos*

Nota: Con $\lfloor x \rfloor$ se indica la parte entera, es decir, el máximo de $\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$. Por ejemplo, $\lfloor 2{,}8 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -1{,}1 \rfloor = -2$.

1) Halla el mayor conjunto de números reales (el dominio) en que se pueden definir, como funciones reales, $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}$ y $g(x) = \exp(1/\cos x)$.

2) Halla la imagen de las funciones del ejercicio anterior indicando en cada caso su ínfimo.

3) Halla el dominio y la imagen de $f(x) = 1/\log(4x - 4x^2)$.

4) Se dice que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *par* si $f(x) = f(-x)$ y que es *impar* si $f(x) = -f(-x)$. Estudia si el producto y la composición de funciones pares o impares es par o impar considerando todas las posibilidades.

5) Sean $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Muestra que para $x \in (-1, 1)$ se tiene la igualdad $\big((f \circ g)(x)\big)^2 = x^2/(1 - x^2)$. Comprueba esta relación para algún valor no nulo de x en el que sepas calcular g.

6) Estudia si las siguientes funciones tienen límite cuando $x \to 1$.

$$f_1(x) = \frac{1 - x}{|x - 1|}, \qquad f_2(x) = \operatorname{sen}\big(\pi \lfloor (x - 1)^{-1} \rfloor\big), \qquad f_3(x) = \frac{\log x}{2} \Big\lfloor \frac{4}{\log x} \Big\rfloor.$$

7) Busca dos funciones sencillas tales que no exista su límite cuando $x \to 0$, pero que exista el límite de su suma.

8) Manipulando la función exponencial, busca una función sencilla tal que su límite cuando $x \to +\infty$ sea 2 y cuando $x \to -\infty$ sea -1.

9) Calcula los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{x^{-1} \cos x}, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2 - x}}{|x - 1|}, \qquad \lim_{x \to 1/2^+} \frac{|4x^2 - 4x + 1|}{2x^2 - 3x + 1}.$$

10) En el ejercicio anterior, calcula los límites laterales en la dirección opuesta, es decir, $x \to 0^-$, $x \to 1^-$ y $x \to 1/2^-$.

11) Estudia la continuidad de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}\big(\pi x - \pi \lfloor x \rfloor\big)$ y $g(x) = \cos\big(\pi x - \pi \lfloor x \rfloor\big)$.

12) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\tan\left(\frac{1}{2}\pi \cos(\pi x)\right)} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

13) Calcula a y b para que la siguiente función definida a trozos sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/\log(x - x^2) & \text{si } x \in (0, 1), \\ 1 + a \cos x & \text{si } x \le 0, \\ b + 1 + b e^x & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

14) Demuestra que si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y su imagen está en $[0,1]$, entonces tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in [0,1]$ con $f(x_0) = x_0$. Da un contraejemplo para f no continua. Indicación: Considera $g(x) = f(x) - x$ para la primera parte.

15) Demuestra que la ecuación $x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$ tiene al menos una solución y halla una aproximación suya con una precisión de al menos una cifra decimal.

16) Encuentra una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea continua, pero que alcance todos los valores entre $f(0)$ y $f(1)$.

Capítulo 4

Derivadas

4.1. El concepto de derivada

La *derivada* es la tasa de variación de una función con respecto a su variable. En este curso tal función y su variable serán reales y en un próximo curso de análisis verás que considerar variables complejas comporta más de una sorpresa. Formalmente, se llama *derivada* de f en el punto x_0 a

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

El denominador es lo mismo que $(x_0 + h) - x_0$ por tanto realmente es la anunciada tasa de variación de la f con respecto a la x cuando los incrementos de de esta última son infinitesimales. Aparte de f', se utiliza también la *notación de Leibniz*

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad \text{y} \qquad f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{o} \quad f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Las derivadas son importantes porque aparecen en infinidad de modelos. Por mencionar uno relacionado con la ingeniería de telecomunicaciones, un condensador funciona como un conductor interrumpido para la corriente continua mientras que deja pasar más corriente alterna cuanto mayor sea su variación de voltaje y la capacidad C del condensador. De este modo, la corriente $I(t)$ y el voltaje $V(t)$ se relacionan mediante $I(t) = CV'(t)$.

La derivada también tiene un significado geométrico. Concretamente, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente de la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Es decir, dicha recta tangente es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

La idea que sustenta esta fórmula es simple: basta considerar la recta secante que conecta $\big(x_0, f(x_0)\big)$ con $\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ y tomar $h \to 0$.

Calcular derivadas de funciones sencillas con la definición no es buena idea y más adelante veremos técnicas para evitarlo (que, con seguridad, ya conoces). De todas formas, para practicar, calculemos la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$ mediante la definición y usemos el resultado para hallar la recta tangente correspondiente. La derivada es

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h})^2-4}{h\big(\sqrt{4+h}+2\big)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\big(\sqrt{4+h}+2\big)}=\frac{1}{4}.$$

En $x_0=4$ se tiene $f(x_0)=2$ y la recta tangente en el punto $(4,2)$ resulta

$$y=\frac{1}{4}(x-4)+2 \qquad \text{esto es} \qquad y=\frac{1}{4}x+1.$$

No todas las funciones son derivables. Una función que no es continua en un punto x_0 no puede ser derivable en x_0 porque $f(x_0+h)-f(x_0)$ no tendería a cero y solo una indeterminación del tipo $0/0$ permite que el límite que define $f'(x_0)$ exista. Por otro lado, hay funciones continuas en un punto que no son derivables en él (incluso hay funciones muy complicadas que son continuas en todo $\mathbb{R}$ y no derivables en ningún punto). Un ejemplo típico de función no derivable en cero es $f(x)=|x|$. La razón es que $\lim_{h\to 0}|h|/h$ no existe ya que los límites laterales son distintos.

Para ilustrar las dificultades de aplicar la definición, veamos la prueba de que la derivada de $f(x)=\operatorname{sen}x$ es $f'(x)=\cos x$. Se tiene

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}.$$

Nos quedamos atascados porque no se ve cómo simplificar en esta indeterminación $0/0$. Aunque conozcas la regla de L'Hôpital, aquí es inútil si no das por hecho que conoces de antemano la derivada de f, que es justamente lo que deseamos calcular. Apelamos a la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b=2\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ y utilizamos que sabíamos a través de un argumento geométrico que $(\operatorname{sen}t)/t\to 1$ cuando $t\to 0$. Con estas herramientas, ya podemos calcular el límite anterior.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(h/2)\cos(x+h/2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\lim_{h\to 0}\cos(x+h/2)=\cos x.$$

Con un razonamiento parecido, se demostraría que la derivada de $f(x)=\cos x$ es $f'(x)=-\operatorname{sen}x$. En realidad el razonamiento es idéntico si recordamos que $\operatorname{sen}(x+\pi/2)=\cos x$.

4.2. Cálculo de derivadas

Las funciones elementales están construidas por unas pocas funciones ligadas por operaciones elementales y composiciones, por tanto, sabiendo cómo se comporta la derivada respecto a estas operaciones y composiciones seremos capaces de calcular la derivada de cualquier función elemental apelando a unas pocas derivadas muy básicas.

Comencemos con las operaciones elementales. Las fórmulas relevantes son:

$$(f\pm g)'=f'\pm g', \qquad (fg)'=f'g+fg', \qquad \Big(\frac{f}{g}\Big)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

A pesar de que todos memorizamos estas fórmulas, su significado no es tan difícil de entender. Para deducirlas hay que expresar en la definición de derivada el incremento de la operación en términos del incremento de las funciones. Sin entrar en detalles, la segunda depende de la igualdad

$$(fg)(x+h) - (fg)(x) = \big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h) + f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big).$$

Respecto a la composición, la fórmula correspondiente es la llamada *regla de la cadena*:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

En palabras, al derivar una función dentro de otra, debemos derivar la de fuera y multiplicar por la derivada de la de dentro.

Teniendo en cuenta estas reglas, todas las derivadas de funciones elementales dependen de que la derivada de una constante es nula (esto es trivial) y de las siguientes:

$$\begin{array}{lll@{\qquad}lll} x^\alpha & \longrightarrow & \alpha x^{\alpha-1} & \operatorname{sen} x & \longrightarrow & \cos x \\ e^x & \longrightarrow & e^x & \cos x & \longrightarrow & -\operatorname{sen} x \\ \log x & \longrightarrow & 1/x & & & \end{array}$$

En realidad, hay cierta redundancia en esta tabla y se podría ser más escueto. La derivada de x^α se deduce de la e^x y $\log x$ porque $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. Incluso todas las de la primera columna se deducen de la de e^x o de la de $\log x$, aunque todavía está fuera de nuestro nivel hallarlas. Por otro lado, ya sabíamos que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ y escribiendo $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 + x)$ podríamos deducir la de $\cos x$.

La derivada de $\tan x$ se obtiene derivando el cociente $\operatorname{sen} x/\cos x$ y resulta $1 + \tan^2 x$ que también es igual a $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$. Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas también admiten fórmulas explícitas:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se deducen aplicando la regla de la cadena. Por ejemplo, para $f(x) = \arctan x$,

$$\tan f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \big(1 + \tan^2 f(x)\big)f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 f(x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Para practicar, calculemos las derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\log x}{x}$, de $g(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ y de $h(x) = \big(\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x\big)\operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x$. En f nos encontramos una función seno y dentro un cociente, por tanto:

$$f'(x) = \cos\Big(\frac{\log x}{x}\Big)\Big(\frac{\log x}{x}\Big)' = \cos\Big(\frac{\log x}{x}\Big)\frac{1/x \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}\cos\frac{\log x}{x}.$$

La derivada de g es más difícil. El paso clave es reescribirla como $g(x) = e^{\log x\, \operatorname{sen} x}$, usando $x = e^{\log x}$, para que podamos emplear que es una exponencial con un producto dentro. Se tiene

$$g'(x) = e^{\log x\, \operatorname{sen} x}(\log x\, \operatorname{sen} x)' = x^{\operatorname{sen} x}\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x\, \cos x\Big).$$

Una alternativa es lo que se llama *derivación logarítmica* que consiste en derivar $\log g(x) = (\log x)\operatorname{sen} x$ y despejar g' en $g'(x)/g(x) = (\log x \operatorname{sen} x)'$.

La derivada de h es trivial si observamos antes de comenzar que es $\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \big(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\big)^2 = 1$, por tanto, $h'(x) = 0$. Si derivamos h tal como está, sin simplificar, el cálculo sería

$$h'(x) = \big(2\operatorname{sen} x\cos x + 4\cos x(-\operatorname{sen} x)\big)\operatorname{sen}^2 x + \big(\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x\big)2\operatorname{sen} x\cos x - 4\cos^3 x\operatorname{sen} x.$$

Operando, todos los términos se cancelan.

Las técnicas para el cálculo de derivadas no permiten que nos olvidemos del todo de la definición original porque hay ejemplos rebuscados de funciones tales que su derivada existe y no es continua de modo que su valor en puntos conflictivos no se deduce de lo que ocurre alrededor. Por ejemplo, $f(x) = x^2\cos(x^{-2})$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, cumple $f'(0) = 0$ aplicando la definición. Sin embargo, para $x \neq 0$, por la regla de la cadena $f'(x) = 2x\cos(x^{-2}) + 2x^{-1}\operatorname{sen}(x^{-2})$ que no tiene límite cuando $x \to 0$.

4.3. El teorema de Taylor

Con la definición inicial, para hacer derivadas teníamos que calcular límites difíciles. Una vez que sabemos más acerca del cálculo de derivadas y lo hemos reducido a un algoritmo en el caso de las funciones elementales, es natural proceder en sentido contrario y utilizar derivadas para hallar límites.

El resultado más conocido al respecto es la *regla de L'Hôpital* que afirma que si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{es del tipo} \quad \frac{0}{0} \ \text{ o } \ \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe o es } \infty,$$

entonces ambos límites coinciden. Además el resultado se extiende al caso $a = \infty$ y también al de límites laterales.

Las derivadas sucesivas de una función habitualmente se complican bastante, por eso, cuando la regla de L'Hôpital se aplica más de una vez es a menudo conveniente hacer simplificaciones eliminando las partes que no participan en la indeterminación.

