Capítulo 7

Productos infinitos

ALGUNOS HÉROES: Euler, Weierstrass, Mittag-Leffler, ...

Comenzaremos este capítulo, dilecto lector, con la discusión detallada y un punto maniquea, y que tiene su aquél, de cómo se asigna valor a un *producto infinito de números complejos*.

Pasaremos seguidamente a mayores para abordar el *producto infinito de funciones holomorfas*. La principal herramienta para «construir» productos infinitos holomorfos es el teorema 7.13, llamado M de Weierstrass, que ilustraremos en primera instancia con tres preclaros productos infinitos: *la función generatriz de las particiones, el producto de Euler de la función* ζ *de Riemann* y *la factorización de Euler de la función seno*.

Usaremos, y hasta abusaremos, del teorema M de Weierstrass para construir funciones holomorfas con ceros dados, funciones meromorfas con polos y partes principales en ellos dados y funciones holomorfas que interpolan entre valores dados. Como ilustración central de toda esta técnica se exhibirá la construcción de la *función meromorfa* Γ *como producto infinito*.

Finalmente, como frutilla de la torta o guinda en el pastel, estudiamos las *propiedades algebraicas del anillo de las funciones holomorfas* y el teorema de Bers, ese que dice que isomorfía de anillos de funciones holomorfas equivale a biholomorfía de los dominios subyacentes.

¡Planazo! ¡Que no se demore!

7.1. Productos infinitos de números complejos

Supongamos que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos. Queremos «dar sentido» al producto de *todos* los términos de esa sucesión. Procediendo análogamente a cómo se define la suma de una serie, podríamos considerar la sucesión de productos parciales

$$\Big(\prod_{j=1}^{n} z_j\Big)_{n=1}^{\infty},$$

exigir que el límite de esta sucesión exista en $\mathbb{C}$ y así definir, si fuera el caso, el (valor de ese) producto infinito como ese límite. Y a fe que se podría definir de esta manera.

Pero para nuestros propósitos ulteriores esta definición tan natural adolece de ciertas carencias. La primera es que en cuanto haya un cero entre los términos de la sucesión a multiplicar, el producto así definido sería 0, independientemente de todos los demás términos. De manera que si el producto de $(z_n)_{n\geq 2}$, no converge (por ejemplo, $z_n = 2$, para $n \geq 2$), el mero añadido a la sucesión de *un primer término* $z_1 = 0$ lo haría converger; pero sería una convergencia ficticia[1].

Por otro lado, y en sentido opuesto, con este enfoque tan directo, podría ocurrir que un producto infinito de números valiera 0 sin que ninguno de los factores lo fuera.

[1] Pudiera parecer ésta una objeción bizantina, pero, créalo, lector, no lo es.

Por ejemplo, si $z_n = 1/2$, para $n \geq 1$, entonces la sucesión de productos parciales, $\prod_{j=1}^{n} 1/2^j = 2^{-n(n+1)/2}$, tiende a 0. Y eso no conviene, no, porque uno de nuestros objetivos es formar productos de funciones holomorfas que se anulen exactamente donde se anulen los factores.

Por todo esto, para introducir la noción de convergencia de productos infinitos de una sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ de números complejos distinguiremos, en alambicada casuística, varios casos, según aparezcan ceros o no entre los factores z_n.

1. Sin ceros: $z_n \neq 0$, para cada $n \geq 1$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j \quad \text{existe y es} \neq 0\,,$$

decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge y que el valor de ese producto infinito es

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j\,.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j$ no existe o existe y es cero, el producto infinito queda declarado inexorablemente como no convergente.

2. Número finito de ceros: si hubiera un número finito de ceros (y al menos uno) entre los términos a multiplicar, entonces decimos que el producto infinito converge sólo si el producto infinito quitando los factores nulos converge (es decir, por el caso (1. Sin ceros) si el límite de los productos parciales existe y no es nulo) y declaramos entonces que el valor del producto infinito es 0.

3. Infinitos ceros: si hubiera infinitos ceros en la sucesión, de partida y sin miramientos claudicamos y declaramos que el producto infinito no converge: simplemente no está definido.

Observe el lector que, por su mera definición, un producto infinito convergente es cero si y sólo si alguno de los factores z_n es cero.

Podemos compactar esta triple definición en la siguiente:

Definición 7.1 Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Decimos que el **producto infinito** $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ **converge** si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes

- sólo hay un número finito de índices n con $z_n = 0$ y, además,
- $$\lim_{n\to\infty} \prod_{\substack{j=1;\\ z_j\neq 0}}^{n} z_j \quad \text{existe y no es 0 (ni } \infty_{\mathbb{C}}) \,.$$

Para un producto infinito convergente, el **valor del producto infinito** es

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j \,;$$

valor que será 0 si y sólo si alguno de los z_j es 0.

☞ **Nota** 7.1.1. ☜ Cuando todos los z_n son no nulos, sólo en esta situación, y si fuera el caso que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j \quad \text{valiera 0 o valiera } \infty_{\mathbb{C}},$$

entonces hay gente que diría que el producto infinito **diverge** a 0 o a $\infty_{\mathbb{C}}$, respectivamente. Atención, en esta situación el producto infinito *no* converge. ♠

Reconozcamos, lector, todos a una y sin miramientos hipócritas, que es ésta una definición poco agraciada ... estéticamente hablando. Y, en primera impresión, adusta y hasta agria de carácter, a qué negarlo. Pero no se alarme, lector, porque tan sólo es una primera impresión, y que tras conocerla un poco su trato deviene amable y hasta fácil.

Observe lector que la convergencia o no de un producto infinito no depende de sus primeros factores, es decir, que dadas dos sucesiones $(z_n)_{n\geq 1}$ y $(w_n)_{n\geq 1}$, si para un cierto $N \geq 1$ se tiene que $z_n = w_n$ para $n \geq N$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$ converge.

Para las *series convergentes*, como sabemos, el término general converge a 0; para los productos infinitos convergentes, el término general tiende a 1:

Lema 7.1 (Término general de productos infinitos) *Si el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Si $z_n \neq 0$, para $n \geq N$, entonces se tiene que

$$z_n = \frac{\prod_{j=N}^{n} z_j}{\prod_{j=N}^{n-1} z_j}\,,$$

y numerador y denominador convergen a una misma cantidad, que es no nula. ■

Una costumbre notacional: como la convergencia de un producto infinito demanda que su término general tienda a 1, es frecuente escribir los factores del producto infinito en la forma

$$z_n = (1 + w_n)$$

donde los w_n son números complejos con firme voluntad de tender a 0.

La convergencia a 1 del término general z_n de un producto infinito no basta para concluir la convergencia del producto infinito; consulte lector el ejemplo 7.1.3

Siguen, lector, unos cuantos ejemplos de sucesiones $(z_n)_{n\geq 1}$ cuyos términos son todos no nulos y que son no convergentes por razones diversas o son convergentes.

