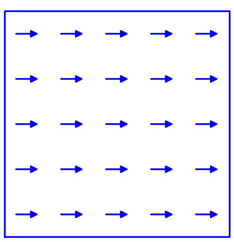
Viento, partículas y pelos

FERNANDO CHAMIZO LORENTE

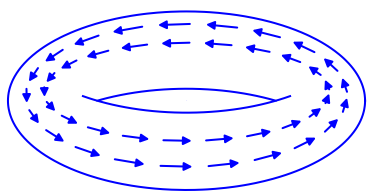
Resumen

A pesar del título intencionadamente equívoco, esta nota tiene contenido matemático: una deducción del llamado “teorema de la bola de pelo” que cualquiera con una mínima formación científica debería ser capaz de leer y, con suerte, de disfrutar.

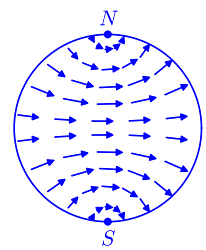
La pregunta, la respuesta y el objetivo. *¿Puede hacer viento en todo punto de la superficie terrestre sin que se formen remolinos?* Está claro que esto sería posible en una Tierra plana, por ejemplo si el viento se dirige en todos los lugares hacia al este. El mismo truco se puede usar en un planeta con forma de rosquilla (seguramente inexistente). Si representamos el viento con una flecha a modo de veleta, eso es lo que indican las dos primeras figuras. Sin embargo, el viento de poniente nos produce remolinos en los polos cuando se considera la superficie de la Tierra.



Plano



Rosquilla



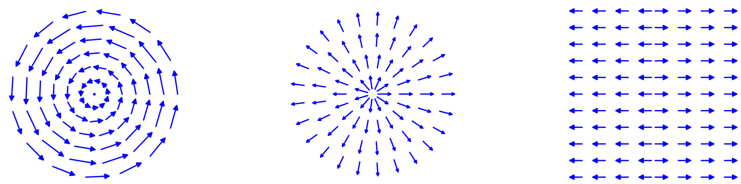
Esfera con dos remolinos

Por supuesto, el viento no tiene nada de particular y podemos situarnos en un contexto físico más abstracto y decir que siempre que una superficie esférica esté compuesta con partículas que circulan de manera continua y con velocidad no nula, entonces necesariamente se forman remolinos. Otra manera más prosaica de plantear el problema es preguntarse *si es posible peinar sin remolinos una esfera llena de pelos* (no llames a tu amigo hippie para hacer pruebas, porque con eso de tener cuello, ojos y cuerpo, no sirve). La raíz del pelo se puede asociar a la partícula y la dirección a su velocidad, por ello la formulación prosaica es equivalente a la abstracta.

Vamos a indicar con un poco de precisión a qué llamamos “remolino” porque es algo más general que la idea intuitiva. En referencia a la última formulación (para las otras es similar), cuando decimos “sin remolinos” nos referimos a que en cada punto tiene que haber un pelo, quizá muy corto pero no de longitud cero y también que los pelos varíen de forma continua, no puede ser que en un lugar un pelo apunte para un lado y en otro contiguo hacia otro bien distinto, como ocurre al peinar a raya. A propósito, los punkies y recién levantados están excluidos de partida. Se supone que todos los pelos están peinados, esto es, que son tangentes a la esfera.

Un remolino es cualquier situación que viola estas condiciones, que matemáticamente podríamos llamar de no anulación y de continuidad.

Con esta terminología, cualquiera de las tres figuras planas siguientes diríamos que es un remolino. Por supuesto, sólo la primera corresponde a la idea habitual.



Es posible encontrar ejemplos en la esfera con un remolino en un único punto aunque no es tan sencillo dar con ellos[1]. Como hemos anunciado, es imposible conseguir que no haya ningún remolino. Necesariamente en algún punto de la superficie terrestre hay calma chicha o un tipo de tornado. Es imposible peinar bien una bola de pelo y entre las partículas en una esfera alguna tiene que estar parada. Para el lector poco ambicioso, el artículo acaba aquí. El resto (¿hay alguien ahí?) querrá saber cómo se puede asegurar tal cosa. Hay infinitas configuraciones posibles y parece difícil incluso que exista un método para tratar con todas ellas.