Un ejemplo que ya conocíamos por un argumento geométrico es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Si la función fuera $(\operatorname{sen}^{100} x)/x^{100}$, aplicar maquinalmente la regla de L'Hôpital daría lugar a unos cálculos imposibles porque hasta que no derivemos 100 veces x^{100} no se transformará en una constante no nula. El atajo obvio es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^{100} x}{x^{100}} = \Big(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^{100} \underset{\text{L'H}}{=} \Big(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\Big)^{100} = 1.$$

Otro ejemplo con simplificaciones menos obvias es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\log^2 x)}{\sqrt{x^2-2x+2}-1} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\log^2 x)\cdot 2x^{-1}\log x}{(x-1)/\sqrt{x^2-2x+2}}$$

que vuelve a ser del tipo $0/0$. Derivar de nuevo llevaría a unas cuentas largas. Es más sencillo utilizar que cuando $x \to 1$ se tiene $2\cos(\log^2 x)x^{-1} \to 2$ y $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \to 1$. Estas cantidades que no participan en la indeterminación (no se anulan) se pueden sacar fuera del límite para obtener

$$2 \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \underset{\text{L'H}}{=} 2 \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 2.$$

La regla de L'Hôpital requiere que las indeterminaciones sean del tipo $0/0$ o ∞/∞. Cualquier otra hay que transformarla en una de ellas. Por ejemplo, $x \log x$ es del tipo $0 \cdot (-\infty)$ cuando $x \to 0^+$. Resolvemos la indeterminación de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} \underset{\text{L'H}}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Ya sabíamos que las indeterminaciones exponenciales ∞^0, 0^0 y 1^∞ se reducían a $0 \cdot \infty$, que se relacionan con $0/0$ o ∞/∞ como antes, pasando la indeterminación al exponente. Por ejemplo, el límite que define el número e hecho con la regla de L'Hôpital (lo cual no es lo más conveniente), sería:

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{x\to\infty} \Big(e^{\log(1+1/x)}\Big)^x = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+1/x)}{1/x}} \underset{\text{L'H}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{(1+1/x)^{-1}(-1/x^2)}{-1/x^2}} = e^1 = e.$$

En realidad un cambio previo $x = 1/y$, con $y \to 0$, habría simplificado los cálculos.

Las derivadas sucesivas de una función se denotan con superíndices, entre paréntesis para más de tres derivadas. Se suelen usar números romanos cuando se deriva menos de 5 o 6 veces, entendiendo las comillas como íes. Es decir, f', f'', f''', $f^{(iv)}$, $f^{(v)}$, $f^{(6)}$, $f^{(7)}$,... $f^{(n)}$. Por convenio $f^{(0)} = f$, algo así como decir que no derivar es quedarse con la función. Con esta notación, a cada función f que tiene n derivadas en un punto a se le asigna el *polinomio de Taylor* de orden n en a definido por

$$T_n(f,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que es realmente un polinomio de grado menor o igual que n.

Para $f(x) = e^x$ la fórmula para $T_n(f,0)$ es muy sencilla por la facilidad al derivar repetidamente la exponencial:

$$T_n(f,0)(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + + \frac{1}{n!}x^n.$$

En cambio, para $f(x) = \tan x$ no hay nada tan simple porque las derivadas se complican cada vez más. De $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, $f''(x) = 2\tan x + 2\tan^2 x$ y $f'''(x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$ se deduce

$$T_3(f,0)(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}.$$

Las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se repiten cada cuatro órdenes de derivación y también dan lugar a polinomios de Taylor manejables. Por ejemplo, para $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene

$$T_4\Big(f, \frac{\pi}{3}\Big)(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(x - \frac{\pi}{3}\Big) - \frac{1}{4}\Big(x - \frac{\pi}{3}\Big)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\Big(x - \frac{\pi}{3}\Big)^3 + \frac{1}{48}\Big(x - \frac{\pi}{3}\Big)^4.$$

El *teorema de Taylor* afirma que si f tiene n derivadas en a entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

En su versión con resto, precisa que si f tiene $n+1$ derivadas en un intervalo I que contiene a a entonces

$$f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para cualquier $x \in I$ y cierto ξ entre a y x que depende de ellos de una manera indeterminada.

De algún modo, lo que asegura el teorema de Taylor es que el polinomio de Taylor es el polinomio de grado a lo más n que mejor aproxima a la función en las cercanías del punto. La versión con resto cuantifica el error cometido.

Si tienes curiosidad por la teoría, te interesará notar que el límite que aparece en el teorema de Taylor se deduce inductivamente de la regla de L'Hôpital (por eso la hemos incluido en este apartado) ya que $T'_{n+1}(f,a) = T_n(f',a)$. Esto lleva a la pregunta de cómo deducir la regla de L'Hôpital (y el resto en el teorema de Taylor). Está basada en el *teorema del valor medio* que se aplica a cualquier función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y asegura la existencia de un $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

El teorema del valor medio tiene una interpretación física que suena bastante convincente y por eso no iremos más atrás. Interpretando la función como el espacio y su variable como el tiempo, dice que la velocidad media coincide con la velocidad instantánea en algún momento. Si recorres $600\,km$ en $6\,h$ entonces en algún momento has ido a $100\,km/h$. Desde el punto de vista de las demostraciones matemáticas rigurosas esto no es admisible porque se basa en la idea preconcebida de que la derivada, la velocidad instantánea, es continua, lo cual deja de ser cierto en algunas situaciones extrañas. En realidad se prueba a partir del caso particular $f(a) = f(b)$, llamado *teorema de Rolle* que a su vez se deduce de que en algún punto de (a,b) debe haber un máximo o un mínimo, un punto ξ en el que ni se sube ni se baja localmente, lo que fuerza $f'(\xi) = 0$, es decir, a que haya una recta tangente horizontal.

Volviendo a temas menos teóricos, una de las aplicaciones del teorema de Taylor es el cálculo de límites. La llamada *notación de Landau* representa con $o\big((x-a)^n\big)$ una función que al ser dividida por $(x-a)^n$ tiende a cero cuando $x \to a$. De esta forma, el límite en el teorema de Taylor equivale a

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + o\big((x-a)^n\big).$$

Si en un límite sustituimos $f(x)$ por esta expresión y quedan términos con $(x-a)^n$ entonces $o\big((x-a)^n\big)$ es comparativamente despreciable y se puede omitir. En algunos contextos se llama a este proceso *aproximar por infinitésimos*. La fórmula $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$ con $L = \lim_{x\to a} g(x)\big(f(x)-1\big)$ que habíamos utilizado anteriormente para indeterminaciones 1^∞ se basa en que $t = e^{\log t}$ y para $t \to 1$ se cumple $\log t = t - 1 + o(t-1)$ por tanto, $\log f(x)$ se puede sustituir con seguridad por $f(x) - 1$ si $f(x)$ tiende a uno.

Por ejemplo, consideremos el límite aparatoso

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\big(2e^x - 2 - 2x - x^2\big)^2 - \operatorname{sen}(x^7)}{\big(\log(1+x)\big)^6 + \tan(x^8)}.$$

Si en el numerador sustituimos e^x por $T_n(f,a)(x) + o\big((x-a)^n\big)$ para $n \ge 3$ se tendrán términos que no se cancelan con $-2-2x-x^2$. Con esa idea en mente elegimos $n=3$. Para $\log(1+x)$ en el denominador no hay problema de cancelación y elegimos $n=1$ que es el primero para el que T_n es no nulo. Sabemos, usando T_1, que $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$ son $x + o(x)$ y al sustituir x por x^7 y x^8, respectivamente, obtenemos términos comparativamente despreciables. En resumen, estamos empleando

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\big(x^3\big), \quad \log(1+x) = x+o(x), \quad \operatorname{sen}(x^7) = x^7+o(x^7), \quad \tan(x^8) = x^8+o(x^8).$$

Sustituyendo y dividiendo por x^6,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\big(x^3/3 + o\big(x^3\big)\big)^2 - x^7 + o(x^7)}{\big(x + o(x)\big)^6 + x^8 + o(x^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(1/3 + o\big(x^3\big)/x^3\big)^2}{\big(1 + o(x)/x\big)^6} = \frac{1}{9}.$$

Se ha usado que, por definición, $o\big(x^3\big)/x^3 \to 0$ y $o(x)/x \to 0$. Con mayor razón, $o(x^7)/x^6$ y $o(x^8)/x^6$ también tienden a cero.

Con un poco de práctica, la gran mayoría de los límites de funciones que aparecen en los exámenes se pueden resolver a golpe de vista de esta forma y uno puede olvidarse de la regla de L'Hôpital. El precio que hay que pagar es que no es tan mecánico y, dependiendo de tus habilidades matemáticas, te puedes sentir más seguro con la regla de L'Hôpital.

La aproximación numérica de funciones con polinomios de Taylor no tiene tanto interés práctico hoy en día porque todos disponemos de calculadoras y además los algoritmos que utilizan estas no se basan en polinomios de Taylor (la razón es que solo garantizan buenas aproximaciones cerca de un punto). De todas formas, examinemos la situación aproximando $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$ utilizando $T_6(f,0)$ con $f(x) = \operatorname{sen} x$. Las derivadas $f^{(n)}(0)$ con $0 \le n \le 6$ son muy fáciles de calcular y resultan 0, 1, 0, -1, 0, 1 y 0. Entonces al evaluar $T_6(f,0)$, que en realidad es un polinomio de grado 5, en $x = 1/2$ se deduce

$$T_6(f,0)\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{6} + \frac{(1/2)^5}{120} = \frac{1841}{3240} = 0{,}4794270\ldots$$

Con una calculadora se comprueba que $\operatorname{sen}\frac{1}{2} = 0{,}4794255\ldots$ así que la aproximación es muy buena. Todavía más, sin evaluar el seno con una calculadora sabemos que el error es de la forma $-2^{-7}(\cos\xi)/5040$ por la versión con resto del teorema de Taylor. De ξ solo sabemos que está entre 0 y $1/2$ la estimación burda $0 \le \cos\xi \le 1$ prueba que la diferencia $\operatorname{sen}\frac{1}{2} - T_6(f,0)\big(\frac{1}{2}\big)$ es negativa y mayor que $-1{,}551\cdot 10^{-6}$. Esta cantidad está muy cerca del error real.

4.4. Máximos y mínimos

El teorema del valor medio asegura que si $f'(x) > 0$ para $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente *creciente* en (a, b). De la misma manera, si $f'(x) < 0$, la función será estrictamente *decreciente* en (a, b). El calificativo “estrictamente” significa que se excluye la posibilidad de que sea constante.

Si una función es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$, claramente $f(x_0) \ge f(x)$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se dice que la función alcanza un *máximo local* o *relativo* en $x = x_0$. Este máximo, el valor de $f(x_0)$, podría no ser *global* o *absoluto*. Es decir, nada garantiza que en un intervalo mayor siga cumpliéndose $f(x_0) \ge f(x)$.

De la misma forma, si una función es decreciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y creciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$, se dice que la función alcanza un *mínimo local* o *relativo* en $x = x_0$.

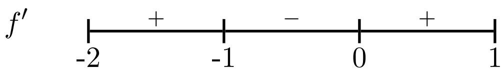
La relación anterior con la derivada permite elaborar un procedimiento para hallar los máximos y mínimos locales y globales en un intervalo $I = [a, b]$. Debemos tomar en consideración:

1. Los *puntos críticos* $f'(x) = 0$, porque allí puede cambiar el crecimiento.
2. Los puntos problemáticos $\nexists f(x)$, $\nexists f'(x)$, porque en ellos el análisis no funciona.
3. Los extremos de I, porque podrían alcanzarse máximos o mínimos globales allí.

Por ejemplo, consideremos $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}$ en $[-2, 1]$. Escribiendo la fórmula como $2x^{5/3} + 5x^{2/3}$, la derivada de esta función es

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{3}x^{-1/3}(x+1).$$

Por tanto, $x = -1$ es un punto crítico y $x = 0$ es problemático porque, formalmente, la derivada da ∞. En un esquema, el signo de la derivada es



En $x = -1$ se pasa de creciente a decreciente, por tanto se alcanza un máximo local, que es $f(-1) = 3$. En $x = 0$ se pasa de decreciente a creciente, por tanto se alcanza un mínimo local, que es $f(0) = 0$. Como $\nexists f'(0)$ habríamos pasado por alto este punto si solo nos fiamos de los puntos críticos como candidatos a máximos o mínimos. Finalmente, en los extremos se tiene $f(-2) = \sqrt[3]{4} = 1{,}587\ldots$ y $f(1) = 7$. Como $f(1) > f(-1)$ el máximo local en $x = -1$ no es absoluto. Sin embargo el mínimo local en $x = 0$ sí lo es.

