Un problema del *Calculus* de Spivak

Fernando Chamizo

12 de junio de 2017

1. Un pequeño tributo

Cuando yo era un tierno infante de primero de la licenciatura de matemáticas, el ayudante de problemas de Cálculo I, a la sazón Jesús García Azorero, nos aconsejó que compráramos el texto oficial de la asignatura, el *Calculus* de Spivak [Spi84], porque, según nos dijo, era un libro que íbamos a mirar incluso cuando estuviéramos en quinto[1]. En mi caso su predicción se quedó corta, porque lo seguí consultando con cierta frecuencia durante el doctorado, e incluso, entre la broma y la devoción, tuve expuesta tras mi mesa la imagen fotocopiada de [Hal87] de un Spivak atlético y desaliñado.

Para mí el *Calculus* tuvo una influencia decisiva y me abrió los ojos al rigor matemático del análisis. Durante mucho tiempo opiné que era el mejor libro de texto de matemáticas que conocía y si no lo hago ahora quizá sea porque ya ha pasado tanto tiempo que no soy capaz de juzgar desde la perspectiva de un estudiante. A propósito de esto, el libro resultaba duro para algunos de mis compañeros porque no contenía demasiados ejercicios de cálculos rutinarios para desarrollar cierta destreza. Es opinable si aquello hubiera mejorado el texto, el hecho es que yo disfruté mucho con la selección de problemas, a mi juicio lo mejor del libro, la mayor parte de ellos "de pensar".

Todavía hoy, con poca frecuencia aunque superando con creces la previsión del entonces ayudante de problemas, miro alguna cosa en mi ejemplar de [Spi84]. La última, relacionadas con las dudas de un estudiante de doctorado, me han llevado a escribir esta nota. Muchas gracias, profesor Spivak.

2. El problema 13-29

Dentro del primer capítulo de [Spi84] dedicado a integrales, el capítulo trece, aparece el problema que copio íntegro a continuación. Para ser lo más fiel posible a la intención del autor, utilizo la versión original en inglés [Spi67].

[1] En aquellos tiempos remotos la licenciatura de matemáticas tenía cinco cursos.

The result of the next problem, which I have cribbed from several older calculus texts, is called the Third Mean Value Theorem for Integrals. To be frank, I haven't the slightest idea what it is good for.

***29.** *(a) Suppose that g is increasing on $[a,b]$ and that f is integrable on $[a,b]$. Prove that there is a number ξ in $[a,b]$ such that*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)\int_a^\xi f(t)\,dt + g(b)\int_\xi^b f(t)\,dt.$$

Hint: What is the value of the right side for $\xi = a$ and $\xi = b$?

(b) Show that the hypothesis on g is esential. (Try $g(a) = g(b) = 0$.)

Es importante notar que en este capítulo todavía no se ha visto siquiera el teorema fundamental del cálculo, las armas de que uno dispone no van más allá de la definición de la integral con sumas de Riemann. Por supuesto el segundo apartado es muy fácil. También está claro que "creciente" se puede cambiar por "monótona" ya que la fórmula es invariante al cambiar g por $-g$. Los problemas con un asterisco del *Calculus* son más complicados pero factibles mientras que los de dos asteriscos pueden poner en aprietos incluso a estudiantes buenos. Para un matemático profesional, esto con un solo asterisco debería ser "fácil". ¿Se atreve el lector a intentarlo? Permitámonos hacer trampas, utilizando todo lo que sabemos, aunque vaya mucho más allá del contenido de ese primer capítulo de integración. Cuesta un rato resolverlo, ¿verdad? Al menos es lo que me ha ocurrido a mí.

Hay algo sospechoso en la pista que se da. Tiene toda la pinta de que el autor está sugiriendo que el lado izquierdo cae siempre en el intervalo determinado por $g(a)\int_a^b f$ y $g(b)\int_a^b f$. Tal cosa es radicalmente falsa porque si $\int_a^b f$ fuera cero implicaría que el primer miembro se anula necesariamente, lo cual no tiene sentido. Si el lector no ha intentado resolver el problema todavía, con esta pequeña ayuda de que la pista en realidad despista, tiene una segunda oportunidad.

