Teoremas de factorización

Fernando Chamizo

5 de mayo de 2018

Nota: Este documento es un resumen muy abreviado de algunos puntos principales de una parte del capítulo 7 de [3] y un resultado del capítulo 8.

1. Un argumento poco riguroso de Euler

Un polinomio P con $P(0)\neq 0$ y raíces $\pm r_1$, $\pm r_2$,..., $\pm r_n$, es de la forma

$$(1)\quad p_{2n}(x-r_1)(x+r_1)\cdots(x-r_n)(x+r_n) = p_{2n}(x^2-r_1^2)\cdots(x^2-r_n^2) = p_{2n}x^{2n}+\cdots+p_2x^2+p_0.$$

Comparando coeficientes se cumple

$$(2)\qquad p_2 = (-1)^{n-1}p_{2n}\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}} r_{k_1}^2 r_{k_2}^2\cdots r_{k_{n-1}}^2 \qquad \text{y} \qquad p_0 = (-1)^n p_{2n}\prod_{k=1}^n r_k^2.$$

Entonces se tiene la siguiente fórmula sencilla:

$$(3)\qquad -\frac{p_2}{p_0} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k^2}.$$

Euler empleó el desarrollo de Taylor del seno para escribir

$$(4)\qquad S(x) = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots \qquad \text{con} \quad S(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Lo que se dijo es que S tiene "raíces" $\pm k\pi$ donde $k\in\mathbb{Z}^+$ y si se aplica (3) con $p_0=1$ y $p_2=-1/3!$ se deduce

$$(5)\qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Este resultado es ¡correcto! como demostraría después el propio Euler pero el argumento carece de sentido porque se está aplicando una identidad sobre polinomios a una función trascendente.

Lo que veremos en este capítulo es que las funciones enteras admiten una factorización en términos de sus ceros y en lo mejores casos, como en el ejemplo de Euler, se comportan como una especie de polinomios de grado infinito.

Antes de comenzar vamos a ver dos obstáculos principales que hay que tener en cuenta en este proyecto.

En primer lugar, hay funciones enteras que no tienen ceros. Para ellas no hay factorización posible, el argumento de Euler daría un absurdo por ejemplo aplicado a la serie de Taylor de e^{z^2}. Todas son de la forma e^g con g entera por tanto las factorizaciones serán salvo multiplicación por e^g. El otro obstáculo tiene que ver con la convergencia. Si una función entera no idénticamente nula tiene infinitos ceros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, necesariamente $a_n \to \infty$ porque los ceros no tienen puntos de acumulación. En particular, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(z - a_n)$ análogo al habitual de la factorización de polinomios no tiene sentido, da infinito. Una solución parcial es sacar un factor infinito $(-1)^n \prod a_n$ considerando en su lugar $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n)$. Lo malo es que hay algo más sutil: si los a_n no crecen rápido, el producto se puede anular aunque ninguno de sus factores lo haga. Por ejemplo para $a_n = n$ y $z = 1/2$, usando la desigualdad $1 - x \leq e^{-x}$ si $x \in [0, 1]$ que proviene de la serie de Taylor de e^{-x},

$$\prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{1/2}{n}\Big) \leq \prod_{n=1}^{N} e^{-1/2n} = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\Big) \to 0 \tag{6}$$

porque la serie armónica diverge.

No podemos acelerar el crecimiento de los ceros porque están fijados pero sí se puede acelerar el producto infinito introduciendo unos factores artificiales que no se anulan. De esta forma se consigue que los productos solo se anulen donde deben. Por ejemplo, para $a_n = n$ probaremos

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) e^{z/n} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad z \in \mathbb{Z}^+. \tag{7}$$

El factor $e^{z/n}$ no sirve para nada más que para que el producto vaya más rápido y que un teorema asegure que en esas condiciones es cero si y solo si alguno de sus factores es cero.

2. Productos infinitos

Con lo visto anteriormente, está claro que algo debemos estudiar sobre la convergencia de productos infinitos. Escribiremos los factores de estos productos como $1 + z_n$ porque estaremos interesados en que a la larga tengamos un producto de números que son prácticamente unos.

Un convenio un poco chocante que se toma en variable compleja es definir

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) \text{ \textit{converge} si } \lim_{N\to\infty} \prod_{\substack{n=1\\ z_n\neq -1}}^{N} (1+z_n) \text{ existe y no es cero.} \tag{8}$$

Eliminar el valor cero está relacionado con los problemas antes descritos (en [3, §7.1] hay más comentarios). Cuando el límite se anula, se dice que el producto *diverge a cero*.