Este es un esquema de los cálculos y cómo se materializa el resultado en una gráfica:

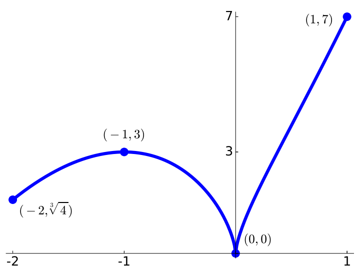
$f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$

$$f'(x) = \tfrac{10}{3}x^{2/3} + \tfrac{10}{3}x^{-1/3} = \tfrac{10}{3}x^{-1/3}(x+1)$$

ceros: $x = -1$

$\nexists f'$: $x = 0$

extremos de I: $x = -2,\ x = 1$



El ejemplo anterior muestra que la información sobre crecimiento y decrecimiento es útil para representar gráficas. Sin ánimo de ser exhaustivo, otras cosas que se suelen examinar con este propósito son:

- Cortes con los ejes. Puntos $(0, f(0))$ y $(x_0, 0)$, con $f(x_0) = 0$.
- Asíntotas. *Horizontales*: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y *verticales*: $x = a$ con $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- Concavidad y convexidad. Convexa: $f'' > 0$, tasa de crecimiento cada vez mayor. Cóncava: $f'' < 0$ tasa de crecimiento cada vez menor. Los puntos de cambio se llaman *puntos de inflexión*.

En la práctica, la concavidad y convexidad a veces lleva a cálculos demasiado complicados y se omite. En términos generales, hay que conseguir un balance entre la información que deseamos obtener y el esfuerzo que requiere.

Consideremos la función $f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$ el único corte con los ejes es $(0, 1)$, porque $f(0) = 1$. Hay una asintótica horizontal $y = 1$ porque $x^2e^{-x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$. No hay asíntotas verticales. Los cálculos relativos al crecimiento y decrecimiento y concavidad y convexidad están recogidos a continuación junto con la gráfica.

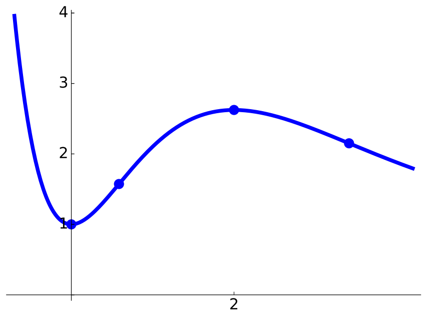
$f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$

$f'(x) = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x}$
$\quad = -3x(x-2)e^{-x}$

ceros: $x = 0, 2$

$f''(x) = (3x^2 - 12x + 6)e^{-x}$

ceros: $x = 2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}$



Consideremos ahora una función no derivable en algunos puntos definida por

$$f(x) = \frac{|x^2 + 2x - 3| - 5}{x + 1}.$$

El polinomio $x^2 + 2x - 3$ se factoriza como $(x - 1)(x + 3)$, resolviendo la ecuación de segundo grado. Por tanto $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$ para $x \in [-3, 1]$ y $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$ para $x \notin [-3, 1]$. El corte con el eje Y es $(0, -2)$ y al igualar la función a cero para $x \notin [-3, 1]$ se obtienen dos cortes con el eje X, $(-4, 0)$ y $(2, 0)$, y ninguno si $x \in [-3, 1]$. Hay una asíntota vertical en $x = -1$ y no hay asíntotas horizontales. La información sobre la derivada y la gráfica son como sigue:

Para $x \in [-3,1]$, $\quad f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{x+1}$

$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

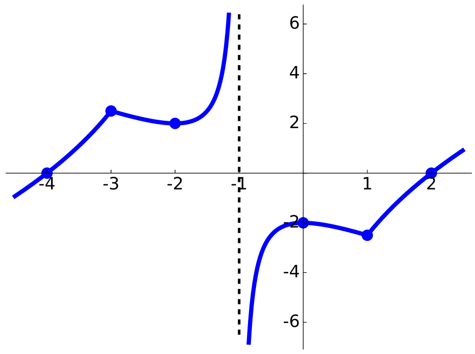
ceros: $x = 0, -2$

$\nexists f'$: $x = -1$

Para $x \notin [-3,1]$, $\quad f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x+1}$

$f'(x) = \frac{x^2+2x+10}{(x+1)^2}$

$\nexists$ ceros de f'



Se alcanzan máximos locales en $x = -3$ y $x = 0$ y mínimos locales en $x = -2$ y $x = 1$.

Posiblemente los problemas de máximos y mínimos que te resultarán más complicados sean los que requieren interpretar un enunciado hasta llegar a la función que uno desea estudiar.

Un ejemplo sencillo es la deducción de que el rectángulo con mayor área de perímetro 1 es en realidad un cuadrado. Si llamamos x e y a las longitudes de la base y la altura, el área es $A = xy$, pero esta es una función de dos variables. La condición del perímetro indica $2x + 2y = 1$ y con ello podemos eliminar la y escribiendo $y = 1/2 - x$ y llegando a la función de área $A(x) = x(1/2 - x)$. El intervalo natural es $[0, 1/2]$ porque las longitudes no pueden ser negativas ni la longitud de un lado puede superar a la mitad del perímetro. Los cálculos son muy sencillos y resumidos en:

$$A'(x) = \frac{1}{2} - 2x = 0 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \qquad A' \quad \underset{0}{|}\overset{+}{\text{———}}\underset{1/4}{|}\overset{-}{\text{———}}\underset{1/2}{|}$$

Entonces se alcanza un máximo en $x = 1/4$ lo que corresponde a que la base mida $x = 1/4$ y la altura $y = 1/2 - x$ tenga la misma longitud.

Un ejemplo algo más complicado es diseñar una lata cilíndrica con tapas que tenga volumen 2π gastando la mínima cantidad de material en su superficie. Tal superficie vendrá dada por el área lateral y la de las dos tapas, es decir

$$S = 2\pi Rh + \pi R^2 + \pi R^2 \qquad \text{con } R = \text{radio de las tapas}, \quad h = \text{altura}.$$

Para eliminar una variable empleamos que el volumen es $2\pi = \pi R^2 h$, entonces $h = 2/R^2$ y, sustituyendo, llegamos a la función de una variable

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{4\pi}{R} \qquad \text{para} \qquad R > 0.$$

Su derivada es $4\pi R - 4\pi/R^2$ lo que lleva al punto crítico $R = 1$. Para $R < 1$ el signo de S' es negativo y para $R > 1$ es positivo, por tanto se alcanza un mínimo. Así pues, el diseño con el gasto mínimo tiene $R = 1$ y $h = 2/1^2 = 2$. Este resultado difiere mucho de las dimensiones habituales de las latas de refrescos. Una razón principal para ello es que estas no son homogéneas en absoluto: tienen la mayor parte de su masa en las tapas.

4.5. *Ejercicios propuestos*

1) Estudia si las siguientes funciones son derivables en $x = 0$ definiendo $f_j(0) = 0$.

$$f_1(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = 3^{-1/|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}.$$

2) Estudia si $f(x) = x|x| \operatorname{sen} x$ tiene una derivada segunda.

3) Calcula la derivada de $\log \frac{x^2+1}{x^4+1}$ y de $x^{\tan x}$.

4) Halla la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\big(\pi x^{2x}\big)$ en $x = 1$.

5) Sea $g(x)$ tal que $(s \circ g)(x) = 2x$ con $s(x) = e^x - e^{-x}$. Halla la derivada de g consiguiendo una expresión lo más explícita posible. Indicación: Piensa en la diferencia $(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2$.

6) Calcula la derivada de $\arctan g(x)$ y de $\operatorname{arc\,sen} g(x)$ donde $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

7) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2^x + 3^x - 5}{x^2 + x - 2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(\tan x)^3}{2x^5 + 2x^4 - x^3}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) \operatorname{sen} x}{\big(\log(1+x)\big)^2}.$$

8) Considera los límites

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}, \qquad L_2 = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \qquad L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}.$$

Se tiene $L_1 = 1$ y $L_2 = 0$ (explica por qué) y por tanto $L_3 = L_1 L_2 = 0$. Sin embargo, al aplicar directamente la regla de L'Hôpital a L_3 se obtiene un límite que no existe. ¿Sabrías resolver esta paradoja? Indicación: Revisa el enunciado preciso de la regla de L'Hôpital.

9) Para la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos y esboza su gráfica.

10) Demuestra que $x^3 - 3x + C = 0$, donde C es una constante, tiene a lo más una solución $x \in [-1, 1]$. Halla los valores de C para los que hay una solución y los valores para los que no hay ninguna.

11) Esboza la gráfica de $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + |x + 2|$.

12) Decide cuándo es cóncava y convexa la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4 \cos x$.

13) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x) = \exp\big((x^2 - 1)^{-1}\big)$.

14) Demuestra la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \in \mathbb{R}$ y $x^{-1} \log x \leq e^{-1}$ para $x > 0$. En cada caso halla un valor de x para el que se tenga la igualdad.

15) Halla el volumen máximo que puede tener un cono (circular recto) inscrito en una esfera de radio 3. Indicación: Recuerda que el volumen del cono es un tercio del área de la base por la altura.

16) Halla la mínima distancia del punto $(3, 3/2)$ a la parábola $y = 2x^2$.

17) Considera un triángulo equilátero de lado 2 y un rectángulo en su interior de manera que uno de sus lados esté dentro de uno de las lados del triángulo. ¿Cuál es el área máxima del rectángulo?

18) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x) = \cos x$ en $x_0 = \pi/4$.

19) Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de $f(x) = x^3 + x + 1$ en $x_0 = 1$. ¿Qué ocurre si operas el polinomio de grado 3? Da una explicación para ello.

20) Se sabe que la función $f(x) = 4\arctan(3x) + 4\arctan(2x)$ cumple $f(1/6) = \pi$. Halla el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ de menor grado con el que se obtenga una aproximación de π con un error menor que 0,025.

Capítulo 5

Integrales

5.1. El teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en $[a, b]$ el concepto de *integral* $\int_a^b f$ corresponde a dividir $[a, b]$ en subintervalos de longitud infinitesimal, multiplicarla por el valor de f en cada uno de ellos y sumar los resultados. Con más rigor, consideramos n subintervalos de longitud $h_n = (b-a)/n$ y definimos

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} h_n\big(f(a) + f(a+h_n) + f(a+2h_n) + f(a+3h_n) + \cdots + f(b)\big).$$

Cuando $f \geq 0$ este límite representa el área bajo la gráfica de una función $f(x)$. Si $a > b$ se define $\int_a^b f$ como $-\int_b^a f$.

La definición anterior refleja bien el significado geométrico, pero es demasiado complicada a la hora de obtener resultados explícitos. El *teorema fundamental del cálculo* afirma esencialmente que integrar es lo contrario que derivar. Más concretamente, una de las formas de su enunciado es que si f es continua en $[a, b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f$ es derivable para todo $x \in (a, b)$ y $F'(x) = f(x)$.

Una función cuya derivada es una función dada, se dice que es una *primitiva* suya. Así, el resultado anterior asegura que $\int_a^x f$ es una primitiva de f. En términos prácticos, es más interesante una versión del teorema fundamental del cálculo llamada *regla de Barrow* que se resume en la fórmula:

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) \qquad \text{con } g \text{ una primitiva de } f.$$

Habitualmente se indica $g(b) - g(a)$ con $g(x)\big|_a^b$.

Cuando se muestra la variable de la función a integrar, se añade al final dx. Es decir, se escribe $\int_a^b f(x)\,dx$. Este dx, leído *diferencial* de x, es solo notación, aunque más adelante lo haremos participar en algunas técnicas de integración. Históricamente, el símbolo $\int$ es una deformación de una "s" refiriéndose a la suma que aparece en la definición original y dx representa la longitud infinitesimal de cada intervalo.