EJEMPLO 7.1.1
$$\prod_{n=1}^{\infty} 1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\,.$$

Los z_n son no nulos y tienden a 1. Como
$$z_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\,,\quad \text{para todo } n\geq 1\,,$$
los productos parciales se escriben, cancelando factores,
$$\prod_{k=1}^{n} z_k=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}=\frac{1}{2}\,\frac{n+2}{n+1}\,.$$
De manera que
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} z_k=\frac{1}{2}\,,$$
y el producto infinito converge a $\frac{1}{2}$. ♣

EJEMPLO 7.1.2 *Si $z_n=2$, si n es par y $z_n=1/2$ si n es impar, el producto infinito no converge.*

La sucesión de productos parciales es $1/2, 1, 1/2, 1, \ldots$, que no converge. ♣

EJEMPLO 7.1.3 *Si $z_n=n/(n+1)$ para $n\geq 1$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge ya que $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n} z_j=0$.*

Los z_n son no nulos y tienden a 1. Los productos parciales son
$$\prod_{k=1}^{n} z_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},\quad \text{para cada } n\geq 1.$$
De manera que $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} z_k=0$, y el producto infinito no converge. ♣

EJEMPLO 7.1.4 *Si $z_n=(n+1)/n$ para $n\geq 1$, entonces $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{\infty} z_j=\infty_{\mathbb{C}}$, y por tanto, el producto infinito no converge.*

Los z_n son no nulos y tienden a 1. Los productos parciales son
$$\prod_{k=1}^{n} z_k=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=n+1\,,\qquad \text{para cada } n\geq 1;$$

De manera que $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k = \infty_{\mathbb{C}}$, y el producto infinito no converge. ♣

☞ **Nota** 7.1.2. ☜ Hay quienes dirían que el producto infinito del ejemplo 7.1.3 diverge a 0. Esos mismos dirían también que el producto infinito del ejemplo 7.1.4 diverge a infinito. ¡Cosas! ♠

Un ejemplo más, que nos dará algo de juego más adelante para contrastar alguna que otra noción.

Ejemplo 7.1.5 *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definimos una sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ mediante

$$\begin{aligned} z_{2n-1} &= 1 + a_n\,, \\ z_{2n} &= \frac{1}{1+a_n}\,, \end{aligned} \qquad \textit{para } n \geq 1\,.$$

Entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y, de hecho,

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 1\,.$$

Ningún z_n es cero. Denotemos con p_n el n-ésimo producto parcial. Se tiene

$$\begin{cases} p_{2n} = 1\,, \\ p_{2n-1} = 1 + a_n\,, \end{cases} \quad , \quad \text{para } n \geq 1\,.$$

Y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$. ♣

El logaritmo transforma productos en sumas y debería, si lo tiene a bien, ser capaz de trasladar la cuestión de la convergencia o no de un producto infinito en una pregunta sobre la convergencia de una serie. Como el lector bien sabe, el logaritmo «complejo» requiere cuidadoso manejo.

Lema 7.2 *Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos tal que $|z_n - 1| < 1$, para cada $n \geq 1$. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y solo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln} z_n$ es convergente.*

$\operatorname{Ln} z$ significa la rama principal del logaritmo definida en el plano complejo $\mathbb{C}$ salvo el eje real negativo y con argumentos entre $-\pi$ y π. En el enunciado se exige que $|z_n - 1| < 1$ y, por tanto, que $\Re(z_n) > 0$, de manera que podemos tomar $\operatorname{Ln} z_n$.

Para que un producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converja hace falta que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$, de manera que, en particular, ha de tenerse que $|z_n - 1| < 1$, para todo $n \geq N$, para un cierto N, y entonces el lema nos dice que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ convergerá si y sólo si $\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Ln} z_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN. Observe, lector, que $z_n \neq 0$, para cada $n \geq 1$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln} z_n$ converge, digamos, $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \operatorname{Ln} z_n = a \in \mathbb{C}$, entonces exponenciando se obtiene que $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} z_n = e^a \neq 0$, y $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

La implicación en la dirección contraria es algo más laboriosa. Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, digamos a $P \neq 0$. En particular, $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Escribamos $z_n = r_n e^{\imath\theta_n}$ con $r_n = |z_n|$ y con $\theta_n \in (-\pi, \pi)$. Como $z_n \to 1$, se tiene que $r_n \to 1$ y que $\theta_n \to 0$.

Como $\prod_{n=1}^{\infty} r_n = |P| \neq 0$, se tiene que $e^{\imath \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n} = P/|P|$, de donde como $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$, se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ converge, digamos a ϕ, que es tal que $e^{\imath\phi} = P/|P|$. De manera que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \operatorname{Ln} z_n &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\ln r_n + \imath\theta_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \Big(\ln(\prod_{n=1}^{m} r_n) + \imath \sum_{n=1}^{m} \theta_n \Big) = \ln|P| + \imath\phi\,,\end{aligned}$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln} z_n = \ln|P| + \imath\phi$. ■

7.1.1. Criterio de Cauchy para productos infinitos

Hay un criterio de Cauchy para la convergencia de productos de infinitos, análogo al criterio de Cauchy para la convergencia de series, que nos permite certificar que un producto infinito converge sin necesidad de exhibir el límite de los productos parciales.

Proposición 7.3 (Criterio de Cauchy para producto infinitos) *Sea* $(z_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números complejos. El producto infinito* $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge si y sólo si*

$(\star)$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* N *tal que* $\displaystyle\Big| \prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1 \Big| \leq \varepsilon\,,$

para cualesquiera n, m *tales que* $N \leq n < m$.

DEMOSTRACIÓN. Observe el lector que tanto la condición $(\star)$ como la propia convergencia implican que sólo hay un número finito de ceros entre los z_n. Asimismo, registremos, lector, que la condición $(\star)$ y la mera convergencia no dependen de cualquier número finito de los primeros factores, podemos suponer y suponemos que no hay ningún cero entre los z_n.

Supongamos que el producto infinito converge. Denotemos $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = P \neq 0$ y sea $\mu = \inf_{n\geq 1} \big| \prod_{j=1}^{n} z_j \big| > 0$. Acotamos, si $1 \leq n < m$, como sigue:

$$\Big| \prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1 \Big| = \Big| \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} z_j} \Big| \, \Big| \prod_{j=1}^{m} z_j - \prod_{j=1}^{n} z_j \Big| \leq \frac{1}{\mu} \Big| \prod_{j=1}^{m} z_j - \prod_{j=1}^{n} z_j \Big|\,.$$

De donde se deduce que la convergencia de $\prod_{n=1}^\infty z_n$ a P, cuando $n \to \infty$, implica que para N suficientemente grande se cumple la condición $(\star)$.

Supongamos ahora que se cumple $(\star)$. Observe el lector que, como consecuencia, la sucesión de productos parciales está acotada: sea $\nu = \sup_{n\geq 1} \big|\prod_{j=1}^n z_j\big|$. Acotamos, si $1 \leq n < m$, de la siguiente manera:

$$\Big|\prod_{j=1}^m z_j - \prod_{j=1}^n z_j\Big| = \Big|\prod_{j=1}^n z_j\Big|\Big|\prod_{j=n+1}^m z_j - 1\Big| \leq \nu\Big|\prod_{j=n+1}^m z_j - 1\Big|,$$

para concluir que la condición $(\star)$ implica que la sucesión de sucesión $\prod_{j=1}^n z_j$ (indexada en n) es de Cauchy y, por tanto, converge, digamos a un cierto P. Resta sólo comprobar que P no es cero. Pero si usamos la condición $(\star)$ con $\varepsilon = 1/2$, vemos que, fijando el correspondiente N de $(\star)$ y haciendo $m \uparrow \infty$, se tiene que

$$\Big|\lim_{m\to\infty} \prod_{j=N+1}^m z_j - 1\Big| \leq 1/2\,,$$

y, en particular, $0 \neq \lim_{m\to\infty} \prod_{j=N+1}^m z_j$, y, finalmente, $0 \neq \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^m z_j$, pues de partida y sin pérdida de generalidad habíamos podido suponer y supuesto que no había ceros entre los z_n. ■

Ya sabemos que si un producto infinito converge, entonces el término general tiende a 1. Seguidamente vemos con ayuda del criterio de Cauchy (de series) que si el término general tiende a 1 rápida y pertinentemente, entonces el producto infinito es convergente.