También se define un concepto de *convergencia absoluta*:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) \text{ \textit{converge absolutamente} si } \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|) \text{ existe.} \tag{9}$$

Todo lo que necesitamos saber sobre convergencia de productos infinitos está recogido en los dos resultados siguientes:

Proposición 2.1. *El producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge absolutamente si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *converge.*

Proposición 2.2. *Si un producto converge absolutamente entonces converge. En particular es cero solo cuando se anula alguno de sus factores.*

En resumen, si solo estamos interesados en la convergencia absoluta, como será nuestro caso, los productos infinitos se comportan como los finitos y la convergencia es tan fácil o difícil como la de una serie.

Demostración de la Proposición 2.1. Está claro que

$$1+\sum_{n=1}^{N}|z_n| \le \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|), \tag{10}$$

entonces si el producto converge absolutamente la serie también converge. Por otro lado, la desigualdad $1+x\le e^x$, que se sigue fácilmente de que e^x-x-1 es creciente en $\mathbb{R}^+$, implica

$$\prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|) \le e^{\sum_{n=1}^{N}|z_n|}. \tag{11}$$

De aquí, los productos parciales están acotados superiormente y como forman una sucesión no decreciente, convergen. □

Para referencia posterior, separemos la siguiente desigualdad finita:

Lema 2.3. *Para z_n números complejos cualesquiera y $M > N$ enteros positivos, se cumple*

$$\Big|\prod_{n=1}^{M}(1+z_n)-\prod_{n=1}^{N}(1+z_n)\Big| \le e^{\sum_{n=1}^{N}|z_n|}\Big(e^{\sum_{n=N+1}^{M}|z_n|}-1\Big). \tag{12}$$

Demostración. El primer miembro es

$$\Big|\prod_{n=1}^{N}(1+z_n)\Big|\Big|\prod_{n=N+1}^{M}(1+z_n)-1\Big| \le \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|)\Big(\prod_{n=N+1}^{M}(1+|z_n|)-1\Big) \tag{13}$$

donde la desigualdad se sigue pensando en el desarrollo de los productos y tomando el módulo de cada sumando. En esta situación, basta aplicar la desigualdad $1+x \le e^x - 1$ antes mencionada. □

Demostración de la Proposición 2.2. Por la Proposición 2.1, la serie $\sum |z_n|$ converge y en particular solo pueden existir un número finito de términos con $z_n = -1$, digamos $z_n \ne -1$ para $n \ge N_0$. Si descontamos los factores con $n < N_0$, por la definición (8) el producto no se anula, así que la parte final del enunciado es consecuencia de lo anterior.

La convergencia absoluta y la Proposición 2.1 aseguran que las sumas parciales de $|z_n|$ están acotadas, entonces se tiene para $M > N \ge N_0$ por el Lema 2.3 con $z_n = 0$ para $n < N_0$

$$\Big|\prod_{n=N_0}^{M}(1+z_n)-\prod_{n=N_0}^{N}(1+z_n)\Big| \le C\Big(e^{\sum_{n=N+1}^{M}|z_n|}-1\Big). \tag{14}$$

La sucesión de sumas parciales es de Cauchy, pues $\sum |z_n|$ converge por tanto cuando $M, N \to \infty$ el lado derecho tiende a cero y se deduce que los productos parciales comenzando en N_0 son una sucesión de Cauchy y por tanto su límite existe. Además, si en el Lema 2.3 tomamos $M \to \infty$ y $z_n = 0$ para $n \le N$ con N grande, se sigue que el límite no es cero. □

3. Funciones enteras con ceros dados

En primer lugar, definamos los factores artificiales que mencionamos en el primer apartado para evitar problemas con la divergencia a cero.

Para $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ se llama k-ésimo *factor primario* o *factor elemental* a la función entera

$$E_k(z) = (1-z)e^{z+z^2/2+z^3/3+\cdots+z^k/k} \tag{15}$$

donde se sobreentiende $E_0(z) = 1 - z$.