¿Cómo se resuelve el problema? Si le preguntas a un matemático, es muy probable que te suelte dos cohomologías[2] y se quede tan ancho, perpetuando de esta forma el prejuicio de que las Matemáticas no hay quien las entienda. Parte de la mala fama viene de que los matemáticos tenemos una aversión maniática a decir cosas que sean tan poco objetables como que dos y dos son cuatro. Para disfrutar de ese continuo éxtasis de certeza, hay que pagar el precio del rigor (para algunos *mortis*) manifestado en un lenguaje muy preciso, sin ambigüedades ni polisemias pero con cierta tendencia al preciosismo. Entonces para entender el resultado de una forma tan exacta como lo hace un matemático, posiblemente no quede más remedio que pasar por cursos avanzados.

De acuerdo, pero ¿no hay una demostración que deje satisfecha a la gente "normal" sin más pertrechos que alguna inquietud científica? Si tienes interés en una prueba de este tipo, sigue leyendo, porque es el objetivo de esta nota. Prometido por Gauss que no habrá fórmulas ni conceptos complicados, todo el argumento se basará en dibujos e ideas simples.

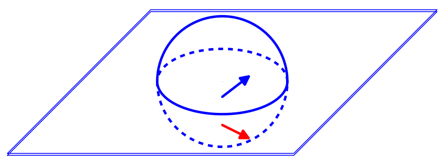
Aplanando el problema. El esquema de la prueba pasa por ver qué consecuencias tendría un contraejemplo: una distribución de flechas tangentes en la esfera sin discontinuidades ni anulaciones. Estas flechas indican la dirección del viento en la primera formulación.

Nuestro primer paso va a ser aplanar el problema. No es que sea esencial pero nos ayudará porque somos capaces de ver mejor las cosas mejor en el plano que en el espacio. Imaginemos que hay algo así como un espejo en el ecuador y que reflejamos por él las flechas del hemisferio norte en el sur. Con ello en cada uno de sus puntos habrá dos flechas tangentes. Ahora "aplastamos" el hemisferio sur en el plano ecuatorial. Esto no tiene que ser violento. De hecho la forma que más nos gusta a

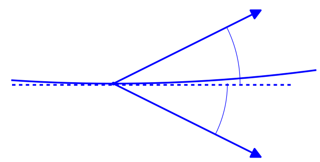
[1]Para ese lector con gafas y pinta de listo: si te gusta la Física, te ayudará pensar en dipolos eléctricos.

[2]Tranquilo, no se te pasó aprender ninguna palabrota en la adolescencia. Éstas son unas construcciones algebraicas con definición complicada.

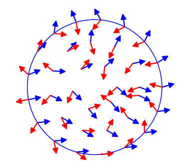
los matemáticos, y que usaremos aquí, es tomar una foto desde el polo norte suponiendo la esfera hueca. Muy ufanos, decimos que es la proyección estereográfica. En esa foto veremos un círculo lleno de angulitos. Si nos resulta más sencillo, podemos suponer que todas las flechas que forman los angulitos tienen la misma longitud, acortándolas o alargándolas según convenga. Para ello sólo hace falta imaginación (que es más poderosa que GIMP o Photoshop).



Simetría

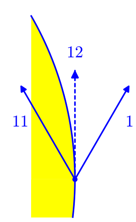


Detalle del ecuador

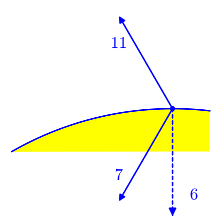


Tras la proyección

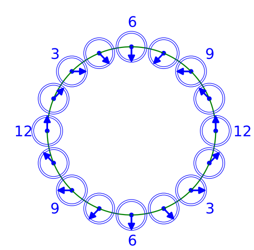
A vueltas con los relojes. Consideremos que cada una de las dos flechas en el punto situado más hacia la derecha (al este) son agujas indicando la hora y que sumamos las horas que marcan y representamos el resultado en un reloj (debido a los recortes, usaremos un reloj con una sola manecilla). Siempre marcará las doce. ¿Magia? ¿Increíble? En realidad es muy sencillo y únicamente se basa en que la dirección de una flecha es el reflejo de la otra a través de la frontera. Así cuando una marque las 3, la otra seguro que marca las 9, y si la primera marca las 5, la otra marcará las 7. Si no fuera por la promesa por Gauss, escribiríamos matemáticamente que si una marca hache, la otra marca doce menos hache. ¿Cuánto marca el reloj suma en el punto del borde más al norte? Un argumento similar nos dirá que marca las seis.