Con la regla de Barrow, el cálculo de integrales se reduce al de primitivas. Por ejemplo, $g(x) = x^3/3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$ y por tanto,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Eso es un gran avance con respecto a la complicación del límite de la definición. Con poco esfuerzo hemos visto que el área bajo la parábola $y = x^2$ sobre el eje x en $[0,1]$ es $1/3$. Resultados de este tipo ya eran conocidos por Arquímedes, pero requerían argumentos geométricos que hoy consideraríamos muy complejos.

Dos primitivas de una función difieren en una constante (esto es consecuencia del teorema del valor medio). Con $\int f$ se indican todas las primitivas de f, por ello su resultado se escribe sumando al final una K que representa una constante arbitraria. En el caso anterior,

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + K.$$

La terminología al uso es llamar *integrales indefinidas* al cálculo de todas las primitivas, esto es, a $\int f$, porque no se especifican límites, e *integrales definidas* a las que responden a la definición original que requiere un intervalo donde integrar.

Según el teorema fundamental del cálculo o la regla de Barrow, obtenemos una tabla de integrales leyendo la de derivadas al revés. De esta forma,

$$\begin{array}{lcllcl}
\int x^\alpha\,dx &=& \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \quad (\alpha \neq -1), & \int \cos x\,dx &=& \operatorname{sen} x + K,\\
\int e^x\,dx &=& e^x + K, & \int \operatorname{sen} x\,dx &=& -\cos x + K,\\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \log|x| + K, & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &=& \arctan x + K.
\end{array}$$

Aquí hay algún comentario que hacer. En el primer resultado, lo que dice la tabla de derivadas es que la derivada de x^α es $\alpha x^{\alpha-1}$. Lo que hemos hecho es cambiar α por $\alpha+1$ y dividir entre esta última cantidad. La derivada de $\log x$ es $1/x$ y no tiene sentido derivar $\log x$ en valores negativos, sin embargo sí tiene sentido calcular $\int_a^b x^{-1}\,dx$ con a y b ambos negativos y, por la simetría, debería dar lo mismo que $-\int_{-b}^{-a} x^{-1}\,dx = \log(-a) - \log(-b)$, de ahí el valor absoluto.

La regla de la cadena implica

$$\int f'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = f\big(g(x)\big) + K.$$

Las integrales que se deducen de la tabla y de una aplicación más o menos directa de esta fórmula se suelen llamar *integrales inmediatas*. Si piensas que el nombre es un eufemismo y los siguientes ejemplos te parece que están fuera de tu alcance, todavía tienes una oportunidad de llegar a los mismos resultados a través de la técnica de cambio de variable que veremos más adelante.

Consideremos

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{x-5}, \quad I_3 = \int \operatorname{sen}(5x)e^{\cos(5x)}\,dx, \quad I_4 = \int \frac{\cos x}{(2+\operatorname{sen} x)^2+1}\,dx.$$

En la primera integral debemos ver x como la derivada de x^2+1 salvo compensar un 2:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\cdot(2x)\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+K.$$

Hemos usado que uno partido de una función integra como el logaritmo del valor absoluto de la función siempre que tengamos la derivada como factor. Siguiendo esta idea y que la derivada de $x-5$ es 1, la segunda integral es más sencilla y da $\log|x-5|+K$.

La tercera la tenemos que entender como la exponencial de una función de la que casi tenemos la derivada. Nos falta compensar un signo y un cinco:

$$I_3 = \int \operatorname{sen}(5x)e^{\cos(5x)}\,dx = -\frac{1}{5}\int \big(\cos(5x)\big)' e^{\cos(5x)}\,dx = -\frac{1}{5}e^{\cos(5x)}+K.$$

La última integral nos puede recordar a la primera, pero en realidad es diferente, porque $\cos x$ no es la derivada del denominador sino solo de la parte que está dentro del cuadrado. Por eso, debemos pensar en $\int(1+x^2)^{-1}\,dx$ y el resultado es $\arctan(2+\operatorname{sen}x)+K$.

5.2. Técnicas de integración

Hace no tantos años, los temarios de un primer curso de análisis matemático dedicaban bastante tiempo a desarrollar técnicas para integrar familias de funciones más o menos complicadas. Hoy en día esto tiene menos sentido porque el acceso a *software* matemático simbólico es prácticamente universal, incluso a través de sencillas aplicaciones *online*, y dicho *software* es capaz de resolver muchas de las integrales que admiten fórmulas explícitas y, en cualquier caso, superar con creces a los que estudiaron muchas técnicas de integración. De todas formas, al igual que la existencia de calculadoras no ha propiciado que nos olvidemos de la tabla de multiplicar, es conveniente disponer de un conocimiento somero de algunas técnicas de integración.

5.2.1. Integración por partes

Sabíamos que la derivada del producto fg era $f'g+fg'$. Despejando, eso se traduce en la fórmula de *integración por partes*:

$$\int fg' = fg - \int gf'.$$

Casi nunca se enuncia así, se suele escribir $u=f$, $v=g$ y como la notación de Leibniz dice $du/dx = f'$ y $dv/dx = g'$ se interpreta que $du = f'dx$ y que $dv = g'dx$. De este modo, el diferencial d pasa a ser más que el residuo de una notación histórica. Ahora actúa sobre funciones derivándolas y añadiendo al final dx. Con esta notación, la forma habitual de la fórmula de integración por partes es

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Hay varias reglas mnemotécnicas para recordarla. Por ejemplo, "**u**n **d**ía **v**i **u**n **v**iajero **v**estido **d**e **u**niforme". La fórmula será útil si tenemos un factor fácil de integrar y otro fácil de derivar de manera que en este proceso el nuevo producto simplifique la integral. Familias típicas a las que se aplica son todas las integrales de la forma $\int P(x)e^x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{sen} x\,dx$ o $\int P(x)\cos x\,dx$ donde P es un polinomio. Al tomar $u = P$ reduciremos paulatinamente el grado y acabaremos resolviendo la integral.

Por ejemplo, para hallar $\int (x^2-1)e^x\,dx$ elegimos $u = x^2-1$, $dv = e^x dx$, obteniéndose

$$\int (x^2-1)e^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2\int xe^x\,dx$$

porque $du = 2x\,dx$ y $v = e^x$. La integral $\int xe^x\,dx$ se trata de igual forma por partes, con $u = x$, $dv = e^x dx$, lo que lleva a $xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + K$. En definitiva,

$$\int (x^2-1)e^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2\big(xe^x - e^x\big) + K = (x^2-2x+1)e^x + K.$$

El procedimiento funciona también bajo cambios lineales en el argumento de la exponencial, el seno o el coseno. Así, con $u = x$ y $dv = e^{-x/2}\,dx$ debemos escribir $du = 1\,dx$ y $v = -2e^{-x/2}$, por tanto

$$\int xe^{-x/2}\,dx = -2xe^{-x/2} + 2\int e^{-x/2}\,dx = -2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + K.$$

La integración por partes también es útil para hallar $\int P(x)\log x\,dx$, con P un polinomio, pero esta vez debemos escoger $dv = P(x)\,dx$ porque $\log x$ no es "fácil" de integrar (y, en cualquier caso, complicaría la integral). A este respecto, una situación un poco excepcional es el caso $P = 1$ en el que la aplicación de la integración por partes parece extraña porque solo tenemos una función. Con $u = \log x$ y $dv = 1\,dx$ se sigue $\int \log x\,dx = x\log x - x + K$. Un truco similar funciona con las funciones trigonométricas inversas. Por ejemplo, con $u = \arctan x$ y $dv = 1\,dx$ se tiene

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Otro ejemplo un poco singular es $I = \int e^x\cos x\,dx$ y sus variantes. Al integrar por partes tomando $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$, la integral se traduce en otra similar con seno y con una segunda aplicación de integración por partes con $u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ reaparece la integral original:

$$I = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\operatorname{sen} x\,dx = e^x\operatorname{sen} x - \Big(-e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx\Big).$$

Se obtiene la relación $I = e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x - I$ salvo constantes de integración, por tanto, despejando, $I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + K$.

5.2.2. Integración de funciones racionales

Es posible calcular integrales de funciones racionales, esto es, de cocientes de polinomios P/Q, en función de la factorización de Q. No estudiaremos todos los casos, pero sí los suficientes como para dar una idea de la estrategia general.

Una reducción previa es que si en P/Q el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, llevando a cabo la división con resto de P entre Q, pasaremos al caso en que el grado del numerador es el menor. En una fórmula:

$$\int \frac{P}{Q} = \int c + \int \frac{r}{Q} \qquad \text{si} \quad P = cQ + r.$$

Un ejemplo sencillo es $P = x^2 + x + 3$, $Q = x + 1$, con cociente x y resto 3, en el que la reducción lleva casi inmediatamente a la solución porque Q es de grado uno:

$$\int \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3\log|x+1| + K.$$

Un ejemplo más complicado es

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}\,dx$$

Al dividir $P = x^3$ entre $Q = x^2 - 3x + 2$ se obtiene el cociente $x + 3$ y el resto $7x - 6$. Por tanto,

$$I = \int (x+3)\,dx + \int \frac{7x-6}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \int \frac{7x-6}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Ahora tenemos que aprender a tratar la última integral.

La estrategia básica es la *descomposición en fracciones simples*. Si el denominador se factoriza como $Q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$ con α_j raíces reales y distintas, entonces cuando el grado del numerador es menor que n, siempre se cumple

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n} \qquad \text{para ciertos } A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

La manera de hallar los A_j es igualar los numeradores y sustituir $x = \alpha_j$.

En el ejemplo que nos ocupa,

$$\frac{7x-6}{x^2-3x+2} = \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} \quad \Rightarrow\ 7x - 6 = A_1(x-2) + A_2(x-1).$$

Tomando $x = 1$, $A_1 = -1$ y tomando $x = 2$ se sigue $A_2 = 8$. Las integrales resultantes son inmediatas y obtenemos en total

$$I = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \int \Big(\frac{-1}{x-1} + \frac{8}{x-2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \log|x-1| + 8\log|x-2| + K.$$

Si el grado de P es menor que el de Q, obviamente nos saltamos el proceso de reducción. Por ejemplo, para calcular $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx$ pasamos directamente a la descomposición en fracciones simples

$$\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad 2x+1 = A_1(x+1) + A_2 x.$$

Tomando $x = 0$ y $x = -1$ se deduce $A_1 = A_2 = 1$ y, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \Big)\, dx = \log|x| + \log|x+1| + K.$$

Si hay una o varias raíces múltiples (repetidas), se procede de la misma forma salvo que las fracciones simples correspondientes a una raíz α_j de multiplicidad m son

$$\frac{A_{j,1}}{x-\alpha_j} + \frac{A_{j,2}}{(x-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{j,m}}{(x-\alpha_j)^m}$$

Veámoslo sobre un ejemplo. El polinomio $Q = x^3 + x^2$ factoriza como $x^2(x+1)$ donde x, que corresponde a la raíz $\alpha = 0$, aparece con multiplicidad 2. Si P es el numerador, entonces buscamos una descomposición

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_2}{x+1}.$$

Al igualar los numeradores, reduciendo a común denominador,

$$x^2 + 3x + 1 = A_{1,1}x(x+1) + A_{1,2}(x+1) + A_2 x^2.$$

Dando los valores $x = 0$ y $x = -1$ solo conseguimos determinar dos de los coeficientes. Para el tercero, debemos comparar coeficientes o asignar otro valor que imponga una nueva condición:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; A_{1,2} = 1, \quad x = -1 \;\Rightarrow\; A_2 = -1, \quad x = 1 \;\Rightarrow\; 5 = 2A_{1,1} + 2A_{1,2} + A_2 \;\Rightarrow\; A_{1,1} = 2.$$

Con ello, ya podemos calcular la integral de la función racional correspondiente

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2}\, dx = \int \Big(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \Big)\, dx = 2\log|x| - x^{-1} - \log|x+1| + K.$$

El último caso que discutiremos es el de raíces complejas. Para mayor simplicidad, solo nos ocuparemos de la situación en que el factor que produce las raíces complejas es x^2+1. El resto se reducen a este completando cuadrados. Asociado a este factor se añade a la descomposición en fracciones simples un términos de la forma $(Mx+N)/(x^2+1)$. Este da lugar a integrales inmediatas porque

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+1}\, dx = M \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + N \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} M \log(x^2+1) + N \arctan x + K.$$

Por ejemplo, si queremos integrar $(2x^2+x+1)/(x^3+x)$ la factorización del denominador $x(x^2+1)$ conduce a la descomposición

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x}=\frac{A_1}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x^2+x+1=A_1(x^2+1)+(Mx+N)x.$$

Ahora solo tenemos una raíz que sustituir, con $x=0$ se sigue $A_1=1$. Comparando coeficientes o dando otros valores, obtendremos condiciones que determinan M y N. Por ejemplo, una vez que sabemos $A_1=1$, mirando al coeficiente de x^2 se obtiene $2=1+M$, esto es, $M=1$ y haciendo lo mismo con los términos independientes, $N=1$. Entonces,

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}\,dx=\int \Big(\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}\Big)\,dx=\log|x|+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\arctan x+K.$$

En realidad, el caso general de raíces complejas se podría hacer igual que el caso de raíces reales, pero nos llevaría a ciertas discusiones acerca de la definición de la función logaritmo sobre $\mathbb{C}$.