Una forma muy versátil pero un poco enrevesada de la factorización de funciones enteras es la siguiente [1, VII.5]:

Teorema 3.1. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión dando todos los ceros en* $\mathbb{C}-\{0\}$ *de una función entera* f *repetidos con su multiplicidad y sea* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de enteros de modo que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{1+k_n} \quad \textit{converge para todo } r>0. \tag{16}$$

Entonces existe una función entera g *tal que*

$$f(z)=z^k e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_{k_n}(z/a_n) \tag{17}$$

donde k *es el orden del posible cero de* f *en el origen. Además el producto converge absolutamente y uniformemente sobre compactos.*

Ya hemos señalado que $|a_n|\to\infty$ porque los ceros no son aislados. Esto implica que tomando $k_n=n$ es seguro que (16) se cumple. Con eso tenemos un enunciado más limpio pero menos económico, que es corolario de lo anterior:

Teorema 3.2 (Teorema de factorización de Weierstrass)**.** *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión que da todos los ceros en* $\mathbb{C}-\{0\}$ *de una función entera* f *repetidos con su multiplicidad. Entonces existe una función entera* g *tal que*

$$f(z)=z^k e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_{n}(z/a_n) \tag{18}$$

donde k *es el orden del posible cero de* f *en el origen.*

Veamos si así conseguimos factorizar $f(z)=\operatorname{sen} z$, como quería Euler. Los ceros son $\pm\pi n$ y la condición (16) se cumple para $k_n=1$ ya que fijado $r\in\mathbb{R}^+$ se tiene $r^2\sum n^{-2}<\infty$. Como en $z=0$ hay un cero de orden 1, el Teorema 3.1 asegura, agrupando $\pm n$,

$$\operatorname{sen} z = ze^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_1\big(\frac{z}{\pi n}\big)E_1\big(-\frac{z}{\pi n}\big). \tag{19}$$

Recordando la definición (15), cada factor se simplifica a $1-z^2/(\pi n)^2$. En definitiva, hemos probado

$$\operatorname{sen} z = ze^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{20}$$

si hubiéramos usado el Teorema 3.2 no se habría producido tal simplificación. Esto está relacionado con que no hay unicidad en (17), podemos poner k_n más grande de lo que necesitamos si nos apetece pero eso complicaría el aspecto final.

Lo malo de (20) es que no sabemos quién es g. El Teorema 3.1 solo asegura que existe y eso es natural porque, como habíamos señalado, la factorización solo puede hacerse módulo funciones de la forma e^g ya que estas no afectan a los ceros. Una teoría desarrollada por Hadamard permite limitar a polinomios las posibles g e incluso determinarlas con más información sobre la función de partida siempre que no crezca muy deprisa. Uno de los resultados más representativos es el siguiente:

Teorema 3.3 (Teorema de factorización de Hadamard)**.** *Si para cierto $\rho \in \mathbb{R}^+$ con parte entera d, una función entera f con infinitos ceros satisface*

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)|e^{-|z|^\rho} = 0, \tag{21}$$

entonces (17) *se verifica con $k_n = d$ y g un polinomio de grado menor o igual que d.*

A las funciones enteras que cumplen (21) para algún ρ se dice que son *de orden finito*. No todas las funciones enteras lo son, un contraejemplo es $\cos e^z$.

Como cabe esperar, si f tiene solo un número finito de ceros, el resultado es todavía válido con la misma prueba, simplemente el producto en (17) será finito en ese caso.

Para $f(z) = \operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ la condición (21) se cumple por ejemplo con $\rho = 1.1$, lo cual lleva de nuevo a que $k_n = 1$ es una elección válida y afina más (20) asegurando que existen constantes $A, B \in \mathbb{C}$ tales que

$$\operatorname{sen} z = ze^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{22}$$

La función S en (4) es entera completando su definición en la singularidad evitable $z = 0$ con $S(0) = \lim_{z\to 0} S(z) = 1$. En la fórmula anterior, $S(0) = 1$ implica $B = 0$ y $S(z) = S(-z)$ implica $A = 0$. Por tanto hemos probado la fórmula de factorización del seno que convenientemente empleada justifica el argumento de Euler:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{23}$$

Dicho sea de paso, Euler llegó a probar esta fórmula sin la variable compleja del siglo XIX con un bello argumento basado en que los polinomios $(1 + iz/n)^n$ tienden a e^{iz}. El original se puede encontrar en [2] y es totalmente legible, aunque a un lector moderno la falta de rigor le inquiete un poco [5].

