El límite del millón de dólares

Fernando Chamizo Lorente

¿Quién dijo que las matemáticas no servían para nada? Pues deberías saber que si logras calcular un límite antes de que se te adelanten, una fundación te dará un millón de dólares (más o menos 930 000 euros al cambio actual). Si estás interesado, sigue leyendo.

Los requisitos. Ya sé que estás ansioso por ver el límite, pero antes debes estar seguro de que lo vas a entender. Hay tres cosas que necesitas saber:

- Divisibilidad. Si has hecho primaria pon un ✓.
- Límites. Estás leyendo algo con este título ¿no? entonces otro ✓ gratis.
- Determinantes. Esto ya requiere conocimientos de bachillerato.

Si no has puesto ✓ en el tercer punto, todavía tienes una oportunidad siguiendo esta explicación: Una *matriz* $n \times n$ es una tabla cuadrada de números de lado n, que se suele representar entre paréntesis. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2017 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 7.2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

son matrices 1×1, 2×2 y 3×3, respectivamente. A los elementos de una matriz A se les suele denotar con a_{ij} donde i indica el número de fila y j el de columna. Por ejemplo, en la segunda matriz $a_{22} = 7.2$ y $a_{21} = 0$. Los elementos a_{ii} se dice que forman la *diagonal principal.* El determinante es un número que se asocia a cada matriz $n \times n$. Se representa habitualmente poniendo la matriz con barras verticales en vez de con paréntesis. Para calcular este número, una receta en tres pasos es: 1) Reordenar las columnas de todas las formas posibles posibles. 2) Calcular el producto de los elementos de la diagonal principal. 3) Operar poniendo un más si en la reordenación se ha hecho un número par (o cero) de intercambios desde la ordenación inicial y un menos si es impar.

Por ejemplo, para una matriz genérica 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xmapsto{1)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} \xmapsto{2),\,3)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En el caso 3×3 la fórmula es $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$. Por si quieres hacer tus comprobaciones, los determinantes de las matrices puestas antes como ejemplo son, respectivamente, 2017, 7.2 y -78.

El límite. Vamos a definir a_{ij} como 1 si $j = 1$ o si i divide a j y pondremos $a_{ij} = 0$ en el resto de los casos, por ejemplo, $a_{24} = 1$, $a_{41} = 1$, $a_{23} = 0$. Con estos elementos formamos una matriz $n \times n$ que llamamos A_n. De esta forma,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En consonancia con lo dicho, designamos sus determinantes con $|A_n|$. Así se tiene $|A_4| = -1$, $|A_5| = -2$ y $|A_6| = -1$. No siempre son negativos, por ejemplo $|A_{221}| = 5$. Su tamaño es moderado, lo más lejos que se llega entre los menores que mil es a $|A_{666}| = -12$ (no hay nada satánico en ello). Tras estos prolegómenos, aquí va el reto:

Si eres el primero en calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n^a} \qquad \textit{para} \quad \frac{1}{2} < a < 1,$$

recibirás un millón de dólares.

Un par de comentarios para no engañar a nadie y para los que vayan a por los premios de consolación. La opinión unánime de los matemáticos es que el límite da cero y se sabe que es así cuando $a \geq 1$. También se sabe que si para algún $1/2 < a < 1$ no fuera cero, $|A_n|/n^a$ no se acercaría a ningún valor y el límite no se podría calcular, entonces está implícito en el enunciado, y es equivalente a él, probar que el límite existe. No te apures, si no te importa lo que piensen los demás y demuestras que alguno de estos límites no existe, los de la fundación parecen dispuestos a pagarte igualmente, aunque no lo dicen del todo claro. En cualquier caso, te aseguraría un lugar destacado en el olimpo de las matemáticas (me refiero a la posteridad, no a un club de chicas graduadas). Lo mismo se aplica si te centras en un a concreto en el rango indicado, como $a = 0.6$, $a = 0.7$ o $a = 0.999$, y consigues calcular que el límite es cero.

¿Quién da dinero por estas cosas? El nombre de la fundación es *Clay Mathematics Institute* y si no tienes ganas de ir a su página web te diré que nació patrocinada por un hombre de negocios, literalmente millonario, apellidado Clay que cree en la importancia de la ciencia y de las matemáticas en particular, a pesar de no ser científico. Por ello dotó con un premio de un millón de dólares a la solución de cada uno de los siete problemas que su fundación denomina *Millennium Problems*. Si quieres saber de qué va cualquiera de estos problemas, ve a la descripción oficial, en otro caso, confórmate con el siguiente sucedáneo poco informativo y opinable:

1. Yang–Mills and Mass Gap. Este problema es para poder decirles a los físicos que el caso más idealizado de lo que llevan haciendo durante décadas al juntar mecánica cuántica y relatividad

(teoría cuántica de campos) tiene sentido y además goza de cierta propiedad. Si a esto añadimos que el problema pregunta en parte por si alguna teoría tiene sentido y además pide variar las simetrías físicas, seguramente tendrá muchos más “fans” en el lado matemático.