5.2.3. Integración por cambio de variable

En realidad lo único que refleja esta técnica es lo que ya sabíamos de las integrales inmediatas relativo a la regla de la cadena, pero de una manera más sistemática con la que es más difícil perderse.

Reinterpretamos la regla de la cadena en forma integral escribiendo $t=g(x)$ y, consecuentemente, $dt=g'(x)\,dx$. Esto es,

$$\int f'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int f'(t)\,dt=f(t)+K=f\big(g(x)\big)+K.$$

No hay que olvidar el último paso, que consiste en deshacer el cambio. Para integrales definidas no es necesario pasar por la integral indefinida y deshacer el cambio, se puede actuar directamente sobre los límites de integración. La filosofía es clara: cada integral debe tener los límites que corresponden a su variable. En una fórmula,

$$\int_a^b f'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)\,dt=f\big(g(b)\big)-f\big(g(a)\big).$$

Es importante notar que los cambios de variable deben ser uno a uno, es decir, no podemos aplicar un cambio de variable $t=x^2$ cuando $x\in[-1,1]$ porque no podremos deshacer el cambio, ya que cada valor no nulo de x corresponderá a dos valores de t. En ese caso habría que descomponer el intervalo en $[-1,0]$ y $[0,1]$ y hacer el cambio en cada uno de ellos.

No hay fórmulas mágicas para saber cuál es el cambio de variable más adecuado. La idea básica a tener en mente es que debes hacer cambios que quiten las cosas que molesten y que no compliquen el diferencial. Por ejemplo, consideremos la integral que da el área bajo la gráfica de $f(x)=\big(1+\sqrt{x}\big)^{-1}$ en $[0,4]$,

$$A=\int_0^4 f=\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Si no estuviera la raíz cuadrada sería fácil. Esto motiva el cambio $x = t^2$ con el que tenemos que cambiar dx por $2t\,dt$ resultando

$$A = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\,dt.$$

El cambio en los límites de integración proviene de que $t = \sqrt{x}$ y entonces $x = 0$ y $x = 4$ corresponden, respectivamente a $t = 0$ y a $t = \sqrt{4} = 2$. Esta es la integral de una función racional. Como el grado del numerador y del denominador son iguales, lo primero que debemos hacer es la división con resto $2t = 2(t+1) - 2$ que conduce a

$$A = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\,dt = \int_0^2 \Big(2 + \frac{-2}{t+1}\Big)\,dt = 2t - 2\log|t+1|\Big|_0^2 = 4 - 2\log 3.$$

Calculemos ahora

$$I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx \qquad \text{mediante } e^x = t.$$

Despejando, $x = \log t$ y por tanto $dx = t^{-1}\,dt$. De esta forma,

$$I = \int \frac{t-1}{(t+1)t}\,dt = \int \Big(\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{t}\Big)\,dt$$

La descomposición en fracciones simples da $t - 1 = A_1 t + A_2(t+1)$ en los numeradores y con $t = 0$, $t = -1$ se deduce $A_1 = 2$ y $A_2 = -1$. Recordemos deshacer finalmente el cambio, porque nuestra integral inicial era en x,

$$I = \int \Big(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = 2\log|t+1| - \log|t| + K = 2\log(e^x + 1) - x + K.$$

Es fácil comprobar que al derivar el resultado se obtiene la función que hemos sometido a integración, en consonancia con el teorema fundamental del cálculo. Por cierto, una forma alternativa muy rara, pero muy rápida, de resolver la integral anterior es convertirla en una integral inmediata multiplicando numerador y denominador por $e^{-x/2}$

$$I = 2\int \frac{1}{e^{x/2} + e^{-x/2}}\Big(\frac{1}{2}e^{x/2} - \frac{1}{2}e^{-x/2}\Big)\,dx = 2\log\big(e^{x/2} + e^{-x/2}\big) + K.$$

Debería estar claro, usando las propiedades del logaritmo, que este resultado coincide con el anterior.

Las funciones trigonométricas se utilizan en algunos cambios para quitar raíces cuadradas de polinomios de segundo grado aprovechando la propiedad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el primer cuadrante. Este es el área de un cuarto de círculo unidad, que nos debería salir $\pi/4$. Aunque Arquímedes ya conocía este resultado hace 23 siglos, da lugar a una integral que es todavía demasiado complicada para nosotros. Con el cambio $x = \operatorname{sen} t$ se tiene $dx = \cos t\,dt$ y el área buscada es

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

A continuación calcularemos esta integral con una fórmula trigonométrica que relaciona el coseno al cuadrado con el coseno.

5.2.4. Algunas integrales trigonométricas

Solo consideraremos $\int f$ con $f(x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x$. Distinguimos tres posibilidades, las dos primeras no excluyentes:

Si m es impar, escribiendo $\operatorname{sen}^m x$ como $(1-\cos^2 x)^{(m-1)/2} \operatorname{sen} x$, al desarrollar la potencia se obtienen integrales inmediatas. También se puede hacer un cambio $t = \cos x$.

Si n es impar el argumento es similar escribiendo $\cos^n x$ como $(1-\operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2} \cos x$. También se puede hacer un cambio $t = \operatorname{sen} x$.

Si m y n son pares, se aplican las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

las veces que sean necesarias hasta que aparezcan potencias impares a las que aplicar los casos anteriores.

Por ejemplo, calculemos

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int \cos^2 x\, dx$$

La primera es

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x \big(1-\operatorname{sen}^2 x\big)^{(3-1)/2} \cos x\, dx = \int \big(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x\big) \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + K.$$

Para la segunda hay que emplear la fórmula de $\cos^2 x$

$$I_2 = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int \big(1+\cos(2x)\big)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + K.$$

Estrictamente, no ha sido necesario aplicar el segundo caso con $n = 1$ porque la integral de $\cos(2x)$ es inmediata.

Con I_2 podemos terminar el cálculo del área de un cuarto del círculo unidad:

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos^2\, dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

que es el resultado esperado.

5.3. Aplicaciones de la integral

Ya sabemos que la integral $\int_a^b f$ para $f \ge 0$ indica el área sobre el eje x y bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Un problema natural consiste en hallar el área entre dos gráficas. La fórmula general es

$$A = \int_a^b |f-g|.$$

En realidad, esta fórmula no es tan útil porque no sabemos integrar valores absolutos con las técnicas estudiadas. Más bien es un recordatorio de que siempre debemos de integrar la función que está arriba menos la que está abajo.

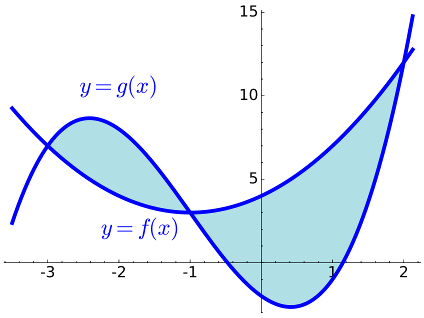
Por ejemplo, calculemos el área entre las gráficas de $f(x) = x^2 + 2x + 4$ y de $g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$. Para averiguar los intervalos en los que una queda por encima de otra, debemos estudiar dónde coinciden, lo que lleva a resolver $g(x) = f(x)$ o, equivalentemente, a factorizar $g(x) - f(x)$. El resultado obtenido, junto con la representación gráfica, es el siguiente:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\ &= (x+1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

$g - f$ $-$ (-3) $+$ (-1) $-$ (2) $+$



Es decir, g queda por encima en el intervalo $[-3,-1]$ y por debajo en el $[-1,2]$. El área encerrada es entonces

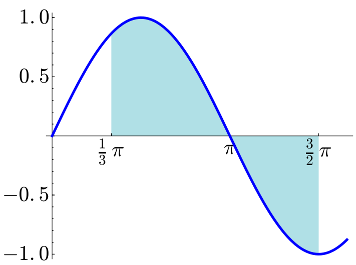
$$A = \int_{-3}^{-1} (g-f) + \int_{-1}^{2} (f-g) = \int_{-3}^{-1} (g-f) - \int_{-1}^{2} (g-f).$$

Sustituyendo $g - f$ e integrando, se tiene

$$A = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6\Big|_{-3}^{-1} - \Big(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6\Big)\Big|_{-1}^{2} = \frac{253}{12}.$$

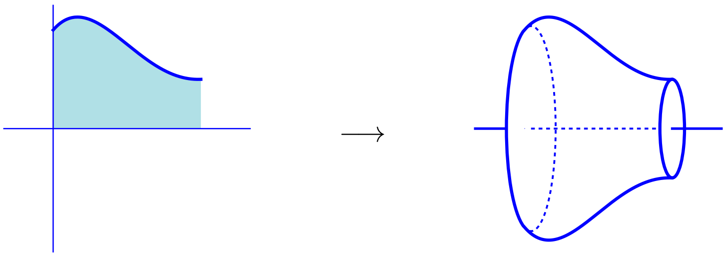
Algo un poco más cercano a la definición de la integral es el cálculo del área limitada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el eje x en el intervalo $[\pi/3, 3\pi/2]$. El eje x responde a la ecuación $y = 0$ y el valor absoluto de la fórmula se traduce en que todo lo que tenemos que hacer es poner signos adecuados a la función para obtener resultados positivos. El cálculo y su representación gráfica son los siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\operatorname{sen} x)\, dx \\ &= -\cos x\Big|_{\pi/3}^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{3\pi/2} \\ &= \Big(1 + \frac{1}{2}\Big) + (0+1) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$



Simplemente cambiamos de signo la parte negativa para la integral corresponda al área.

Cuando la superficie entre una gráfica y el eje x gira alrededor de este eje en cierto intervalo $[a,b]$, se obtiene un *sólido de revolución*:



El volumen de tal figura geométrica viene dado por

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx.$$

Esta fórmula resulta natural, recordando la definición primera de integral, si notamos que cuando $h > 0$ es muy pequeño, el volumen de la rodaja vertical entre x y $x+h$ es aproximadamente $\pi\big(f(x)\big)^2 h$ ya que el volumen del cilindro es el área de la base (un círculo) por la altura.

Por ejemplo, $f(x) = x$ en el intervalo $[0,1]$ da lugar a un cono cuyo volumen es

$$V = \pi \int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

Si recuerdas o buscas la fórmula para el volumen del cono, $V = \pi R^2 h$ donde R es el radio de la base y h la altura, verás que el resultado de la integral es coherente con ella porque en nuestro caso $R = h = 1$.

Para hallar el volumen cuando el sólido de revolución se construye haciendo girar la gráfica alrededor del eje y, se utiliza la misma fórmula, pero con la función obtenida al despejar la x en $y = f(x)$. Esto es lógico, pues corresponde a intercambiar los ejes.

Por ejemplo, dada la parábola $f(x) = x^2/4$ en el intervalo $x \in [0,2]$. La función $f(x)$ varía en $[0,1]$ y podríamos considerar los volúmenes V_x y V_y de los cuerpos de revolución al girar por los ejes x e y en estos intervalos. Los resultados serían:

$$V_x = \pi \int_0^2 \Big(\frac{1}{4}x^2\Big)^2\,dx = \frac{\pi}{16}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{5} \qquad \text{y} \qquad V_y = \pi \int_0^1 \big(2\sqrt{y}\big)^2\,dy = 4\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 2\pi.$$

Una cosa muy chocante es que regiones infinitas pueden tener área o volumen finitos. Este es el análogo de que una serie (una suma infinita) puede converger a una cantidad finita.