Otro ejemplo destacado es la función Γ. No es homolomorfa pero $1/\Gamma$ sí lo es: los polos de Γ dan lugar a singularidades evitables que son ceros. Se puede probar, aunque no lo haremos aquí, que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{e^{-|s|^\rho}}{\Gamma(s)} = 0 \qquad \text{para todo } \rho > 1. \tag{24}$$

Como $1/\Gamma$ tiene ceros simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$, el Teorema 3.3 permite escribir

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{As+B} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{s}{n}\Big) e^{-s/n}. \tag{25}$$

Sabemos que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ tiende a 1 cuando $s \to 0$, por tanto $B = 0$. La constante $-A$ es la llamada *constante de Euler-Mascheroni* que, hasta donde se sabe, no admite una expresión sencilla. Escogiendo $s = 1$ y tomando logaritmos, con algunas manipulaciones sencillas [3, §7.4] se tiene

$$A = -\gamma = \lim_{N\to\infty} \Big(\log(N+1) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \Big) = -0.5772\ldots \tag{26}$$

La fórmula resultante para Γ es

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{s}{n}\Big)^{-1} e^{s/n} \tag{27}$$

y permite probar algunos resultados interesantes. Por ejemplo, calculando $-s\Gamma(s)\Gamma(-s)$ con ella y recordando $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$, se tiene la comparar con (23)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)} \tag{28}$$

que es la *fórmula de reflexión de Euler*. Por otro lado, escribiendo (27) como el límite de los productos parciales y recordando (26) se puede deducir (véase [3, §7.4.1] para los detalles) la fórmula debida a Gauss

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^s N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}. \tag{29}$$

Para la función ζ de Riemann también se conoce que (21) es válido para todo $\rho > 1$. El Teorema 3.3 aplicado a la función entera $(s-1)\zeta(s)$ implica

$$\zeta(s) = \frac{e^{As+B}}{s-1} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{s}{a_n}\Big) e^{s/a_n}. \tag{30}$$

Se conoce $A = \log(2\pi) - 1$ y $B = -\log 2$. También se conocen todos los ceros a_n en el semiplano izquierdo $\Re z \le 0$. Se conjetura que los ceros en el semiplano derecho cumplen $\Re a_n = 1/2$. Este es un problema abierto desde hace más de 150 años, llamado la *hipótesis de Riemann*, cuya solución tendría consecuencias sobre lo que sabemos acerca de los números primos. También se conjetura que todos estos ceros son simples. Los avances en todo este tiempo sobre la localización de los ceros han sido mínimos, ni siquiera se conoce un $\epsilon > 0$ tal que los ceros en el semiplano derecho satisfagan $\Re a_n > \epsilon$.

4. Demostración de los resultados de factorización

Incidiendo en lo visto en la primera sección, lo natural en (17) sería escribir $1 - z/a_n$ como factores en el producto infinito, esto es, $E_0(z/a_n)$ pero ello no asegura la convergencia. El único propósito de introducir los factores primarios (15) es conseguir que $E_{k_n}(z/a_n)$ esté tan cerca de 1 para a_n grande que el producto necesariamente converja. el siguiente resultado muestra cómo esta cercanía a 1 aumenta con k_n.

Lema 4.1. *Dado $k \ge 0$, se verifica*

$$|E_k(z) - 1| \le |z|^{k+1} \qquad \textit{para todo} \quad |z| \le 1. \tag{31}$$

Demostración. Un cálculo prueba que $E_k'(z) = -z^k \exp(z + z/2 + \cdots + z/k)$. Está claro con ello que $E_k^{(n)}(0) = 0$ para $1 \le n \le k$ porque E_k' tiene un cero de orden k en $z = 0$ y pensando en la serie de Taylor de la exponencial, $E_k^{(n)}(0) \le 0$ para $n > k$. Esto implica que la serie de Taylor de E_k es de la forma

$$E_k(z) = 1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{con} \quad a_n \le 0. \tag{32}$$

Entonces para $|z| \le 1$

$$|E_k(z) - 1| = \Big| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n \Big| \le - \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n |z|^{k+1} = |z|^{k+1}\big(1 - E_k(1)\big) \tag{33}$$

y como $E_k(1) = 0$ se deduce el resultado. $\square$

Demostración del Teorema 3.1. Veamos primero que el producto converge absolutamente para cada z. Sea $r = |z|$ y escribamos

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n}(z/a_n) = \prod_{|a_n|<r} E_{k_n}(z/a_n) \prod_{|a_n|\ge r} \Big(1 + \big(E_{k_n}(z/a_n) - 1\big)\Big). \tag{34}$$

En el segundo miembro el primer producto es finito. Por el Lema 4.1

$$\big|E_{k_n}(z/a_n) - 1\big| \le b_n \qquad \text{con} \quad b_n = \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{1+k_n} \tag{35}$$

y la Proposición 2.1 y la Proposición 2.2 aseguran que el segundo producto converge y lo hace absolutamente, porque $\sum |b_n|$ converge.