Proposición 7.4 *Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Escribamos $z_n = 1 + w_n$, para cada $n \geq 1$.*

Si $\sum_{n=1}^\infty w_n$ converge y $\sum_{n=1}^\infty |w_n|^2 < +\infty$, entonces $\prod_{n=1}^\infty z_n$ converge.

Para la verificación de la proposición 7.4 apelaremos a la aproximación, que se recoge en el lema siguiente, de la función holomorfa $\mathrm{Ln}(1+z)$ definida en $\mathbb{D}$ que tiene desarrollo en serie de potencias de z:

$$\mathrm{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Lema 7.5 *Se cumple que*

$$\big|\mathrm{Ln}(1+z) - z\big| \leq |z|^2\,, \quad \textit{para todo } z \textit{ tal que } |z| \leq 1/2\,.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\big|\mathrm{Ln}(1+z) - z\big| \leq \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}|z|^n \leq \frac{1}{2}|z|^2 \sum_{n=0}^\infty |z|^n = \frac{|z|^2}{2(1-|z|)}\,. \quad ■$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 7.4

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 < +\infty$, se tiene que $|w_n| \leq 1/2$, para $n \geq M$, para un cierto entero $M \geq 1$. Obviando los primeros términos de la sucesión, podemos suponer que $|w_n| \leq 1/2$, para todo $n \geq 1$.

Como, entonces

$$\big|\operatorname{Ln}(1+w_n) - w_n\big| \leq |w_n|^2 \quad \text{para cada } n \geq 1\,,$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 < +\infty$, el criterio de Cauchy para series nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln}(1+w_n)$ converge. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln}(1+w_n)$ converge, y exponenciando se deduce que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ converge. ■

Un producto infinito puede converger sin que se den ninguna de las dos condiciones de la proposición 7.4. Veamos.

Tomemos en el ejemplo 7.1.5 $a_n = 1/\sqrt{n}$, para $n \geq 1$, y los z_n allí definidos que son tales que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 1$. Pongamos $z_n = 1 + w_n$, para cada $n \geq 1$. Tenemos $w_{2n-1} = a_n$, para cada $n \geq 1$, así que $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 = \infty$. Pero, además,

$$w_{2n-1} + w_{2n} = \frac{a_n^2}{1+a_n} = \frac{1}{n+\sqrt{n}}\,, \quad \text{para } n \geq 1\,;$$

de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ no converge.

7.1.2. Productos infinitos de números reales positivos.

Analizamos seguidamente la convergencia de productos infinitos de números reales positivos.

Lema 7.6 (Convergencia de productos infinitos de números reales positivos)

1) *Si $x_n \geq 0$, para cada $n \geq 1$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.*

2) *Si $0 \leq x_n < 1$, para cada $n \geq 1$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.*

Para su demostración, y eventualmente en lo que sigue, usaremos la siguiente acotación elemental de la exponencial:

Lema 7.7 *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$1 + x \leq e^x\,.$$

Para todo $x \in [0, 1/2]$ se tiene que

$$e^{-2x} \leq 1 - x \leq e^{-x}\,.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.6. 1) Todos los factores $1+x_n$ son ≥ 1. La sucesión de productos parciales $\prod_{j=1}^{n}(1+x_j)$ es monótona no decreciente. Así que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ converge si y sólo la sucesión de productos parciales $\prod_{j=1}^{n}(1+x_j)$ está acotada superiormente.

Como $1+x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\prod_{j=1}^{n}(1+x_j) \leq e^{\sum_{j=1}^{n} x_j}.$$

Por tanto, si $\sum_{n=1}^{n} x_n < +\infty$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ converge.

Recíprocamente: como los x_n son positivos se tiene que

$$1+\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j)\,, \quad \text{para todo } n \geq 1\,.$$

Por tanto, si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.

2) Todos los factores $1-x_n$ cumplen $0 < 1-x_n \leq 1$. La sucesión de productos parciales $\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$ es monótona no creciente. Así que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ converge si y sólo si la sucesión de productos parciales $\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$ está acotada inferiormente con cota inferior > 0.

Como $1+x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\prod_{j=1}^{n}(1-x_j) \leq e^{-\sum_{j=1}^{n} x_j}.$$

Por tanto, si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.

Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $x_n \leq 1/2$, para $n > N$. Como $e^{-2x} \leq 1-x$, para $0 \leq x \leq 1/2$, se tiene, para $n > N$, que

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}(1-x_j) &= \prod_{j=1}^{N}(1-x_j) \prod_{j=N+1}^{n}(1-x_j) \geq \Big(\prod_{j=1}^{N}(1-x_j)\Big)\, e^{-2\sum_{j=N+1}^{n} x_j}\\ &\geq \Big(\prod_{j=1}^{N}(1-x_j)\Big)\, e^{-2\sum_{j=1}^{\infty} x_j} > 0\,.\end{aligned}$$

Puesto que hemos encontrado una cota inferior estrictamente positiva de los productos parciales $\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$, se sigue que $\prod_{j=1}^{\infty}(1-x_j)$ converge. ■

El lema 7.6 dilucida la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty} y_n$ donde los y_n son números positivos, en dos casos especiales: aquel en que $y_n \geq 1$, para todo $n \geq 1$, y aquel en que $y_n \in (0,1]$, para cada $n \geq 1$.

Supongamos que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números positivos que querríamos multiplicar. Clasificamos los y_n, en esta tarde primaveral, según sean mayores o no que 1. Escribamos los $y_n \geq 1$ como $y_n = 1 + x_n$, (así que $x_n \geq 0$), y los $y_n < 1$ como $y_n = 1 - x_n$ (así que estos x_n también son $x_n > 0$), y menores que 1. Es decir, pongamos $x_n = |y_n - 1|$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$, tenemos por una parte que $\prod_{y_n \geq 1} y_n$ converge y por otra que $\prod_{y_n<1} y_n$ asimismo converge, así que (compruébelo, lector) $\prod_{n=1}^{\infty} y_n$ converge. Aquí hemos usado ambas partes del lema 7.6.

Así que de que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - 1| < +\infty$ se deduce que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} y_n$ converge.

Pero el recíproco no es cierto, a pesar del lema 7.6, es decir, de que $\prod_{n=1}^{\infty} y_n$ converja, no se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - 1| < +\infty$. La razón es que de que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} y_n$ converja, no se deduce que los productos $\prod_{y_n \geq 1} y_n$ y $\prod_{y_n<1} y_n$ converjan.

Veamos. Si en el ejemplo 7.1.5 ponemos $a_n = 1/n$, para $n \geq 1$, de manera que $y_{2n} = n/(n+1)$ y $y_{2n-1} = (n+1)/n$, para cada $n \geq 1$, entonces se tiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty} y_n = 1\,,$$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} |y_{2n+1} - 1| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$, y $\sum_{n=1}^{\infty} |y_{2n} - 1| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1) = +\infty$ y, ambos, $\prod_{y_n \geq 1} y_n$ y $\prod_{y_n<1} y_n$ no convergen.