Por ejemplo, el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[1,\infty)$ viene dada por $\int_1^\infty x^{-2}\,dx = -x^{-1}\big|_1^\infty = 1$ donde se ha usado $1/\infty = 0$. Recordemos que el álgebra del infinito hay que interpretarla en términos de límites. Es decir, lo que estamos afirmando es que el área bajo la gráfica en el intervalo $[1,N]$ se acerca a 1 cuando N crece indefinidamente.

Si cambiamos la función a $f(x) = 1/x$, el área será infinita, pero si consideramos el volumen del sólido obtenido al hacer girar su gráfica alrededor del eje x en el intervalo $[1,\infty)$, el resultado es $V = \pi \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \pi$. Lo curioso de este ejemplo es que se puede probar que el área lateral del sólido resultante es infinita y surge la paradoja de que si quisiéramos pintarlo necesitaríamos un área infinita de pintura, pero si lo suponemos hueco y vertemos la pintura en el interior, nos basta con un bote de pintura de capacidad π.

Más allá de ser simples curiosidades matemáticas, las integrales asociadas a regiones infinitas son relativamente comunes en los modelos de la física y la ingeniería, por ello les dedicaremos una sección aparte.

5.4. Integrales impropias

En diferentes aplicaciones aparecen integrales $\int_a^b f$ en los que $f(a)$ o $f(b)$ no existen o a o b son infinitos. Se dice que la integral es *impropia*. Tales integrales se entienden como límites. Por ejemplo,

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f \quad \text{si } \nexists f(a).$$

El hecho de que en el segundo caso se escriba un límite lateral es solo para no salirnos del intervalo ya que fuera de él f podría no estar definida.

Cuando el límite existe y es finito, se dice que la integral impropia es *convergente* y en caso contrario se dice que es *divergente*.

Por ejemplo, la integral $\int_0^1 \log x\,dx$ es impropia porque $\log 0 = -\infty$. Por tanto, debemos hallar

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \log x\,dx.$$

Utilizando integración por partes con $u = \log x$ y $dv = 1\,dx$, ya habíamos visto que

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + K.$$

Entonces, la integral impropia es

$$\lim_{t\to 0^+} (x\log x - x)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} (-1 - t\log t + t) = -1 - \lim_{t\to 0^+} t\log t = -1 - \lim_{t\to 0^+} \frac{\log t}{1/t}.$$

Con la regla de L'Hôpital, es fácil ver que el último límite es cero, por tanto la integral impropia converge y su valor es -1.

Una integral impropia que no converge es $\int_{-2}^0 x^{-2}\,dx$ porque debemos entenderla como $\lim_{t\to 0^-} \int_{-2}^t x^{-2}\,dx$ y $-x^{-1}\big|_{-2}^t$ tiende a infinito cuando $t \to 0^-$.

Una familia de ejemplos que generalizan los del final de la sección anterior son $I_\alpha = \int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$. Es fácil ver que I_α converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \le 1$.

Al igual que ocurre con las series, es posible estudiar la convergencia de una integral sin necesidad de calcular su valor, esencialmente con una adaptación del criterio de comparación. Solo enunciaremos un resultado para intervalos infinitos. Concretamente, si $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ y $g : [b,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ son funciones bien definidas tales que $\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple $0 < \ell < \infty$

(suponiendo la existencia del límite), entonces $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ tienen el mismo carácter. Es decir o ambas son convergentes o ambas divergentes.

Por ejemplo,

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + e^{-x}}{x^3+1}\,dx \quad \text{diverge porque} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Esta última integral es lo que hemos llamado antes I_1.

Variaciones de este criterio permiten tratar integrales impropias en intervalos finitos. Por ejemplo, si se cumple $g \ge f \ge 0$ en $[a, b]$ entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la de $\int_a^b f$ y la divergencia de $\int_a^b f$ implica la de $\int_a^b g$.

5.5. *Ejercicios propuestos*

1) Muestra que $\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Escribe $a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$ como $a_n = \frac{1}{n}\Big(f\big(\frac{1}{n}\big) + f\big(\frac{2}{n}\big) + \cdots + f\big(\frac{n}{n}\big)\Big)$ para cierta f y utiliza el resultado para hallar el límite de a_n como una integral.

3) Empleando el teorema fundamental del cálculo, muestra que la integral $\int_{\pi/2}^x \operatorname{cosec} t\,dt$ es igual a $\log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ para $x \in [\pi/2, \pi)$.

4) Halla $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Indicación: Da por supuesto (o prueba) $\int_2^\infty \frac{dt}{\log t} = \infty$ y aplica la regla de L'Hôpital aislando la integral en el numerador.

5) Calcula la derivada de $\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} e^{-t^2}\,dt$.

6) Intenta calcular primitivas de las siguientes funciones directamente, sin aplicar técnicas especiales de integración: $f_1(x) = \tan x$, $f_2(x) = (x\log x)^{-1}$, $f_3(x) = \big(\cos\sqrt{x}\big)/\sqrt{x}$.

7) Utiliza el método de integración por partes para calcular $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$.

8) Halla $\int_{-1}^0 (x^2+1)e^x\,dx$.

9) Calcula una primitiva de $f(x) = (x-1)\big(2\log(x+1) - 1\big)$. Indicación: Toma como partes cada uno de los factores.

10) Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x+3}{x^2-5x+4}$ y el eje X en el intervalo $[2, 3]$.

11) Calcula $\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx$.

12) Calcula $\int \frac{x+7}{x^3+5x^2+3x-9}\,dx$.

13) Resuelve la integral $\int_{-2}^7 \big(2+\sqrt{2+x}\big)^{-1}\,dx$ empleando un cambio de variable.

14) Calcula $\int \big(9e^x + e^{-x}\big)^{-1}\,dx$.

15) Halla el área entre la gráfica de $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ y su negativa en el intervalo $[0, 1]$.

16) Calcula $\int f$ donde $f(x) = e^{2x}/\sqrt{e^x+1}$.

17) Calcula $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$ y $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$ y explica geométricamente por qué son iguales.

18) Encuentra una primitiva de $\cos^5 x \operatorname{sen}^3 x$.

19) Halla el valor de $\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|^3\, dx$.

20) Considera la parte de la parábola $y = 1 - x^2$ en el primer cuadrante. Halla el volumen del sólido que genera cuando gira alrededor del eje X y cuando lo hace alrededor del eje Y.

21) Calcula el área que limitan las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$.

22) Obtén la fórmula para el volumen de la esfera de radio R empleando integrales.

23) Halla el área limitada entre la parábola $y = \frac{4}{3}x^2$ y la recta $2x + 3y = 2$.

24) Determina el volumen del sólido infinito obtenido al girar la gráfica de la función $f(x) = (x^2 + 5x + 6)^{-1/2}$ alrededor del eje X en $x > 0$.

25) Calcula el valor de $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx$ explicando por qué es convergente.

26) Calcula $\int_{-\infty}^{-2} (x+2)2^x\, dx$.

27) Decide si $\int_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^4+x+1}}\, dx$ es convergente.

28) Estudia la convergencia de $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x^7}}\, dx$. Indicación: Nota que $(1 - \cos x)/x^2$ tiene límite finito no nulo cuando $x \to 0$.

Capítulo 6

Series de potencias

6.1. Radio de convergencia

Una *serie de potencias* es una serie del tipo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{con} \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Este tipo de series aparece con frecuencia en problemas de física e ingeniería en los que z se considera como una variable (compleja, en general). Aplicando el criterio del cociente o de la raíz, se tiene que S converge absolutamente si

$$|z| < \frac{1}{\ell} \qquad \text{con} \quad \ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{o} \quad \ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|},$$

dando por supuesto que alguno de estos límites existen (si ambos existen, siempre coinciden). Por otro lado, si $|z| > 1/\ell$ es fácil ver que $|a_n z|^n \to \infty$ y por tanto S diverge.

A $R = 1/\ell$ se le llama *radio de convergencia* porque S converge (absolutamente) en el círculo $|z| < R$, llamado a veces *círculo de convergencia absoluta*, y diverge en $|z| > R$. Lo que ocurre en la propia circunferencia $|z| = R$ depende de cada caso y es, en general, muy difícil de estudiar. Se admiten los casos extremos $R = 0$ y $R = \infty$, provenientes de $\ell = 0$ y $\ell = \infty$, que corresponden a que la serie no converja para ningún $z \neq 0$ o que converja para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por ejemplo, calculemos el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)n^{-1}\big(2^n+1\big)^{-1}z^n$. Se tiene

$$\ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{n\big(2^{n+1}+1\big)}{(n+1)\big(2^n+1\big)} = \lim \frac{2+1/2^n}{(1+1/n)\big(1+1/2^n\big)} = 2,$$

donde en la penúltima igualdad se han dividido numerador y denominador por $n2^n$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1/2$.

En la siguiente sección, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ tendrá cierto protagonismo. Comprobemos que su radio de convergencia corresponde a uno de los casos extremos:

$$\ell = \lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \infty.$$

Es decir, la serie converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

Casi siempre que el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ exista, es más cómodo decidir el radio de convergencia a través del criterio del cociente, pero hay excepciones. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ es una de ellas que también constituye un caso extremo. Se tiene $\ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim n = \infty$. Así pues, $R = 0$ y la serie no converge para ningún valor excepto para $z = 0$.

No entraremos aquí en las dificultades que derivan de que uno puede buscar ejemplos raros en que ni el límite correspondiente al criterio del cociente ni al de la raíz existan (ni sean infinito). Hay una manera de remediarlo que requiere el concepto de *límite superior*, que no se ha tratado en el curso.

Una característica muy importante de las series de potencias es que dentro del radio de convergencia se comportan como “polinomios infinitos”, en el sentido de que se pueden sumar, restar, multiplicar, componer, derivar e integrar de la manera esperada, preservando la convergencia.

Por ejemplo, consideremos $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/\sqrt{n}$ cuyo radio de convergencia es $R = 1$ porque $\lim \sqrt{n}/\sqrt{n+1} = 1$. Por tanto, tiene sentido su definición en $|z| < 1$ y allí su derivada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, z^{n-1}$ que también puede escribirse como $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, z^n$.

6.2. Series de Taylor

Algunos polinomios de Taylor alrededor del origen cumplen que cuando el grado crece indefinidamente, el error en la segunda versión del teorema de Taylor tiende a cero. En esa situación, se establece una identidad entre la función y la serie de potencias que surge como límite de los polinomios de Taylor, llamada *serie de Taylor*. Por ejemplo, para $f(x) = e^x$ sabíamos que $T_n(f, 0) = 1 + x/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$ y se tiene

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo x debido a que el error, dado por $e^{\xi} x^{n+1}/(n+1)!$, tiende a cero, aunque no lo comprobaremos.

En realidad, hay un bello teorema, fuera del ámbito del curso, que afirma que para funciones que sean derivables al considerar su variable compleja, no es necesario entrar en consideraciones sobre el error, siempre la serie de Taylor coincide con la función en el círculo de convergencia absoluta.

Para el seno y del coseno también hay series de Taylor que convergen a estas funciones. Concretamente,

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Los polinomios de Taylor alrededor del origen de estas funciones son fáciles de hallar con lo que sabemos. Lo único que hemos hecho es poner un número arbitrariamente grande de términos. Supongamos ahora que deseamos calcular un polinomio de Taylor, por ejemplo $T_{10}(f,0)$, para $f(x) = e^{x^2}$. Esto conllevaría bastantes cálculos porque no parece haber una manera sencilla de derivar hasta diez veces esta función. Sin embargo, por lo dicho anteriormente, es lícito componer las series de potencias y así, sustituyendo x^2 en e^x, se tiene $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/n!$. Truncando esta serie de Taylor, que es una especie de polinomio de Taylor infinito, obtenemos los de todos los grados, en particular,

$$T_{10}(f,0) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!}.$$

Veamos otro ejemplo. Por la suma de una progresión geométrica o por Taylor, sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

El rango es consistente con que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sea 1. Componiendo con $-x^2$ e integrando entre 0 y x se obtiene

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \big(1-x^2+x^4-x^6+\dots\big)\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

De nuevo, calcular $T_n(f,0)$ de $f(x) = \arctan x$ mediante la definición parece trabajoso porque no es evidente una fórmula para $f^{(n)}$, aunque realmente existe. Por otro lado, integrando sin componer, obtendríamos la serie de Taylor para $-\log(1-x)$.