Para la convergencia uniforme sobre un compacto K, sea r tal que $|z| \le r$ para todo $z \in K$. Por el Lema 2.3 con $M \to \infty$ y (35)

$$\Bigg| \prod_{\substack{n=1 \\ |a_n|\ge r}}^{\infty} E_{k_n}(z/a_n) - \prod_{\substack{n=1 \\ |a_n|\ge r}}^{N} E_{k_n}(z/a_n) \Bigg| \le C\Big(e^{\sum_{n=N+1}^{M} |b_n|} - 1\Big). \tag{36}$$

Por la convergencia de $\sum |b_n|$, esta cantidad se acerca a cero cuando N crece independientemente de z y entonces la convergencia es uniforme sobre K. En particular (34) define una función holomorfa que se anula exactamente en la sucesión a_n. De esta forma, f dividida entre este producto y z^k es entera y sin ceros por lo cual es de la forma e^g, ya que $\mathbb{C}$ es simplemente conexo. $\square$

La clave para demostrar el Teorema 3.3 es probar que las funciones enteras que no crecen mucho no pueden tener ceros que crezcan poco. Hay varios resultados de este tipo que inicialmente se desarrollaron para entender los misteriosos ceros de la función ζ de Riemann. El que emplearemos aquí es:

Proposición 4.2. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que da todos los ceros en $\mathbb{C} - \{0\}$ de una función entera f repetidos con su multiplicidad. Si f cumple* (21) *entonces $\sum |a_n|^{-\rho-\epsilon}$ converge para cualquier $\epsilon > 0$.*

Demostración. Supongamos $f(0) = 1$, lo cual se puede conseguir siempre reemplazando f por $z^{-k}f$ y dividiendo por una constante. Esto no modifica los a_n ni un valor admisible de ρ. Si llamamos $N(r)$ a la función que cuenta con multiplicidades el número de ceros de f en $|z| \le r$, la *fórmula de Jensen* afirma que

$$\int_0^r \frac{N(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big|f(re^{i\theta})\big|\, d\theta. \tag{37}$$

Este resultado es bien conocido y asequible. Esencialmente lo que se hace para obtenerlo es que si f no tiene ceros con $|z| \le r$, y consecuentemente el primer miembro es nulo, se tiene $f = e^g$ en esta región con $g(0) = 0$ y el segundo miembro es también nulo debido a la fórmula integral de Cauchy en la siguiente forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big|f(re^{i\theta})\big|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re g(re^{i\theta})\, d\theta = \Re \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z}\, dz = \Re g(0) = 0. \tag{38}$$

Se puede forzar que una función entera no se anule en un disco a base de dividir por factores lineales y para cada uno de ellos (37) no es difícil. De esta forma se puede completar una demostración. Véanse los detalles en [4].

Por (37) se tiene que los n tales que $2^{m-1} < |a_n| \le 2^m$ son a lo más

$$N(2^m) \le \frac{1}{\log 2} \int_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{N(t)}{t}\, dt \le \frac{1}{2\pi \log 2} \int_0^{2\pi} (2^{m+1})^\rho \, d\theta = \frac{2^{(m+1)\rho}}{\log 2}, \tag{39}$$

donde para la segunda igualdad se ha usado (21) suponiendo m mayor que cierta constante $m_0 \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$\sum_{|a_n|>2^{m_0}} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}} \le \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{2^{m-1}<|a_n|\le 2^m} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}} \le \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{2^{(m+1)\rho}}{2^{(m-1)(\rho+\epsilon)} \log 2} \tag{40}$$

que converge por ser una serie geométrica de razón $2^{-\epsilon} < 1$.

La hipótesis inicial $f(0) = 1$ es inocua pues si no se diera basta aplicar la demostración anterior a $z^{-k} f$ dividido por una constante. □

Un resultado auxiliar sencillo es una consecuencia del Lema de Schwarz:

Lema 4.3 (Lema de Borel-Carathéodory)**.** *Si* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \{z \ : \ \Re z < M\}$ *es holomorfa con* $f(0) = 0$*, entonces se cumple*

$$|f(z)| \le \frac{2M|z|}{1-|z|} \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}. \tag{41}$$

Demostración. La transformación de Möbius $T(z) = z/(z - 2M)$ aplica el semiplano $\Re z < M$ en $\mathbb{D}$ y se cumple $T(0) = 0$ por tanto $T \circ f$ está bajo las hipótesis del Lema de Schwarz que implica $|T(f(z))| \le |z|$. Empleando la desigualdad triangular y despejando $|f(z)|$ se sigue el resultado. □

Demostración del Teorema 3.3. Como $d+1 > \rho$, el criterio de comparación y la Proposición 4.2 aseguran que (16) se verifica con $k_n = d$.