7.1.3. Comparación de productos finitos

El siguiente lema, y el subsiguiente corolario, tratan ambos de acotaciones y comparaciones de productos finitos de números complejos y nos serán de utilidad para comprobar convergencia de productos infinitos.

Lema 7.8 *Si $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\Big|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j) - 1\Big| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|) - 1\,.$$

Y también, claro,

$$\Big|\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\Big| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j - 1|) - 1\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\prod_{j=1}^{n}(1+z_j) - 1 = \sum_{j=1}^{n} z_j + \sum_{i\neq j} z_i\, z_j + \cdots$, tomando valor absoluto,

$$\Big|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j) - 1\Big| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| + \sum_{i\neq j} |z_i|\,|z_j| + \cdots = \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|) - 1\,.$$

■

Corolario 7.9 *Si $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, entonces para $1 \leq n \leq m$ se tiene que*

$$\Big|\prod_{j=1}^{m}(1+z_j) - \prod_{j=1}^{n}(1+z_j)\Big| \leq e^{\sum_{j=1}^{n}|z_j|}\big(e^{\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|} - 1\big)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el lema 7.8,

$$\Big|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)-\prod_{j=1}^{m}(1+z_j)\Big| = \Big|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)\Big|\,\Big|\prod_{j=n+1}^{m}(1+z_j)-1\Big|$$
$$\leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|)\,\Big(\prod_{j=n+1}^{m}(1+|z_j|)-1\Big).$$

La prueba concluye apelando a que $1+x\leq e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$. ■

7.1.4. Convergencia absoluta de productos infinitos

Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Pongamos $z_n = 1+w_n$, para cada $n\geq 1$.

Definición 7.2 *Se dice que el producto infinito* $\prod_{j=1}^{\infty} z_n = \prod_{j=1}^{\infty}(1+w_n)$ *converge absolutamente si* $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|w_n|)$ *converge.*

En virtud del lema 7.6 tenemos que la convergencia absoluta del producto $\prod_{j=1}^{\infty} z_n = \prod_{j=1}^{\infty}(1+w_n)$ equivale a que $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|<+\infty$.

En términos, sólo de los z_n: el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n-1|<+\infty$.

☞ **Nota** 7.1.3. ☜ No, lector, la convergencia absoluta del producto $\prod_{j=1}^{\infty} z_n$, no es la convergencia de $\prod_{j=1}^{\infty}|z_n|$, no; sino la de $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|z_n-1|)$.

♠

La convergencia absoluta implica la mera convergencia. Es éste, de hecho, el criterio más útil (y más utilizado, oiga) para comprobar la convergencia de productos infinitos.

Teorema 7.10 (Teorema básico de convergencia) *Sea* $(z_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números complejos. Si* $\prod_{j=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente, entonces* $\prod_{j=1}^{\infty} z_n$ *converge.*

En otros términos, si

$$(\star)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|z_n-1|<+\infty\,,$$

entonces

$$\prod_{j=1}^{\infty} z_n \qquad \textit{converge}\,.$$

Podemos escribir, y escribimos, este teorema en la forma alternativa

$$\sum_{j=1}^{\infty} |w_n| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \prod_{j=1}^{\infty}(1+w_n) \quad \text{converge}\,.$$

El teorema 7.10 afirma que si $z_n \to 1$ rápidamente, en el sentido de que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1| < +\infty$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN. La condición $(\star)$ del enunciado nos da inmediatamente que sólo hay un número finito de ceros entre los z_n. Por tanto, para probar convergencia podemos suponer y suponemos que no hay ceros entre los z_n.

Pongamos $w_n = z_n - 1$, para $n \geq 1$.

Apelemos al criterio de Cauchy para productos infinitos, proposición 7.3. Para enteros N, n, m tales que $1 \leq N \leq n < m$ se tiene, por el lema 7.8 y el lema 7.7, que

$$\begin{aligned}\Big| \prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1\Big| &= \Big| \prod_{j=n+1}^{m} (1+w_j) - 1\Big| \leq \prod_{j=n+1}^{m} (1+|w_j|) - 1 \leq \exp\Big(\sum_{j=n+1}^{m} |w_j|\Big) - 1 \\ &= \exp\Big(\sum_{j=n+1}^{m} |z_j - 1|\Big) - 1 \leq \exp\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |z_j - 1|\Big) - 1\,.\end{aligned}$$

Observe, lector, cómo en el último paso hemos reemplazado el rango de sumación de $n+1$ a m por el de N a ∞.

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ definido por $e^{\delta} - 1 = \varepsilon$ y a continuación fijamos un entero $N \geq 1$ tal que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |z_j - 1| \leq \delta$, para concluir que si $N \leq n < m$ entonces

$$\Big| \prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1\Big| \leq e^{\delta} - 1 = \varepsilon\,,$$

que es la condición de Cauchy.

Alternativamente, podemos deducir este teorema 7.10 como consecuencia de la proposición 7.4 sin más que observar que si $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$ entonces, primero, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, y además como $|w_n| \leq 1$ para $n \geq N$, para un cierto N, tenemos que $|w_n|^2 \leq |w_n|$ para $n \geq N$, y, por tanto, que $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 < +\infty$. ■

Le anunciamos al lector que en el contexto de productos infinitos de funciones holomorfas que nos ocupará seguidamente usaremos casi exclusivamente productos absolutamente convergentes.

La convergencia de un producto no implica su convergencia absoluta, es decir, el recíproco del teorema 7.10 no es válido.

EJEMPLO 7.1.6 *Volvemos al ejemplo 7.1.5. Tomamos $a_n = 1/n$ para cada $n \geq 1$, de manera que $z_{2n} = n/(n+1)$ y $z_{2n-1} = (n+1)/n$, para $n \geq 1$.*

Se tiene que $\prod_{n=1}^\infty z_n = 1$. Pero el producto $\prod_{n=1}^\infty z_n$ no converge absolutamente pues

$$\sum_{k=1}^\infty |z_{2k-1} - 1| = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty\,.$$

♣

En el siguiente ejemplo se analiza la convergencia absoluta y la convergencia de ciertos productos infinitos que quizás, lector, puedan servir como piedra de toque para contrastar tanto el lema 7.6 como el criterio del teorema 7.10.

EJEMPLO 7.1.7 *Convergencia de* $\prod_{n=1}^\infty (1 + \imath x_n)$*, donde* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión de números reales.*

Escribamos $1 + \imath x_n = \sqrt{1 + x_n^2}\, e^{\imath\theta_n}$, con $\theta_n \in (-\pi/2, \pi/2)$, para cada $n \geq 1$.

Observe, lector, que ninguno de los factores es 0, de manera que tan sólo hemos de preocuparnos de si la sucesión de productos parciales

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + \imath x_n) = \sqrt{\prod_{n=1}^N (1 + x_n^2)}\ \ e^{\imath \sum_{n=1}^N \theta_n}\,, \quad \text{para } N \geq 1\,,$$

converge o no, cuando $N \to \infty$.

Le presentamos, lector, dos juegos de hipótesis que equivalen a la convergencia de $\prod_{n=1}^\infty (1 + \imath x_n)$.