Para terminar, solo por si tienes curiosidad, estudiemos dos cabos sueltos teóricos que habían quedado en el curso y que tienen que ver con la serie de Taylor de e^x. El primero es la misteriosa fórmula $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Si definimos e^z para $z \in \mathbb{C}$ por su serie, esto es, como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, que tiene radio de convergencia ∞, y hacemos lo mismo con $\mathrm{sen}\,z$ y $\cos z$ entonces es fácil ver que $e^{i\alpha}$ da lo mismo que $\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$. El segundo cabo suelto es la prueba de que la derivada de e^x sea ella misma. De nuevo, definiendo e^x por su serie y sabiendo que las series de potencias se pueden derivar término a término, $(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}/n! = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/(n-1)! = e^x$. El hecho de que al derivar el rango de n empiece en $n=1$ refleja que el término independiente desaparece.

6.3. *Ejercicios propuestos*

1) Calcula el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(7+3in+2^n)z^n$.

2) Calcula el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}z^n$.

3) Calcula el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+7}{n+5}\right)^{n^2+3} z^n$.

4) Sea $f(z)=e^z$. Comprueba que $z\big(zf'(z)\big)'$ es igual a la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^n$ y utilízalo para mostrar $(z^2+z)e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}z^n$.

5) Halla el desarrollo de Taylor en cero de $f(x)=(4-x^2)^{-1}$ y calcula su radio de convergencia.

6) Considera $f(x)=\log\frac{1-x^3}{1+x^3}$. Usando las propiedades del logaritmo, halla el desarrollo de Taylor en cero de $f(x)$.

Apéndice A

Exámenes resueltos

Originalmente había varios modelos de exámenes muy similares. Aquí solo se incluye uno de cada. Para más información, consúltense en `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/` las páginas de los cursos correspondientes.

A.1. Primer parcial del curso 2022/2023

1) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ converge.

Sean $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ y $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)!}{(2n)!+2} = \lim \frac{1}{1+2/(2n)!} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim \frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

2) [3.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{7/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{7/x}+1}$. Calcula los límites laterales en cero y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{7/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{7/x}+1} = \frac{0\cdot 1 - 0}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{7/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{7/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{7/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{-6/x}}{1+e^{-7/x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x=0$. Para el resto de los valores, g es una función elemental bien definida (no hay denominadores que se anulen, la exponencial es siempre positiva) y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Si a_n cumple $\lim a_n^2 = 2$ entonces existe $\lim a_n$ y es $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.

V. ☐ F. ■ El número $2^{2022}\left(\dfrac{i-2}{1-i}\right)^{2022} + (i-3)^{2022} + (1+i)^{2023}$ es real.

Falso en ambos casos. En el primero un contraejemplo es $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$. No existe $\lim a_n$ pero $\lim a_n^2 = 2$. En el segundo, dividiendo, $(i-2)/(1-i) = (-3-i)/2$, entonces la suma de los dos primeros términos es real (un número complejo más su conjugado). Por otro lado, el último término es $(1+i)^{2023} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{2023}$ que no está en $\mathbb{R}$ porque 4 no divide a 2023.

A.2. Segundo parcial del curso 2022/2023

1) [3.5 puntos] Dada la función $f(x) = 5(x-2)e^x + 5 + \sqrt{4+8x^2}$, calcula $f'(0)$ y $f''(0)$ y escribe $T_2(f,0)(x)$, el polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$.

La función es $f(x) = 5(x-2)e^x + 5 + 2(1+2x^2)^{1/2}$.
Por la derivada de un producto y la regla de la cadena,

$$f'(x) = 5e^x + 5(x-2)e^x + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+2x^2)^{-1/2}4x = 5(x-1)e^x + 4x(1+2x^2)^{-1/2}.$$

Derivando los dos productos,

$$f''(x) = 5e^x + 5(x-1)e^x + 4(1+2x^2)^{-1/2} - 2x(1+2x^2)^{-3/2}4x.$$

Así pues, $f(0)=-3$, $f'(0)=-5$ y $f''(0)=4$. Por tanto,

$$T_2(f,0)(x) = -3 - \frac{5}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 = -3 - 5x + 2x^2.$$

Observación: Utilizando $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ y $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \dots$, donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior, con los métodos del último capítulo se llega a la solución con muy pocos cálculos.

---

2) [3.5 puntos] Halla el área bajo la gráfica de $f(x) = \big(7+\sqrt{x}\big)^{-1}$ y sobre el eje x en el intervalo $[0,4]$.

La función es obviamente positiva, entonces tenemos que calcular su integral entre 0 y 4. Para ello, el cambio más natural es $x=t^2$ que da lugar a $dx = 2t\,dt$ y corresponde a $t=\sqrt{x}$. Con esto,

$$A = \int_0^4 \frac{dx}{7+\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{2t\,dt}{7+t} = 2\int_0^2 \Big(1 - \frac{7}{7+t}\Big)\,dt$$

porque $t/(7+t) = 1 - 7/(7+t)$. La última integral es inmediata:

$$A = 2\big(t - 7\log|7+t|\big)\Big|_0^2 = 4 - 14\log 9 + 14\log 7.$$

Observación: El cambio $t = 7+\sqrt{x}$ es menos obvio, pero lleva algo más rápido a la solución.

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)(4^n+5^n)^{-1}z^n$ es 5.

V. ■ F. □ El mínimo valor que alcanza $f(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)| + \frac{1}{2}x$ en $[-2,4]$ es -1.

El radio de convergencia es el inverso de $\lim |a_n|^{1/n}$. Como $|2+3i|^{1/n} \to |2+3i|^0 = 1$, el límite es $\lim(4^n+5^n)^{-1/n} = 5^{-1}\lim\big((4/5)^n+1\big)^{-1/n} = 5^{-1}$ porque $(4/5)^n \to 0$. En el segundo apartado, $f(x) \ge \frac{1}{2}x$, porque el valor absoluto es siempre no negativo. Entonces se tiene $f(x) \ge \frac{1}{2}(-2) = -1 = f(-2)$.

A.3. Final ordinario del curso 2022/2023

1) [1.5 puntos] Calcula el valor exacto de $(1+i)^9 + (1-i)^9$.

El módulo de $1+i$ es $\sqrt{2}$ y su argumento $\pi/4$, por tanto

$$(1+i)^9 = \big(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\big)^9 = 2^{9/2}e^{9i\pi/4} = 2^{9/2}\Big(\cos\frac{9\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}\Big) = 2^{9/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big).$$

Como $(1-i)^9$ es el conjugado de $(1+i)^9$, las partes imaginarias se cancelan al sumar y resulta

$$\frac{2^{9/2}}{\sqrt{2}} + \frac{2^{9/2}}{\sqrt{2}} = 2^4 + 2^4 = 32.$$

---

2) [1.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!+1}$ converge.

Sean $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+1}$ y $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)!}{(2n)!+1} = \lim \frac{1}{1+1/(2n)!} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim \frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

---

3) [1.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{1/x} - e^{4/x}\cos x}{e^{4/x}+1}$. Calcula $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua en $x = 0$.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x} - e^{4/x}\cos x}{e^{4/x}+1} = \frac{0 - 0\cdot 1}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{4/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{4/x}\cos x}{e^{4/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-3/x} - \cos x}{1 + e^{-4/x}} = \frac{0-1}{1+0} = -1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(-\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x = 0$.

---

4) [1.5 puntos] Halla la derivada de $f(x) = (2x+1)^{\cos(2x)}$.

Se tiene $f(x) = e^{\cos(2x)\log(2x+1)}$ porque $2x+1 = e^{\log(2x+1)}$. Esto es una composición de e^x, cuya derivada es ella misma, y de la función que aparece en el exponente, que se deriva como un producto. Por la regla de la cadena,

$$f'(x) = e^{\cos(2x)\log(2x+1)}\Big(-2\operatorname{sen}(2x)\log(2x+1) + \frac{2}{2x+1}\cos(2x)\Big).$$

---

5) [1.5 puntos] Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)e^x\,dx$.

Tomando como partes $u = x^2-1$, $dv = e^x, dx$, correspondientes a $du = 2x\,dx$, $v = e^x$, se tiene que la integral del enunciado es

$$(x^2-1)e^x\Big|_0^1 - I = 1 - I \qquad \text{con} \quad I = \int_0^1 2xe^x\,dx.$$

Una nueva integración por partes eligiendo $u = 2x$, $dv = e^x\,dx$, con $du = 2\,dx$, $v = e^x$, lleva a

$$I = 2xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx = 2e - \big(2e^x\big)\Big|_0^1 = 2.$$

En definitiva, la solución es $1 - I = 1 - 2 = -1$.

---

6) [1.25 puntos por acierto, -0.75 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ El coeficiente de x^4 en el desarrollo de Taylor de $f(x) = \log(1-2x)$ alrededor del origen es -4.

V. Integrando y cambiando el signo en $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (suma de una progresión geométrica), se obtiene $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$ (visto en clase). Sustituyendo x por $2x$, el coeficiente de x^4 es $-2^4/4 = -4$.

V. ■ F. □ El conjunto dado por la imagen de $f(x) = \big(1 - e^{-x^2}\big)\cos(x^2)$ tiene supremo, pero no máximo.

V. El conjunto está acotado por 1 porque $0 \le 1 - e^{-x^2} < 1$ y $-1 \le \cos(x^2) \le 1$. En particular tiene supremo y de hecho es 1 porque $f\big(\sqrt{2\pi n}\big) \to 1$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \to +\infty$. No es máximo porque $f(x) = 1$ es imposible ya que $1 - e^{-x^2} < 1$ y, consecuentemente, $f(x) < 1$.

A.4. Final extraordinario del curso 2022/2023

1) [1.5 puntos] Calcula el valor exacto de $(i-1)^8 + (1-i)^8$.

El módulo de $1-i$ es $\sqrt{2}$ y su argumento $-\pi/4$, por tanto $(1-i)^8 = \big(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\big)^8 = 2^{8/2}e^{-2\pi i} = 2^4 = 16$. Por otro lado, $(i-1)^8 = (-1)^8(1-i)^8 = (1-i)^8$. Así pues, la expresión del enunciado es $2 \cdot 16 = 32$.

---

2) [1.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}$ converge.

Aplicamos el criterio del cociente con $a_n = \frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}$. Usando la definición del factorial, $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ y $(n+1)! = (n+1)n!$, por tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{5^{n+1}\big((n+1)!\big)^2 a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{5 \cdot 5^n (n+1)^2 (n!)^2 a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{5(n+1)}.$$

Tomando límites,

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{4n+2}{5n+5} = \lim \frac{4+2/n}{5+5/n} = \frac{4}{5}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque el resultado del límite es menor que 1.

---

3) [1.5 puntos] Estudia razonadamente la continuidad de la siguiente función en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ \left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1/(x-1)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Las funciones que definen f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ son continuas en ellos, por ser funciones elementales sin singularidades. Por consiguiente, para deducir que f es continua en todo $\mathbb{R}$ hay que comprobar que los límites laterales en $x = 0$ y $x = 1$ (situados en las fronteras de estos intervalos) existen y coinciden con el valor de la función.

En $x=0$, por la segunda definición, $f(0)=0$. Por otro lado, la primera y la tercera implican

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}\Big)^2 = \Big(\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}\Big)^2 \underset{\text{L'H}}{=} \Big(\lim_{x\to 0^-}\frac{2x\cos(x^2)}{1}\Big)^2 = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = 0$$

porque $-1/x^2 \to -\infty$. Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y f es continua en $x=0$.

En $x=1$, la tercera definición asegura $f(1)=e^{-1}$ y también trivialmente $\lim_{x\to 1^-} f(x) = e^{-1}$, ya que no hay indeterminación. Queda calcular el límite por la derecha con la cuarta definición. Utilizamos la fórmula $\lim g(x)^{h(x)} = e^{\lim \big(g(x)-1\big)h(x)}$ válida para indeterminaciones del tipo 1^∞, que es nuestro caso:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{x+1}{3x-1}\Big)^{1/(x-1)} = e^{\lim_{x\to 1^+}\big(\frac{x+1}{3x-1}-1\big)\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x+2}{(3x-1)(x-1)}} = e^{-1}$$

donde en el último paso basta simplificar $x-1$ y sustituir $x=1$. Entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1} = f(1)$ y f también es continua en $x=1$.

