Monótona constante

Los discursos, las relaciones personales, las funciones oscilantes, las clases, los anuncios; todo ello y más se corrompe por el corrosivo efecto de la monotonía. No nos engañemos, a pesar de lo que contamos a los visitantes hay momentos malos en el estudio de las Matemáticas en que todo parece igual, y hace tiempo que no soplo pompas de jabón. Menos mal que tenemos la siempre renovada y fresca Hoja Volante (Carlos, Matías, recordad lo del otro artículo que he mandado) y algunas otras pequeñas alegrías para sacarnos del bajón. Una de ellas la disfruté hace un año mientras releía un trabajo en las actas de un congreso y encontré el delicioso artículo de D. Zagier "From quadratic functions to modular functions". Es un poco extenso y me limitaré a describir poco más de lo que denomina *primera sorpresa*. Como en los chistes, la gracia está en quien los cuenta. Merece la pena ir al original.

Para t real consideremos las funciones parabólicas "hacia abajo" $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$, $a < 0$, con discriminante $b^2 - 4ac = 5$ tales que t esté entre las dos raíces. Por ejemplo, para $t = 0$ sólo hay dos: $p_1(x) = -x^2 + x + 1$ y $p_2(x) = -x^2 - x + 1$, mientras que para $t = 1/3$ un cálculo más extenso lleva a que hay cuatro: las dos anteriores, $p_4(x) = -5x^2 + 5x - 1$ y $p_5(x) = -11x^2 + 7x - 1$. Para números raros como e o π no está claro cómo hallar estas parábolas pero un ordenador podría ir generándolas poco a poco. La primera sorpresa a la que se refiere Zagier es que la función $f(t) = \sum p(t)$ donde la suma es sobre todas estas parábolas está bien definida y es (redoble de tambor) ¡constante e igual a 2! En los primeros ejemplos $p_1(0) + p_2(0) = p_1(1/3) + p_2(1/3) + p_3(1/3) = 2$ mientras que para los números raros el ordenador en un tiempo razonable nos da $1'999\ldots$. Otra sorpresa del artículo de Zagier es que $\sum p^3(t)$ también es idénticamente 2. ¿No es curioso? La invariable función constante fue suficiente para romper la monotonía de mis relecturas. Para el que necesite más acción, $\sum p^5(t)$ es continua pero no tiene 10 derivadas continuas.