2. Riemann Hypothesis. Si lees la descripción no te creerás que es equivalente a lo del límite anterior. Para eso tienes la parte “pro” de esta nota. El enunciado original es que los valores en los que se anula cierta función en el plano están en fila india y esto está relacionado con que los primos no sean muy caóticos.

3. P vs NP Problem. En pocas palabras es preguntarse si todo lo fácil de comprobar con algoritmos es también fácil de hacer con algoritmos. Está emparentado con la computación y la lógica.

4. Navier–Stokes Equation. Otro problema que suena a física y que seguramente le importa poco a la mayor parte de los físicos. Los fluidos a nivel macroscópico siguen una ecuación cuyas soluciones en función de espacio y tiempo puede aproximar un ordenador. Matemáticamente no se sabe si tales soluciones pueden colapsar. Te dan el millón de dólares tanto por probar que eso no ocurre o por encontrar una solución que colapse al cabo del tiempo. Incluso en ese caso, no dejará de salir el agua por tu grifo (si pagas la factura) porque la ecuación tiene sus escalas de aproximación en la práctica.

5. Hodge Conjecture. Si te enteras, por favor cuéntamelo. Es quizá el problema más abstracto de todos. Más o menos va de que si tienes un objeto geométrico definido por ecuaciones polinómicas de las de toda la vida, entonces ciertos objetos que están relacionados con su forma también derivan de ecuaciones polinómicas.

6. Poincaré Conjecture. Si pones una goma de pelo en el ecuador una superficie esférica siempre se puede encoger a un punto pero si la pusieras en un meridiano de una rosquilla no. Se sabe que siempre que en una superficie cerrada puedas encoger todas las gomas de pelo, hinchando la superficie obtienes una superficie esférica. Este problema pregunta lo mismo en más dimensiones. Es el único problema resuelto por ahora. La solución es de G. Perelman quien rechazó el premio y parece estar desempleado. Ya sé que estás pensando lo que se dice de los matemáticos. . .

7. Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture. El enunciado técnico es complicado pero la esencia es contable en palabras sencillas. Hay que considerar una ecuación cúbica genérica con dos incógnitas, como $x^3 + 2y^3 - x - 1 = 0$, y estudiar los valores enteros que dan en vez de cero un múltiplo de un primo p. Se cree que si hay “muchas” cuando p varía, entonces la ecuación original tiene “muchas” soluciones con fracciones y lo mismo ocurre cuando hay “pocas”.

¿No estás nada satisfecho con estas explicaciones? ¿Tampoco entiendes ni jota de las descripciones oficiales? Si todavía tienes interés y quieres saber más a un nivel básico, ponte en manos de un buen profesional de la divulgación leyendo [Ste14].

`Cortar por aquí si no eres` *pro* `(fesional): nivel universitario de matemáticas`

`- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -`

Möbius, Mertens y el determinante. Una función aritmética rara que desempeña un papel fundamental al estudiar la distribución de los primos es la *función de Möbius*

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ con } p_j \text{ primos distintos,} \\ 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Una propiedad importante es que al sumarla sobre los divisores de un número mayor que uno, resulta cero

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1, \\ 1 & \text{si } n = 1. \end{cases} \tag{1}$$

La prueba no es complicada: un buen ejercicio para el lector aficionado o semiprofesional.

Definamos d_{ij} como 1 si i divide a j y cero si no lo divide y llamemos D_n a la matriz $n \times n$ formada por los d_{ij}. Su matriz inversa U_n tiene como elementos $u_{ij} = \mu(j/i)$ si i divide a j y cero en otro caso. Para demostrarlo, nota que el elemento ik del producto $U_n D_n$ es $\sum_{j|k} u_{ij}$ que es cero si $i \nmid k$, mientras que es fácil ver que coincide con (1) para $n = k/i$, por tanto, $U_n D_n$ es la identidad.

Está claro que $|D_n| = |U_n| = 1$ (triangular con diagonal de unos) y siguiendo [BFP88] (en vez del original [Red77]), de $|A_n| = |D_n||I_n + U_n(A_n - D_n)|$ se obtiene una relación de A_n con la función de Möbius. Para ser original y presumir, usaré en su lugar la poco famosa fórmula $|M + \vec{u}\vec{v}^t| = (1 + \vec{v}^t M^{-1} \vec{u})|M|$, válida para cualquier matriz no singular M y $\vec{u}, \vec{v}$ vectores columna. Escogiendo $M = D_n$, $\vec{u}$ con la primera coordenada cero y el resto unos y $\vec{v}$ al revés (primera uno resto ceros), se sigue

$$|A_n| = |D_n + \vec{u}\vec{v}^t| = 1 + \vec{v}^t U_n \vec{u} = \sum_{j=1}^{n} \mu(j).$$

El último sumatorio es la *función de Mertens* $M(n)$ que se suele extender a $x \in \mathbb{R}$ parándose en el último entero antes de x, es decir,

$$M(x) = \sum_{1 \le j \le x} \mu(j).$$

Con M&M en nuestras manos, Möbius y Mertens, ya estamos preparados para encontrar la relación con el problema del milenio. ¡Ah! primero tendremos que saber cuál es.