11h+1h=12h



11h+7h=18h→6h

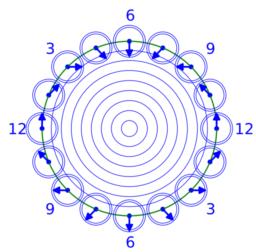


Así podemos llenar toda la circunferencia del borde con relojes. Una cosa que será crucial es que si recorremos el borde, la manecilla dará exactamente dos vueltas a la esfera del reloj[3], marcará cada hora dos veces. Concretamente, los puntos diametralmente opuestos del borde, marcan lo mismo en el reloj suma. Asignemos de la misma forma un reloj suma a cada uno de los puntos interiores. Lo que marquen dependerá de la situación de las flechas originales, por tanto ya no sabremos preverlo con ninguna magia matemática. Para ayudar a nuestra imaginación (por favor que nadie empiece a comprar relojes a granel), pensemos que cada reloj está representado por su manecilla. Con ello tendremos el círculo lleno de flechas de la misma longitud.

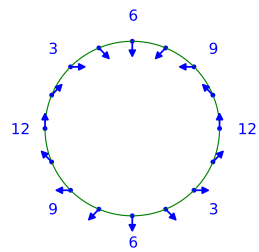
[3]Por cierto, esto recuerda un poco al hecho de que al girar una moneda sobre otra sin deslizar, la que gira da dos vueltas en lugar de la una esperada. ¿Que no te lo crees? Haz la prueba.

Dos no es igual a cero. En la introducción, hemos dicho que los matemáticos trabajan con certezas tan fuertes como que dos y dos son cuatro. Ahora veremos que la posibilidad de que exista viento en todos los puntos de la Tierra es tan falsa como que dos sea igual a cero, lo cual tampoco está mal para convencerse de que algo es mentira.

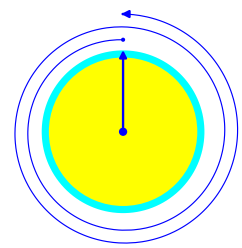
Dividamos nuestro círculo en circunferencias concéntricas.



Circunferencias concéntricas



Reloj exterior


Dos vueltas

En un circunferencia cercana al borde, el reloj también debe dar dos vueltas. ¿Está claro? Si no lo está, imagina dos coches en un circuito circular de $1km$ y que al cabo de un minuto llegan a la meta/salida al mismo tiempo. Si se iban pisando los talones, ¿es posible que al terminar uno haya dado una vuelta y el otro dos? Ciertamente no, para que un coche doble a otro, las posiciones, así como las velocidades, deben ser bien diferentes. En nuestro caso, cuando recorremos al mismo tiempo circunferencias cercanas, las flechas que vamos viendo tienen que estar cercanas. Es aquí donde usamos que haya continuidad. La condición de que no haya anulación ya la habíamos empleado para asignar un ángulo.

Esta situación continúa según nos dirigimos al centro del círculo porque si no fuera así, acercándonos mucho a la primera circunferencia concéntrica en la que el número de vueltas no fuera dos[4], estaríamos contradiciendo lo que hemos explicado con los coches.

El golpe de gracia, ya se ve venir. Según lo dicho, cerca del centro el número de vueltas debería ser dos, pero eso es imposible porque en una circunferencia de radio muy pequeño todas las flechas apuntarán aproximadamente en la misma dirección y entonces el número de vueltas será cero.

En resumidas cuentas, hemos demostrado que si alguien nos dijera que ha conseguido peinar los pelos de una esfera sin remolinos, nosotros podríamos deducir de su ejemplo algo más falso que los euros de madera, por tanto tendremos todo el derecho para acusarle de mentiroso[5].

[4]Si eres matemático hay dos observaciones que hacer: 1) No deberías estar leyendo esto. 2) Da igual que no haya máximo en los radios de los contraejemplos, el supremo siempre existe y eso es suficiente.

[5]El autor no se responsabiliza de nada en caso de demanda (ni en casi cualquier otro caso) pero, llegado el momento, recomienda emplear esta prueba en lugar de liarse a soltar cohomologías.