Si nos hemos rendido, afortunadamente hay un libro de soluciones [Spi98]. Desafortunadamente, confirma nuestras sospechas. Allí se resuelve utilizando justo la afirmación falsa que sugiere la indicación. Con lo dicho, es fácil sospechar el origen del error a partir de los propios comentarios de Spivak y del enunciado del problema anterior (no reproducido aquí) al que llama, sin respetar la nomenclatura habitual, *segundo teorema del valor medio para las integrales*[2]. Dicho problema es una simple consecuencia del teorema del valor medio e incluye $f \geq 0$ entre sus hipótesis. Posiblemente, al revisar "libros más antiguos de cálculo" Spivak encontró el problema 29 sin percatarse de que no requería esta hipótesis, la cual se supone implícitamente en el libro de soluciones. El resultado es un problema fuera del alcance de los contenidos del capítulo, con una indicación inapropiada. Para ese lector que no lo ha intentado, ésta es la última llamada para que se embarque en tratar de resolverlo con su enunciado original.

[2]Es más común aplicar este nombre al problema 29 o al corolario que se indica más adelante cuando $g \geq 0$.

3. Una solución

Consideremos $F(x) = \int_x^b f$. Por el teorema fundamental del cálculo (todavía no introducido en el capítulo 13), si f es continua, $F'(x) = -f(x)$, integrando por partes (también desconocido en este capítulo) y suponiendo g con derivada continua, se deduce

$$\int_a^b f(t)\big(g(t) - g(a)\big)\, dt = \int_a^b F(t) g'(t)\, dt.$$

Si M y m son el máximo y el mínimo de F en $[a, b]$, como $g' \geq 0$, por ser creciente,

$$\big(g(b) - g(a)\big)m = m \int_a^b g'(t)\, dt \leq \int_a^b F(t) g'(t)\, dt \leq M \int_a^b g'(t)\, dt = \big(g(b) - g(a)\big)M.$$

Entonces el teorema del valor medio implica que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)\big(g(t) - g(a)\big)\, dt = \big(g(b) - g(a)\big) \int_\xi^b f(t)\, dt.$$

Despejando $\int_a^b f(t)g(t)\, dt$ y operando un poco, se obtiene la fórmula requerida en el problema.

Dicho sea de paso, tomando como punto de partida $\int_a^b fg = g(a)F(a) + \int_a^b Fg'$, el mismo argumento con la hipótesis adicional $g \geq 0$ lleva a

$$\int_a^b fg = g(b) \int_\xi^b f \qquad \text{para cierto } \xi \in [a, b].$$

Quedan dos flecos por tratar y son nuestras suposiciones de que f es continua y de que g tiene una derivada continua.

Una manera de resolver estos problemas, extendiendo además el enunciado al caso de la integral de Lebesgue, es percatarse de que existe una sucesión de funciones escalonadas monótonas g_n tales que $\|g - g_n\|_\infty \to 0$. En cada escalón, g_n es constante y entonces la fórmula de integración por partes se convierte en algo trivial. Como los extremos de los escalones no son en general a y b, los términos de frontera adquieren protagonismo en forma de un número finito de incrementos de g que de alguna forma reemplazan a la quizá no definida g'. Éste es el método empleado en el antiguo artículo [Hob09].

Volviendo a tiempos más recientes, en la segunda edición del *Calculus* [Spi90] vemos subsanado el defecto de proponer el problema original en un contexto en que es inasequible. En dicha edición pasa a formar parte del capítulo de “Integración en términos elementales” como problema 47 y se propone bajo las hipótesis de f continua y g con derivada continua. Después se indica que tales hipótesis son prescindibles con “algunos razonamientos de aproximación [. . .] Pero existe una manera más instructiva de hacerlo” y dedica un largo problema 48 a deducirlo a través de lo que llama "fórmula de Abel para la sumación por partes", que es la identidad elemental

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = s_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} s_n (b_n - b_{n+1}) \qquad \text{con} \quad s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Un último apunte es que como las integrales no se ven afectadas por el valor en un punto, no es difícil ver que $g(a)$ y $g(b)$ en el enunciado original podrían reemplazarse por sus límites laterales $g(a^+)$ y $g(b^-)$, los cuales siempre existen por ser g creciente.

4. ¿Y esto para qué sirve?