La famosa hipótesis de Riemann. Es imperativo comenzar introduciendo la también famosa y también de Riemann función ζ, a la que todos llamamos *zeta* aunque parece que habría que hacer malabarismos linguales diciendo *dseta* (tampoco he oído a ningún matecolega llamar *mi-ni* a μ-ν, como indica el diccionario). Es una función de variable compleja que admite la representación

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{en} \quad \Re(s) > 1.$$

Ésta no es toda la función ζ porque resulta que se puede extender a $\mathbb{C} - \{1\}$ conservando que sea analítica. Una extensión menos ambiciosa, y suficiente para entender la hipótesis, se consigue de manera elemental con

$$\zeta(s)\Big(1 - \frac{2}{2^s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}. \tag{2}$$

La serie converge en $\Re(s) > 0$ y para $s = 1$ vale $\log 2$, igual que el residuo de $1 - 2/2^s$, por tanto $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se extiende a una función analítica en $\Re(s) > 0$. La *hipótesis de Riemann* afirma que la ζ extendida no tiene ceros en $\Re(s) > 1/2$. Es decir, que en esta región la serie convergente de (2) no se anula. Por cierta simetría, más complicada de probar, eso implica que tampoco se anula en $0 < \Re(s) < 1/2$ y por tanto sus ceros están muy formalitos en fila en $\Re(s) = 1/2$.

¿Por qué a Riemann o a alguien, matemático pero honrado, le interesa esto? Porque hay una relación muy estrecha entre ζ y la distribución de los primos. Usando que todo número se factoriza en primos, se tiene la identidad en la zona segura $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^2)^s} + \frac{1}{(p^3)^s} + \dots\Big) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{3}$$

donde p recorre los primos. De aquí no es difícil deducir

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1 \tag{4}$$

que conecta ζ con la función de Möbius. Más importante en la teoría es la relación con los primos que se obtiene al tomar logaritmos en (3) y derivar, desarrollando después $(\log p)/(1 - p^{-s})$ en serie como $\sum (\log p)/p^{ks}$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1 \qquad \text{con} \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5}$$

Si se cumple la hipótesis de Riemann, el lado izquierdo se extiende a una función analítica en $\Re(s) > 1/2$ salvo por un polo en $s = 1$ de residuo 1.

La función rara $\Lambda(n)$ sirve para expresar nuestra creencia en que para números de tamaño n, aproximadamente uno de cada $\log n$ es primo. En otras palabras,

$$\psi(x) = \sum_{1\le n\le x} \Lambda(n)$$

es aproximadamente x (las potencias de primos tienen importancia menor y solo se incluyen para que (5) quede bonito). Convertir esto en un resultado es algo que llevó bastantes años después de Riemann y desde 1896 sabemos cómo exprimir las propiedades de variable compleja de ζ para obtener el flamante límite $\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$, el *teorema de los números primos*.

Cuatro implicaciones (o casi). Por la identidad entre $|A_n|$ y la función de Mertens, que nuestro deseado límite dé cero es lo mismo que decir

$$\textbf{(A)} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^a} = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{1}{2} < a < 1.$$

Por otro lado, tenemos la hipótesis de Riemann genuina

$$\textbf{(B)} \qquad \zeta(s) \neq 0 \qquad \text{para} \quad \Re(s) > \frac{1}{2}.$$

Finalmente, creemos que si cada primo pesa su logaritmo, entonces los menores que x pesan x con gran precisión. Concretamente

$$\textbf{(C)} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^a} = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{1}{2} < a < 1.$$

Vamos a ver que estas tres afirmaciones son equivalentes y puedes ganar el millón de dólares con cualquiera de ellas si no te gusta lo de los determinantes. No he encontrado una manera de demostrar que la hipótesis de Riemann implica las otras afirmaciones sin añadir un cabo suelto que está más cerca del nivel "master class". De ahí el "casi" del título.

$\boxed{\textbf{(A)}\Rightarrow\textbf{(B)}}$ Se cumple

$$(6) \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

Para demostrarlo, basta escribir la integral como

$$(7) \qquad sM(1)\int_1^2 \frac{dx}{x^{s+1}} + sM(2)\int_2^3 \frac{dx}{x^{s+1}} + sM(3)\int_3^4 \frac{dx}{x^{s+1}} + \dots,$$

integrar, cancelar términos y ponerse contento porque tenemos (4). Suponiendo (**A**), la integral de (6) converge para $\Re(s) > 1/2$ y por tanto $1/\zeta(s)$ admite una extensión analítica a esta región y se sigue la hipótesis de Riemann.