• Primero: $\prod_{n=1}^\infty (1 + \imath x_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < +\infty$ y $\sum_{n=1}^\infty \theta_n$ converge. Esto se sigue directamente de combinar el lema 7.2 y la parte 1) del lema 7.6.

•• Alternativamente, $\prod_{n=1}^\infty (1 + \imath x_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < +\infty$ y $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge.

Para verificar esta segunda equivalencia bastará con comprobar que bajo la hipótesis de que $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < +\infty$ entonces $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty \theta_n$ converge.

Usando la acotación (véase la nota 7.1.4)

$$(\star) \quad |x - \arctan x| \leq \frac{1}{4} x^2\,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,,$$

se tiene, en particular, que

$$|x_n - \theta_n| = |x_n - \arctan x_n| \leq x_n^2\,, \quad \text{para todo } n \geq 1\,,$$

y, por tanto, para $1 \leq N < M$, que

$$\Big| \sum_{n=N}^M x_n - \sum_{n=N}^M \theta_n \Big| \leq \sum_{n=N}^M x_n^2\,.$$

El criterio de Cauchy de convergencia de sucesiones nos da el resultado.

Finalmente, lector, las sucesiones $x_n = 1/n$, para $n \geq 1$ y $x_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ nos confirman que las condiciones $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente son independientes. ♣

☞ **Nota** 7.1.4. ☜ La desigualdad ($\star$) se deduce, por ejemplo, como sigue. Para $x > 0$, tenemos

$$x - \arctan x = \int_0^x \Big(1 - \frac{1}{1+u^2}\Big)\, du = \int_0^x \frac{u^2}{1+u^2}\, du\,.$$

Para $u > 0$ se tiene que $2u \leq (1+u^2)$, de manera que

$$x - \arctan x \leq \int_0^x \frac{u}{2}\, du = \frac{x^2}{4}\,.$$

♠

En cuanto a convergencia absoluta del producto $\prod_{m=1}^{\infty}(1 + \imath x_n)$, observe, lector, que $\prod_{m=1}^{\infty}(1 + \imath x_n)$ converge absolutamente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$.

Esta última condición implica que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$. Y estas dos condiciones equivalen a su vez, según hemos visto más arriba, a la mera convergencia del producto $\prod_{m=1}^{\infty}(1 + \imath x_n)$.

Si tomamos $x_n = (-1)^n/n$, para $n \geq 1$, el producto infinito $\prod_{m=1}^{\infty}(1 + \imath x_n)$ converge, pero no converge absolutamente. ♣

Reordenación de factores, subproductos y convergencia absoluta.

Los productos absolutamente convergentes gozan de dos propiedades de las que carecen, en general, los productos que son simplemente convergentes. En primer lugar, los factores de un producto absolutamente convergente se pueden reordenar arbitrariamente sin que esto afecte al producto resultante. Y, en segundo lugar, cualquier subproducto de un producto absolutamente convergente es asimismo (absolutamente) convergente. Recogemos estas propiedades en la siguiente proposición.

Proposición 7.11 *Si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente y si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación biyectiva, es decir, una permutación de $\mathbb{N}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ también converge* (*absolutamente*) *y, además,*

$$(\star) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} z_n = \prod_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}\,.$$

Además, si $(n_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión creciente de naturales, entonces $\prod_{k=1}^{\infty} z_{n_k}$ converge.

DEMOSTRACIÓN. La segunda parte del enunciado se sigue directamente de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_{n_k} - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1| < +\infty\,.$$

Respecto de la reordenación, observe, lector, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)} - 1| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1| < +\infty\,,$$

así que el producto reordenado $\prod_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ converge (absolutamente). Resta comprobar $(\star)$.

Para esta comprobación restante usaremos el siguiente lema, que podemos interpretar como de continuidad en $\infty_{\mathbb{N}}$ de la permutación σ.

Lema 7.12 *Sea σ una permutación de $\mathbb{N}$. Podemos «determinar» una función $\widehat{m}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\sigma\{1, 2, \ldots, \widehat{m}(n)\} \supset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Además, $\widehat{m}(n) \geq n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Simplemente, definimos $\widehat{m}(n) = \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(n)\}$. De que $\sigma\{1, 2, \ldots, \widehat{m}(n)\}$ tiene $\widehat{m}(n)$ elementos se sigue que $\widehat{m}(n) \geq n$. ■

Continuamos con la demostración de la proposición 7.11.

Para verificar $(\star)$ podemos suponer y suponemos que ninguno de los factores z_n es cero y entonces que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = P \neq 0$. Incluso, dividiendo si acaso el primer factor por P, que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 1$.

Denotemos $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$, para cada entero $n \geq 1$. Así que $\lim_{n\to\infty} P_n = 1$. Y sea $\mathcal{N}_n = \sigma\{1, 2, \ldots, \widehat{m}(n)\}$, para cada entero $n \geq 1$.

Ahora, para cada entero $n \geq 1$, se tiene que

$$\prod_{k=1}^{\widehat{m}(n)} z_{\sigma(k)} = P_n \cdot \prod_{\substack{k \in \mathcal{N}_n;\\ k>n}} z_k\,.$$

Además, por el lema 7.8 y la acotación $1 + x \leq e^x$, para $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\Big| \prod_{\substack{k \in \mathcal{N}_n;\\ k>n}} z_k - 1 \Big| \leq \exp\Big(\sum_{\substack{k \in \mathcal{N}_n;\\ k>n}} |z_k - 1| \Big) - 1 \leq \exp\Big(\sum_{k>n} |z_k - 1| \Big) - 1\,.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - 1| < +\infty$, deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\substack{k \in \mathcal{N}_n;\\ k>n}} z_k = 1\,.$$

Como además $\lim_{n\to\infty} P_n = 1$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\widehat{m}(n)} z_{\sigma(k)} = 1\,.$$

Finamente, como ya sabemos que $\prod_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)}$ converge, concluimos que

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\widehat{m}(n)} z_{\sigma(k)} = 1\,.$$

■

En el ejercicio 7.8.3 se recogen algunas virtudes adicionales de los productos infinitos absolutamente convergentes. Dicho queda.

7.2. Productos infinitos de funciones holomorfas

El teorema 7.13, de Weierstrass, es el criterio y teorema fundamental sobre convergencia de productos infinitos de funciones holomorfas, asunto éste al que vamos a dedicar con indecible entusiasmo e ilusión desbordada todo este capítulo.

Antes de enunciar este teorema de Weierstrass, introducimos, lector, un poco de notación y alguna definición conveniente.

A. Conjunto de ceros de una función holomorfa

Para una función g holomorfa en un dominio Ω, denotamos por $\mathcal{Z}(g)$ al **conjunto de ceros de** g. Si g no es idénticamente nula, entonces, por el principio de ceros aislados, $\mathcal{Z}(g)$ es un conjunto discreto de Ω, es decir, un conjunto sin punto alguno de acumulación en Ω.

Denotamos por $m(g, b)$ la **multiplicidad** de $b \in \Omega$ como cero de la función g; así que $m(g, b) = 0$ significa que g no se anula en b.