Una cosa más relativa al problema que varía de la primera a la segunda edición del *Calculus* es que desaparece el comentario en el que confiesa que no sabe para qué sirve tal resultado. La amplia difusión del texto seguro que llevó a que el autor recibiera unas cuantas cartas al respecto.

Una aplicación básica dentro del análisis es el primer lema de van der Corput. En una versión un poco restrictiva, afirma que existe una constante C tal que para cualquier función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con una derivada monótona y estrictamente positiva, se cumple

$$\left| \int_a^b \cos\big(h(x)\big)\, dx \right| \le \frac{C}{\lambda} \qquad \text{donde} \quad \lambda = \inf h'.$$

Para deducirlo del problema 29, basta tomar $f(x) = h'(x)\cos\big(h(x)\big)$ y $g(x) = 1/h'(x)$.

El resultado también es cierto cambiando coseno por seno. De hecho en las aplicaciones, procedentes del análisis de Fourier, suele aparecer más bien la exponencial compleja, que combina ambas funciones trigonométricas. En este caso generalizado, se demuestra en [Rog05] y [CdlT15] que la constante $C = 2$ es óptima.

La importancia del primer lema de van der Corput es que cuantifica el hecho de que las ondas que tienen frecuencias que crecen suficientemente deprisa, tienen integrales pequeñas. Es algo así como una generalización de que la integral de $\cos(\lambda x)$ decae como λ^{-1} en cualquier intervalo. Procediendo inductivamente a partir del primer lema de van der Corput, se prueban extensiones cuando se tiene control sobre derivadas de orden superior [Ste93]. Por ejemplo, si existe h'' y es positiva (no necesariamente monótona), para cierta constante C se cumple

$$\left| \int_a^b \cos\big(h(x)\big)\, dx \right| \le \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \qquad \text{donde} \quad \lambda = \inf h''.$$

La posible anulación de la derivada primera, esto es, la existencia de fases estacionarias en un fenómeno oscilatorio, es lo que cambia el tipo de decaimiento de λ^{-1} a $\lambda^{-1/2}$, como ilustra la *integral de Fresnel*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

Su nombre proviene de que este tipo de integrales aparece en la llamada difracción de Fresnel. En breve, una onda esférica que parte de un punto $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ llega a $\vec{q}$ con una fase del tipo $\cos(k\|\vec{q} - \vec{p}\|)$ con k relacionado con la frecuencia. Si tenemos muchas fuentes aparte de $\vec{p}$, tendremos que integrar en todas ellas. Cuando se aproxima $\|\vec{q} - \vec{p}\|$ por un polinomio de grado dos, aparecen las integrales de Fresnel.

Otro ejemplo, en el que se puede hacer uso del problema 29 es en la aproximación de sumas por integrales. Una variante de la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin, lleva a que para cualesquiera números reales $a < b$

$$\sum_{a<n\le b} h(n) - \int_a^b h = \psi(a)h(a) - \psi(b)h(b) + \int_a^b \psi(t)h'(t)\, dt$$

donde $\psi(t) = t - \lfloor t \rfloor - 1/2$, es decir, la parte fraccionaria menos $1/2$. Si h' no presenta grandes variaciones, uno tendería a pensar que la integral de la derecha es un término de error pequeño. Si h es convexa con $h' \le \lambda$, entonces el problema 29 implica que esta integral en valor absoluto es menor que λ. Pidiendo algo de regularidad esto se sigue simplemente integrando por partes, lo cual es como repetir lo visto en el apartado anterior.

Referencias

[CdlT15] C. A. Catalá de la Torre. A new proof for a sharp van der Corput's lemma. *Amer. Math. Monthly*, 122(2):138–142, 2015.

[Hal87] P. R. Halmos. *I have a photographic memory.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[Hob09] E. W. Hobson. On the second mean-value theorem of the integral calculus. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-7(1):14–23, 1909.

[Rog05] K. M. Rogers. Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(12):3543–3550, 2005.

[Spi67] M. Spivak. *Calculus.* W.A. Benjamin Inc., 1967.

[Spi84] M. Spivak. *Calculus Vol. I, II.* Editorial Reverté, Barcelona, 1984.

[Spi90] M. Spivak. *Calculus.* Editorial Reverté, Barcelona, 1990.

[Spi98] M. Spivak. *Suplemento del Calculus.* Reverté, 1998.

[Ste93] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.