Lo que resta probar es que g en (17) es un polinomio de grado menor o igual que d. Por simplicidad supondremos $k = 0$ y $f(0) = 1$, lo cual no restringe generalidad pues, como antes, siempre se puede reemplazar f por $z^{-k} f$ y dividir por una constante sin modificar d. Escribamos (17) como

$$e^{g(z)} = f_R(z) \prod_{|a_n|>R} \frac{1}{E_d(z/a_n)} \qquad \text{con} \quad f_R(z) = \frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\le R} E_d(z/a_n)}. \tag{42}$$

El producto en la primera igualdad es holomorfo en $|z| < R$ y f_R es entera y no se anula en $|z| < R$. La convergencia uniforme sobre compactos permite tomar logaritmos y derivar $d+1$ veces para obtener

$$g^{(d+1)}(z) = \Big(\frac{f_R'(z)}{f_R(z)}\Big)^{(d)} + d! \sum_{|a_n|>R} \frac{1}{(a_n - z)^{d+1}}. \tag{43}$$

Aquí se ha usado $E_d'(z)/E_d(z) = z^d/(z-1) = z^{d-1} + z^{d-2} + \cdots + 1 - (z-1)^{-1}$. Véanse los detalles sobre la convergencia en [3, T.1.17].

Vamos a probar que si $|z| < R/4$ entonces el segundo miembro de (43) tiende a cero cuando $R \to \infty$, de ahí se deduce que $g^{(d+1)} = 0$ y por tanto que g es un polinomio de grado a lo más d. Para el segundo sumando basta emplear comparación

$$\sum_{|a_n|>R} \frac{1}{|a_n - z|^{d+1}} \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{d+1} \sum_{|a_n|>R} \frac{1}{|a_n|^{d+1}} \tag{44}$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$ por la Proposición 4.2, ya que $d+1 > \rho$.

El primer sumando de (43) es más complicado. Sabemos que f_R no se anula en $|z| < R$ por tanto existe F_R holomorfa con $f_R = e^{F_R}$ y $F_R(0) = 0$ y consecuentemente el primer sumando es $F_R^{(d+1)}$. Si D es el disco centrado de radio $R/2$, por la fórmula integral de Cauchy se tiene para $|z| < R/4$

$$\big|F_R^{(d+1)}(z)\big| = \Big|\frac{(d+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F_R(w)}{(w-z)^{d+2}}\, dw\Big| \le \frac{(d+1)!}{2\pi} \cdot 2\pi \frac{R}{2} \cdot \big(\frac{R}{4}\big)^{-d-2} \sup_{|w|=R/2} |F_R(w)|. \tag{45}$$

Recordando la definición de f_R en (42), está claro que si $|z| = 2R$ se cumple $|f_R(z)| \le |f(z)|$ y la condición (21) implica que para R grande $|f_R(z)| \le e^{R^\rho}$. El principio del módulo máximo asegura que esta desigualdad es también cierta para $|z| < R$, donde la función F_R está definida y verifica $e^{\Re F_R} = |f_R|$. Con ello $\Re F_R(z) < R^\rho$ si $|z| < R$. La función $F_R(Rz)$ está bajo las hipótesis del Lema 4.3 con $M = R^\rho$. Aplicándolo con $z = w/R$ y $|w| = R/2$ se deduce $|F_R(w)| \le 2R^\rho$ que sustituido en (45) implica que $F_R^{(d+1)}$, que es el primer sumando de (43), también tiende a cero cuando $R \to \infty$. $\square$

Referencias

[1] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.

[2] L. Euler. *Introducción al análisis de los infinitos.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", Seville; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2000. Translated

from the Latin by J. L. Arantegui Tamayo, Annotated by A. J. Durán Guardeño, With introductory material by J. Ordóñez, M. Martínez Pérez and Durán Guardeño, Edited by Durán Guardeño and F. J. Pérez Fernández.

[3] J. L. Fernández Pérez. *Variable Compleja IIϵ*. 2018. La versión preliminar de algunos capítulos se pueden descargar de `www.uam.es/fernando.chamizo`.

[4] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[5] W. Walter. Old and new approaches to Euler's trigonometric expansions. *Amer. Math. Monthly*, 89(4):225–230, 1982.