Conviene notar, lector, que si $g_1, g_2, \ldots, g_k$ son funciones holomorfas en el dominio Ω, entonces

$$m\big(\prod_{j=1}^{k} g_j, b\big) = \sum_{j=1}^{k} m(g_j, b)\,, \quad \text{para todo } b \in \Omega\,.$$

B. Derivada logarítmica de una función holomorfa

Para una función g holomorfa en un dominio Ω, definimos su **derivada logarítmica** $\mathcal{D}[g]$ como la función dada por

$$\mathcal{D}[g](z) = \frac{g'(z)}{g(z)}\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega \setminus \mathcal{Z}(g)\,.$$

La función $\mathcal{D}[g]$ es holomorfa en $\Omega \setminus \mathcal{Z}(g)$ y meromorfa en todo Ω, pues en cada cero b de g la función $\mathcal{D}[g]$ tiene un polo de orden 1 con residuo $m(g, b)$.

La derivada logarítmica aparece aquí, en el presente contexto de productos de funciones, porque si $g_1, \ldots, g_k$ son holomorfas en el dominio Ω, entonces

$$\mathcal{D}\Big[\prod_{j=1}^{k} f_j\Big] = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{D}[f_j]\,.$$

La razón del término «derivada logarítmica» se debe a que, formalmente, $\mathcal{D}[g]$ se obtiene tomando el logaritmo de g y luego derivando. En un entorno de cada punto a donde la función g no se anula, podemos tomar un logaritmo holomorfo h de g, es decir, una función holomorfa h tal que $e^h \equiv g$ en ese entorno y, entonces, $\mathcal{D}[g] = h'$.

7.2.1. Criterio M de Weierstrass, para productos infinitos

El siguiente teorema, llamado clásicamente M de Weierstrass, es el **criterio fundamental para crear funciones holomorfas como productos infinitos de funciones holomorfas**.

Teorema 7.13 (Teorema M de Weierstrass) *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω, ninguna de las cuales es idénticamente cero.*

Supongamos que para cada compacto $K \subset \Omega$ y para cada $n \geq 1$ existe $M_n > 0$ tal que

$$\text{CONDICIÓN } M\text{:} \qquad |1 - f_n(z)| \leq M_n\,, \quad \textit{para todo } z \in K\,,$$

y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$.

Entonces, para cada $z \in \Omega$ el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente.

La función $F(z) \triangleq \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, definida para todo $z \in \Omega$, cumple:

1) HOLOMORFÍA. *F es holomorfa en Ω.*
2) CONVERGENCIA. *Si denotamos $F_N(z) \triangleq \prod_{n=1}^{N} f_n(z)$ al producto parcial N-ésimo de las f_n, entonces la sucesión $(F_N)_{N\geq 1}$ converge uniforme y absolutamente sobre compactos de Ω hacia F, cuando N to ∞.*
3) CEROS. *$\mathcal{Z}(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}(f_n)$, y más aún,*

$$m(F, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z) \quad \textit{para todo } z \in \Omega\,.$$

4) DERIVADA LOGARÍTMICA. *Para cada $z \in \omega \setminus \mathcal{Z}(F)$ se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)}\,.$$

De hecho,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \overset{\Omega\setminus\mathcal{Z}(F)}{\Longrightarrow} \frac{F'(z)}{F(z)}\,.$$

Observe, lector, que la sucesión $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ de la condición M puede, en general, depender del compacto K. Quizás debiera notarse como M_n^K, pero hemos preferido simplemente M_n por no sobrecargar.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $z \in \Omega$, la convergencia *absoluta* del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ se sigue de la condición M aplicada al compacto $K = \{z\}$ y del teorema 7.10.

Prueba de 1) *y* 2). Fijemos un compacto $K \subset \Omega$ y sea M_n la sucesión asociada a K que nos da la condición M. Denotemos por $H = \sum_{j=1}^{\infty} M_j < +\infty$.

El corolario 7.9 nos da que para $1 \leq n \leq m$ y para $z \in K$

$$\Big| \prod_{j=1}^{n} f_j(z) - \prod_{j=1}^{m} f_j(z) \Big| \leq e^{\sum_{j=1}^{n} M_j} \big(e^{\sum_{j=n+1}^{m} M_j} - 1 \big) .$$

Manteniendo fijo $z \in K$ y haciendo $m \uparrow \infty$, deducimos que

$$|F(z) - F_n(z)| \leq e^{\sum_{j=1}^{n} M_j} \big(e^{\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j} - 1 \big) \leq e^{H} \big(e^{\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j} - 1 \big) .$$

Esta acotación nos da la convergencia uniforme de F_n a F sobre K, puesto que $\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, tenemos 2) la convergencia uniforme sobre compactos de F_n hacia F y, consecuentemente, 1) la holomorfía de F en todo Ω, por el teorema 5.14.

Prueba de 3). Como, por la propia definición de convergencia de productos infinitos, $F(z) = 0$ si y sólo si $f_n(z) = 0$ para algún $n \geq 1$, vemos que $\mathcal{Z}(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}(f_n)$.

Supongamos ahora que b es un cero de F. Este b será cero de un número finito de las f_n. Reordenando los factores si fuera necesario podemos suponer que $f_j(b)$ para $1 \leq j \leq N$, y que $f_j(b) \neq 0$ para $j > N$. La supuesta reordenación de factores es inocua, en virtud de la proposición 7.11.

Sea G la función holomorfa $G(z) = \prod_{j>N} f_j(z)$. Esta función G no se anula en b, es decir, $m(G, b) = 0$.

El producto finito $H(z) = \prod_{j=1}^{N} f_j(z)$ tiene en b un cero de orden $m(H, b) = \sum_{j=1}^{N} m(f_j, b)$. Como F es el producto $F \equiv HG$, tenemos que

$$m(F, b) = m(H, b) + m(G, b) = m(H, b) = \sum_{j=1}^{N} m(f_j, b) ,$$

como queríamos verificar.

Prueba de 4). Por el teorema de convergencia de Weierstrass, teorema 5.14, tenemos que $F_N' \overset{\Omega}{\Longrightarrow} F'$, cuando $N \to \infty$. Por tanto,

$$\frac{F_N'}{F_N} \overset{\Omega \setminus \mathcal{Z}(F)}{\Longrightarrow} \frac{F'}{F} .$$

Ahora bien, para cada N tenemos que si $z \notin \mathcal{Z}(F_N)$, en particular, si $z \notin \mathcal{Z}(F)$,

$$\frac{F_N'(z)}{F_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,,$$

Por consiguiente,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega \setminus \mathcal{Z}(F)\,.$$

■

EJEMPLO 7.2.1

$$\prod_{n=0}^{\infty} \big(1 + z^{2^n}\big) = \frac{1}{1-z}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Consideremos la sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ dadas por

$$f_n(z) = 1 + z^{2^n} \quad \text{para } n \geq 0 \text{ y } z \in \mathbb{D}\,.$$

Para $r \in (0,1)$ y para $|z| \leq r$, se tiene que

$$|1 - f_n(z)| \leq r^{2^n},$$

y como $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} < +\infty$, vemos que se cumple la condición M del teorema 7.13 en el compacto $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$.

Así que

$$F(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n})$$

define una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Como $\mathcal{Z}(f_n) = \emptyset$, para cada $n \geq 0$, se tiene que F no se anula en el disco unidad.