$\boxed{(\mathbf{B})\Rightarrow(\mathbf{C})}$ [Incompleta]. La función $Z(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ está bien definida en $\Re(s) > 1/2$ bajo nuestra hipótesis (bueno, de Riemann). Supongamos primero que $|Z(s)/s|$ es integrable en cada recta vertical de $\Re(s) > 1/2$. Esto no es estrictamente cierto pero nos dará una idea del argumento. Ten paciencia. Bajo esta suposición las integrales

$$I(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} Z(s)\, ds$$

tienen sentido y cumplen $\lim_{x\to\infty} x^{-a} I(c) = 0$ para cualquier $a > c > 1/2$.

El residuo del integrando en $s = 1$ es x, entonces el teorema de los residuos aplicado en $c < \Re(s) < 2$ con $c = (a + 1/2)/2$ implica

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{I(c)}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{I(2) - x}{x^a}. \tag{8}$$

Utilizando (5) y sin preocuparnos por los detalles de la convergencia,

$$I(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s}\, ds.$$

El teorema de los residuos en la región $\Re(s) > 2$ prueba que los sumandos con $n > x$ son nulos mientras que en la región $\Re(s) < 2$, donde está el polo $s = 0$, prueba que los sumandos con $n < x$ son $\Lambda(n)$. Cambiando x por $x + \text{un poquito}$ siempre se puede suponer que x no es un entero y evitar $x = n$. En definitiva, $I(2) = \psi(x)$ y (8) da (**C**).

Ahora toca contar cómo remediar las mentiras. Realmente $|Z(s)/s|$ no es integrable pero casi, porque se tiene [Dav00, §15] (esto es lo incompleto de la prueba)

$$|Z(s)| \le C_a \log(|s| + 1) \qquad \text{para} \quad \frac{1}{2} < a < \Re(s) \tag{9}$$

con C_a cierto valor dependiente de a. Para no rendirse ante la falta se convergencia, lo que se hace es truncar $I(c)$ a $I_T(c)$ dado por la misma fórmula pero con límites de integración $c - iT$, $c + iT$ donde $T = x^2$. El teorema de los residuos usado en (8) ahora tiene dos términos nuevos debidos a los lados horizontales del rectángulo $c < \Re(s) < 2$, $|\Im(s)| < T$. Están bajo control gracias a (9) y (8) sigue siendo cierto con I_T en vez de I. De la misma forma al tratar $I_T(2)$ hay que tener en cuenta la contribución de los lados horizontales de las regiones $2 < \Re(s)$, $|\Im(s)| < T$ y $\Re(s) > 2$, $|\Im(s)| < T$.

$\boxed{(\mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A})}$ [Más de lo mismo]. Si en la prueba anterior cambiamos $Z(s)$ por $1/\zeta(s)$ y usamos en vez de (9) la cota más fea [Tit86, §14.2]

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \le \exp\big(C_a(\log(|s|+1))^{3/2-a}\big) \qquad \text{para} \quad \frac{1}{2} < a < \Re(s),$$

todo funciona igual. Lo único a tener en mente para no horrorizarse con las estimaciones es que la función $1/|\zeta(s)|$ crece en cada vertical menos que cualquier potencia positiva.

$\boxed{(\mathbf{C}) \Rightarrow (\mathbf{B})}$ Partiendo de (5) y procediendo como en (7), se tiene

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,dx + \frac{s}{s-1} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

Si se cumple (**C**) entonces la integral tiene sentido para todo $\Re(s) > 1/2$ y lo mismo ocurre con $-\zeta'(s)/\zeta(s) - s/(s-1)$, por tanto ζ no se anula en esa región.

NOTA: La equivalencia del límite de este artículo con la hipótesis de Riemann la aprendí en [Woe16] donde hay otro método para ganar otro millón de dólares.

Referencias

[BFP88] W. W. Barrett, R. W. Forcade, and A. D. Pollington. On the spectral radius of a $(0,1)$ matrix related to Mertens' function. In *Proceedings of the Victoria Conference on Combinatorial Matrix Analysis (Victoria, BC, 1987)*, volume 107, pages 151–159, 1988.

[Dav00] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[Red77] R. Redheffer. Eine explizit lösbare Optimierungsaufgabe. pages 213–216. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 36, 1977.

[Ste14] I. Stewart. *Los grandes problemas matemáticos.* Crítica, Barcelona, 2014.

[Tit86] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[Woe16] H. J. Woerdeman. *Advanced linear algebra.* Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.