---

4) [1 punto] Halla la derivada de $f(x) = e^{2\log(x-23)}$ en $x=2023$ tratando de simplificar el resultado lo más posible.

Simplificando f antes de derivar, $f(x) = \big(e^{\log(x-23)}\big)^2 = (x-23)^2$ porque la exponencial y el logaritmo son funciones inversas una de la otra. La derivada es $f'(x) = 2(x-23)$ y sustituyendo, $f'(2023) = 2(2023-23) = 4000$.

---

5) [1.5 puntos] Calcula el área limitada entre la gráfica de $f(x) = (1-x^2)e^x$ y el intervalo $[-1,1]$ del eje X.

Claramente la función es mayor o igual que cero en el intervalo indicado, por tanto el área es $A = \int_{-1}^1 (1-x^2)e^x\,dx$. Tomando como partes $u = 1-x^2$, $dv = e^x, dx$, correspondientes a $du = -2x\,dx$, $v = e^x$, se obtiene

$$A = (1-x^2)e^x\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-2x)e^x\,dx = \int_{-1}^1 2xe^x\,dx.$$

Una nueva integración por partes, eligiendo $u=2x$, $dv = e^x\,dx$, implica

$$A = 2xe^x\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x\,dx = \big(2xe^x - 2e^x\big)\Big|_{-1}^1 = (2e-2e) - \big(-2e^{-1}-2e^{-1}\big),$$

por tanto el área buscada es $A = 4e^{-1}$.

---

6) [1 punto por acierto, -0.5 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ Toda función que satisface $0 \le f(x) \le x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ cumple $f'(0) = 0$.

V. Para $x = 0$ se sigue $f(0) = 0$. Por la definición de derivada, $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ y, según la hipótesis, $0 \le |f(h)/h| \le |h|$. Por tanto, el límite es nulo.

V. ■ F. □ El coeficiente de x^8 en el desarrollo de Taylor de $f(x) = \log\left(1+2x^2\right)$ alrededor del origen es -4.

V. Integrando en $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ (suma de una progresión geométrica), se obtiene $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$, que se vio en clase. Cambiando x por $2x^2$, el coeficiente de x^8 es $-2^4/4 = -4$.

V. □ F. ■ Toda sucesión positiva acotada superiormente por 1 es convergente.

F. Por ejemplo $a_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{4}$ explícitamente es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ y no converge ya que oscila entre dos valores.

A.5. Primer parcial del curso 2023/2024

1) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 2}{n! + 2}$ converge.

Definiendo $a_n = \frac{6^n-2}{n!+2}$ y $b_n = \frac{6^n}{n!}$ se tiene

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{6^n - 2}{6^n} \cdot \frac{n!}{n!+2} = \lim \frac{1 - 2/6^n}{1} \cdot \frac{1}{1 + 2/n!} = 1.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Aplicando el criterio del cociente a esta última:

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{6^{n+1}/(n+1)!}{6^n/n!} = \lim 6 \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{6}{n+1} = 0 < 1.$$

Por tanto converge.

---

2) [3.5 puntos] Halla todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{2x-5}{x+15}\right| < \dfrac{1}{3}$.

Para $x = -15$ el primer miembro no tiene sentido y para el resto, la desigualdad equivale a $6|s_1| < |s_2|$ con $s_1 = x - 5/2$ y $s_2 = x + 15$. Para $x \neq -15$ distinguimos tres casos:

a) $\boxed{x < -15}$. Se cumple $s_1, s_2 < 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(5/2 - x) < -x - 15 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 + 15 < 5x$ que contradice $x < -15$.

b) $\boxed{-15 < x \leq 5/2}$. Se cumple $s_1 \leq 0$, $s_2 > 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(5/2 - x) < x + 15 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 - 15 < 7x \Leftrightarrow x > 0$ y se obtiene $(0, 5/2]$.

c) $\boxed{x > 5/2}$. Se cumple $s_1, s_2 \geq 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(x - 5/2) < x + 15 \Leftrightarrow 5x < 3 \cdot 5 + 15 \Leftrightarrow x < 6$ y se obtiene $(5/2, 6)$.

En total:

$$\Big(0, \frac{5}{2}\Big] \cup \Big(\frac{5}{2}, 6\Big) = (0, 6).$$

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ Existe alguna a_n divergente tal que $a_n < 2$ y $\sup\{a_n\} = 2$.

Por ejemplo, $a_n = 2(-1)^n - \frac{1}{n}$. Claramente, $a_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$. Se tiene $\sup\{a_n\} = 2$ porque $a_{2n} = 2 - \frac{1}{2n} \to 2$. No converge porque alterna valores negativos y positivos que se aproximan a -2 y 2.

V. ■ F. □ El número $\dfrac{(1+i)^{14}}{2^7} + \dfrac{11+7i}{3+i}$ es entero.

El primer sumando es $\big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\big)^{14} = \big(e^{i\pi/4}\big)^{14} = e^{7i\pi/2} = e^{4\pi i - i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$ y el segundo es $\frac{11+7i}{3+i} = \frac{(11+7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{33-11i+21i+7}{10} = \frac{40+10i}{10} = 4 + i$. La suma resulta 4.

A.6. Segundo parcial del curso 2023/2024

1) [3.5 puntos] Dadas las funciones $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 6x + 3$, halla el área limitada entre sus gráficas.

Ambas funciones representan parábolas, la primera con las ramas hacia abajo (por el signo negativo de x^2) y la segunda con las ramas hacia arriba. Estudiemos dónde se cortan:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ 2.$$

Por la mencionada interpretación geométrica, la primera gráfica debe quedar por encima en el intervalo $[0, 2]$. Así pues, el área buscada es

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^2 \big(-3x^2 + 6x\big)\,dx = (-x^3 + 3x^2)\big|_0^2 = -8 + 12 = 4.$$

---

2) [3.5 puntos] Considera la función $f(x) = 5(3x+1)\operatorname{sen}\dfrac{x}{3} - 2\log\dfrac{3-x}{3+x}$. Calcula $T_2(f,0)$, esto es, su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

Usando las propiedades de los logaritmos, se tiene $f(x) = 5f_1(x) - 2f_2(x)$ con

$$f_1(x) = (3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \log(3-x) - \log(3+x).$$

La derivada de f_1 es $f_1'(x) = 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}(3x+1)\cos\frac{x}{3}$, utilizando la fórmula para derivar productos. Además, $f_2'(x) = -(3-x)^{-1} - (3+x)^{-1} = (x-3)^{-1} - (x+3)^{-1}$. Con ello,

$$f'(0) = 5f_1'(0) - 2f_2'(0) = 5\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{3} = 3.$$

Derivando una vez más, $f_1''(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} - \frac{1}{9}(3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3}$ y $f_2''(x) = -(x-3)^{-2} + (x+3)^{-2}$. Así pues,

$$f''(0) = 5f_1''(0) - 2f_2''(0) = 5\cdot 2 - 2\cdot 0 = 5\cdot 2.$$

Completando estos cálculos con $f(0) = 0$, se obtiene finalmente,

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 3x + 5x^2.$$

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^2}\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt = 1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{2\log x - 1} = \frac{1}{2}.$$

V. ☐ F. ■ La función definida por $f(x) = x^2\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es discontinua (no continua) en el origen.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0$ (L'Hôpital en el primer límite y seno acotado entre -1 y 1 en el segundo). Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua.

A.7. Final ordinario del curso 2023/2024

1) [2 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! + 2024}{(n!)^2}$ converge.

Las sucesiones $a_n = \frac{(2n)!+2024}{(n!)^2}$ y $b_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$ satisfacen

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)! + 2024}{(2n)!} = \lim \Big(1 + \frac{2024}{(2n)!}\Big) = 1 + 0 = 1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter (criterio de comparación). Se cumple $b_n \ge 1$ porque b_n es un número combinatorio, entonces $\lim b_n$ no es nulo y la serie diverge.

[También se puede aplicar el criterio del cociente comprobando $\lim(b_{n+1}/b_n) = 4 > 1$.]

---

2) [2 puntos] Calcula el valor exacto de $\displaystyle\frac{10}{1+3i} + \frac{8i+1}{2+3i} + \frac{1}{16}(1+i)^{10}$.

Calculemos cada sumando. El primero y el segundo son divisiones de números complejos que se efectúan convirtiendo su denominador en real multiplicando por el conjugado:

$$\frac{10}{1+3i} = \frac{10(1-3i)}{1^2+3^2} = 1 - 3i \quad \text{y} \quad \frac{8i+1}{2+3i} = \frac{(8i+1)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{16i + 24 + 2 - 3i}{13} = 2 + i.$$

En el último sumando empleamos $1 + i = re^{i\alpha}$ con $r = |1+i| = \sqrt{2}$ y $\alpha = \pi/4$ para obtener

$$\frac{1}{16}(1+i)^{10} = \frac{2^5 e^{5i\pi/2}}{16} = 2\, e^{2\pi i + \pi i/2} = 2\, e^{\pi i/2} = 2i.$$

Sumando los tres resultados, se concluye que la solución es $(1-3i) + (2+i) + 2i = 3$.

---

3) [0.5 puntos por acierto, -0.25 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. $\square$ F. $\blacksquare$ Si a_n converge y $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1$ entonces $\lim a_n = 1$.

No se cumple en general. Por ejemplo, $a_n = 1/n$ satisface $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1$ (porque $a_1 = 1$ y es decreciente) y $\lim a_n = 0$.

V. $\square$ F. $\blacksquare$ Toda sucesión acotada es convergente.

No se cumple en general. Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$ está acotada ($-1 \le a_n \le 1$) y no converge porque oscila entre dos valores.

---

4) [2 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{-4/x}\cos x - e^{-1/x}}{e^{-4/x}+1}$. Estudia si la función definida por $g(x) = \big(2f(x)-1\big)^2$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 1$ es continua en $x = 0$.

Se cumple $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ si $x \to 0^+$ y $1/x \to -\infty$ si $x \to 0^-$. Con ello se calculan los límites laterales de f:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\big(e^{-1/x}\big)^4\cos x - e^{-1/x}}{\big(e^{-1/x}\big)^4 + 1} = \frac{0^4\cdot 1 - 0}{0^4+1} = 0$$

y, multiplicando numerador y denominador por $e^{4/x}$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - e^{3/x}}{1+e^{4/x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - \big(e^{1/x}\big)^3}{1+\big(e^{1/x}\big)^4} = \frac{1-0^3}{1+0^4} = 1.$$

De aquí se deduce $\lim_{x\to 0^+} g(x) = (2\cdot 0 - 1)^2 = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x) = (2\cdot 1 - 1)^2 = 1$. Entonces $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ y como este valor coincide con $g(0)$, es continua en $x = 0$.

---

5) [2 puntos] Calcula la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^{1+\operatorname{sen}(x-1)}$ en $x = 1$.

La fórmula para la recta tangente asegura que la recta buscada es

$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

Obviamente, $f(1) = 1^1 = 1$. Por otro lado, $f(x) = e^{\left(1+\operatorname{sen}(x-1)\right)\log x}$, porque $e^{\log x} = x$, y la derivada es, usando la regla de la cadena y la derivada de un producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\left(1+\operatorname{sen}(x-1)\right)\log x}\big(\log x + \operatorname{sen}(x-1)\log x\big)' \\ &= x^{1+\operatorname{sen}(x-1)}\Big(\frac{1}{x} + \cos(x-1)\log x + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}\Big). \end{aligned}$$

Utilizando $\log 1 = \operatorname{sen} 0 = 0$ se obtiene $f'(1) = 1^1(1+0) = 1$. Sustituyendo en la fórmula se sigue finalmente que la ecuación de la recta tangente es $y = x$.

---

6) [0.5 puntos por acierto, -0.25 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2}\int_2^x \frac{t}{\log t}\,dt = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_2^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{2\log x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-1/\log x} = \frac{1}{2}.$$

V. ☐ F. ■ El valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$ es $e-1$.

Tomando como partes $u = x$ y $dv = e^x\,dx$ con $v = e^x$, se obtiene que la integral del enunciado es igual a $xe^x\big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (xe^x - e^x)\big|_0^1 = 0 - (-1) = 1$.

Índice alfabético