Para $N \geq 0$, sea F_N el producto parcial $F_N(z) = \prod_{n=1}^{N}(1 + z^{2^n})$. Por inducción, se comprueba que para cada $N \geq 1$ se cumple

$$F_N(z)(1-z) = (1 - z^{2^{N+1}})\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

y, por consiguiente, haciendo $N \uparrow \infty$, deducimos que

$$F(z) = \frac{1}{1-z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}$$

es decir,

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Nótese que, de hecho,

$$F_N(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{2^{N+1}-1} = \sum_{j=1}^{2^{N+1}-1} z^j\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Al tomar derivada logarítmica de F obtenemos que

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,. \qquad \clubsuit$$

7.2.2. Función P generatriz de las particiones

Consideremos el producto infinito en $\mathbb{D}$, dado por

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^j}\,.$$

Para $|z| \le r < 1$ y $j \ge 1$, se tiene que

$$\Big|1 - \frac{1}{1-z^j}\Big| = \frac{|z|^j}{|1-z^j|} \le \frac{r^j}{|1-z^j|} \le \frac{1}{1-r}\, r^j\,.$$

El criterio M de Weierstrass, teorema 7.13, nos da que $P(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y además que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Escribimos el desarrollo en serie de potencias de z de $P(z)$ en la forma:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, z^n\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Simplemente, por ahora, $p(n)$ es el coeficiente n-ésimo del desarrollo de la función $P(z)$. Observe lector, que $p(0) = 1$.

Una **partición del número** $n \ge 1$ es un conjunto de enteros ≥ 1 cuya suma da n. Al decir «conjunto» indicamos que el orden de los sumandos no es relevante. Así $3 = 1 + 2$ y $3 = 2 + 1$ son la misma partición de $n = 3$. A los sumandos se les llama **partes de la partición**. El número 5 tiene las siguientes siete particiones:

$$\begin{aligned}
&5 = 1+1+1+1+1+1\\
&5 = 1+1+1+2\\
&5 = 1+2+2\\
&5 = 1+1+3\\
&5 = 2+3\\
&5 = 1+4\\
&5 = 5
\end{aligned}$$

Convencional y convenientemente, declaramos que el número de particiones del número 0 es 1. Somos así de generosos.

Podemos representar las particiones como listas. Una partición de n es una sucesión $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ de números enteros $R_j \ge 0$ y $R_m > 0$ de manera que

$$\sum_{j=1}^{m} j R_j = n\,.$$

Aquí cada R_j indica el número de veces que aparece la parte j en la partición. Por tanto, $m \leq n$ y la parte mayor de la partición es m. Con esta notación, las siete particiones de $n = 5$ de antes se escriben

$$(5)\,, \quad (3,1)\,, \quad (1,2)\,, \quad (2,0,1)\,, \quad (0,1,1)\,, \quad (1,0,0,1)\,, \quad (0,0,0,0,1).$$

Fijemos un entero $k \geq 1$ y consideremos el producto parcial finito

$$P_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - z^j}.$$

Esta función racional $P_k(z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Denotemos su desarrollo en serie de potencias de z por

$$P_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_k(n)\, z^n\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Desarrollando, para $1 \leq j \leq k$,

$$\frac{1}{1 - z^j} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{mj},$$

y multiplicando, vemos que

$$p_k(n) = \text{‘número de particiones de } n \text{ con partes de tamaño} \leq k\text{’}\,.$$

Como

$$P(z) = P_n(z) \prod_{j>n} \frac{1}{1 - z^j} = P_n(z)\big(1 + \text{‘términos de grado} \geq n+1\text{’}\big)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} p(n) = p_n(n) &= \text{‘número de particiones de } n \text{ con partes de tamaño} \leq n\text{’} \\ &= \text{‘número de particiones de } n\text{’} \end{aligned}.$$

Es por esto que a $P(z)$ se le denomina **función generatriz de las particiones:** su coeficiente n-ésimo, $p(n)$, es el número de particiones distintas del número n.

Como $P(z)$ no se anula en el dominio simplemente conexo $\mathbb{D}$, podemos tomar un logaritmo holomorfo $\ln P(z)$, que, como $P(0) = 1$, queda unívocamente determinado si exigimos, y exigimos, que $\ln P(0) = 0$. Pues bien:

Lema 7.14

$$\ln P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{z^k}{1 - z^k}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,. \tag{7.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $m \geq 1$, consideramos la función $g_m(z) = \ln(1/(1 - z^m)$, que vale 0 en $z = 0$. Cada función $g_m(z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ y se desarrolla en potencias de z como

$$g_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, z^{km}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Observe, lector, que $|g_m(z)| \leq g_m(|z|)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Tome nota, asimismo, lector, de que

$$(\star) \qquad \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |z|^{mk} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{|z|^k}{1 - |z|^k} \leq \frac{1}{1-|z|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |z|^n \\ &= \frac{1}{1-|z|} \ln \frac{1}{1-|z|} < +\infty\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,. \end{aligned}$$

El cambio de orden de sumación en $(\star)$ está justificado pues se trata de términos nonegativos.

De $(\star)$ se deduce que

$$G(z) \triangleq \sum_{m=1}^{\infty} g_m(z)$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ y que $G(z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Con un cambio de orden de sumación que, de nuevo, la acotación $(\star)$ legaliza, se tiene que

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \frac{z^k}{1 - z^k}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Finalmente, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\exp(G(z)) = \lim_{N \to \infty} \exp\Big(\prod_{m=1}^{N} g_m(z) \Big) = \lim_{N \to \infty} \prod_{m=1}^{N} \frac{1}{1 - z^m} = P(z)\,.$$

■

Al mirar (con interés) el enunciado del lema 7.14, al lector se le habrá ocurrido sin duda que una posible ruta para verificar su veracidad (la del lema) pasa por tomar logaritmos. ¿Verdad, lector? Al fin y al cabo, la derivada de la izquierda de la fórmula (7.1) es la derivada logarítmica de un producto infinito que admite una expresión como serie por el criterio M de Weierstrass, mientras que la de la derecha es una serie, por el teorema 5.14 de Weierstrass y la convergencia uniforme sobre compactos a $G(z)$ que hemos justificado en la demostración del lema 7.14. Además, los dos lados de (7.14) valen 0 en $z = 0$.

Veamos. Queremos verificar que $\ln P(z)$ coincide con la función $G(z)$ de la demostración del lema 7.14. La derivada de $\ln P(z)$ es la serie

$$(\ln P)'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, \frac{z^{j-1}}{1 - z^j}\,.$$

La derivada de $G(z)$ es, derivando sumando a sumando,

$$G'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(1-z^j)^2}\,.$$

¡Vaya! Los sumandos de cada índice j no coinciden. ¿Y entonces? ¡Ah!, pero es que no estamos tratando con series de potencias. Veamos. Cambiemos el índice de sumación de la serie de G de j a k y apelemos a que

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j\, w^{j-1}\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}\,,$$

para deducir que

$$\begin{aligned} G'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(1-z^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} j z^{kj-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j z^{kj-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{1-z^j} = (\ln P)'(z)\,. \end{aligned}$$

El cambio de orden de sumación que acabamos de llevar a cabo se justifica cabalmente con el mismo argumento que en la prueba del lema 7.14. ¡Vaya susto!

7.2.3. Función ζ como producto infinito

La función ζ se ha definido, véase el apartado 5.2.2, mediante la serie (de Dirichlet)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

La función ζ es holomorfa en $\mathbb{H}_1$.

El objetivo de este apartado es discutir la siguiente **representación de Euler de la función** ζ como producto infinito:

$$\boxed{\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1-1/p^z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_1} \tag{7.2}$$

Cuando escribimos y escribamos $\prod_p$ significamos producto infinito indexado con la sucesión de números primos ordenados de forma creciente. Denotamos con p_n el n-ésimo primo: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$. Observe el lector que $p_n > n$ para todo $n \geq 1$.

1) Recordemos que, para a real y $a > 0$, la expresión a^z significa $a^z = e^{\ln(a)z}$, donde $\ln(a)$ es el logaritmo usual (como número real) de a. Así que $z \mapsto a^z$ define

una función entera, que no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$. Observe el lector que $|a^z| = a^{\Re(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si fijamos un primo p, la función $z \in \mathbb{C} \mapsto 1 - (1/p^z)$ es entera, y se anula en los puntos $\frac{2\pi\imath}{\ln(p)}k$, con $k \in \mathbb{Z}$, que están todos ubicados en el eje imaginario.

2) Para justificar la fórmula (7.2) de Euler, primero, a), construimos y analizamos el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{p_n^z}\Big)$$

como función holomorfa en $\mathbb{H}_1$. Para, seguidamente, b) comprobar que, en efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{p^z}\Big)}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{H}_1\,,$$

es decir, la identidad (7.2).

2.a) Comenzamos introduciendo, para cada $n \geq 1$, la función auxiliar f_n dada por

$$f_n(z) = 1 - \frac{1}{p_n^z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Cada $f_n(z)$ es una función entera y se anula solo en el eje imaginario.

Fijemos una abscisa $\sigma > 1$. Para $z \in \mathbb{H}_\sigma$, tenemos que

$$|1 - f_n(z)| = \Big|\frac{1}{p_n^z}\Big| = \frac{1}{p_n^{\Re(z)}} \leq \frac{1}{p_n^\sigma} < \frac{1}{n^\sigma}\,,$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < +\infty$, deducimos que se cumple la condición M del teorema 7.13, pues cada compacto $K \subset \mathbb{H}_1$ esta contenido en un semiplano $\mathbb{H}_\sigma$, para algún $\sigma > 1$.

Por consiguiente, el producto infinito

$$F(z) \triangleq \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{p_n^z}\Big) = \prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p^z}\Big)$$

define una función holomorfa en $\mathbb{H}_1$.

Observe el lector que cada función f_n no se anula en ningún punto del semiplano $\mathbb{H}$, y por tanto, en particular, no se anula en el semiplano $\mathbb{H}_1$.

Por consiguiente, el producto infinito F no se anula en todo el semiplano $\mathbb{H}_1$.

2.b) Pasamos seguidamente a comprobar la conexión de este producto F, o mejor, de su recíproco $1/F$, con la función ζ.

Para cada entero $N \geq 1$, denotemos por $\mathcal{S}_N$ al conjunto que consiste de 1 y de todos aquellos números naturales que en su factorización en primos sólo intervienen los N primeros primos $p_1, \ldots, p_N$.

Para cada entero $N \geq 1$, tenemos la siguiente expresión explícita de producto parcial $1/F_N$ donde $F_N(z)$ es el producto parcial $\prod_{n=1}^N f_n(z)$: para $z \in \mathbb{H}_1$, se cumple que

$$\frac{1}{F_N(z)} = \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^z}} = \prod_{n=1}^N \Big(1+\frac{1}{p_n^z}+\frac{1}{p_n^{2z}}+\cdots\Big)$$
$$= \sum_{\alpha_1\geq 0}\cdots\sum_{\alpha_N\geq 0}\Big(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_N^{\alpha_N}}\Big)^z = \sum_{k\in\mathcal{S}_N}\frac{1}{k^z}\,.$$

Observe el lector cómo en el argumento anterior se han multiplicado un *número finito* de series absolutamente convergentes.

Podemos ya comparar $1/F_N(z)$ con $\zeta(z)$ para $z \in \mathbb{H}_1$; acotamos la diferencia

$$\Big|\frac{1}{F_N(z)}-\zeta(z)\Big| = \Big|\sum_{n\notin\mathcal{S}_N}\frac{1}{n^z}\Big| \leq \sum_{n\notin\mathcal{S}_N}\frac{1}{n^{\Re(z)}} \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n^{\Re(z)}},$$

donde hemos usado en la última acotación que si $n \notin \mathcal{S}_N$ entonces $n > p_{N+1}$ y, por tanto, que $n > N+1 > N$.

Manteniendo fijo $z \in \mathbb{H}_1$ y haciendo $N \uparrow \infty$, deducimos que

$$\lim_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{F_N(z)}-\zeta(z)\Big| = 0\,,$$

y, por tanto, como queríamos ver, que

$$\prod_p \frac{1}{1-1/p^z} = \frac{1}{F(z)} = \zeta(z)\,, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{H}_1\,,$$

cerrando así la justificación de la representación (7.2)

Proposición 7.15 *La función ζ no se anula en $\mathbb{H}_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue de que $F(z)\,\zeta(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{H}_1$. ■

Proposición 7.16 *La función F, recíproco de ζ, puede representarse, en términos de la función de Möbius, como*

$$F(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^z}\,, \quad \textit{para } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

Así que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1-1/p^z}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

La función de Möbius μ es la función aritmética dada por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{si } n \text{ es producto de } k \text{ primos distintos}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $|\mu(n)| \leq 1$ para cada $n \geq 1$, la función

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

define una función holomorfa en $\mathbb{H}_1$. Consulte el lector el apartado 5.2.2.

DEMOSTRACIÓN. Observe el lector que para $N \geq 1$ y para $z \in \mathbb{H}_1$ se tiene que

$$F_N(z) = \prod_{n=1}^{N} (1 - 1/p_n^z) = 1 - \sum_{n \leq N} \frac{1}{p_n^z} + \sum_{\substack{n \neq m; \\ n,m \leq N}} \frac{1}{p_n^z p_m^z} - \cdots = \sum_{n \in S_N} \frac{\mu(n)}{n^z} .$$

Por tanto, para $z \in \mathbb{H}_1$, se tiene que

$$\Big| F_N(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \Big| = \Big| \sum_{n \notin S_N} \frac{\mu(n)}{n^z} \Big| \leq \sum_{n \notin S_N} \frac{1}{n^{\Re(z)}} \leq \sum_{n > N} \frac{1}{n^{\Re(z)}}$$

de donde, haciendo $N \uparrow \infty$, con $z \in \mathbb{H}_1$, se concluye la demostración. ■

Proposición 7.17

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo x real con $x > 1$, tenemos que

$$\zeta(x) \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^x}\Big) = 1 ,$$

Como $p^x > 2$, se cumple, véase el lema 7.7, que

$$e^{-2 \sum_p 1/p^x} \leq \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^x}\Big) ,$$

y, por tanto,

$$\ln(\zeta(x)) \leq 2 \sum_p \frac{1}{p^x} \leq 2 \sum_p \frac{1}{p} .$$

En la última desigualdad hemos usado que $x > 1$. El resultado se sigue de que $\lim_{x \downarrow 1} \zeta(x) = +\infty$. ■

Derivada logarítmica de ζ y funciones Φ y Υ

De la representación (7.2) de la función ζ como producto infinito se deduce que su derivada logarítmica se expresa

$$(\star) \qquad \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_p \frac{\ln(p)}{p^z - 1}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

Observe el lector, quizás tras consultar el ejemplo 5.2.3, que el miembro derecho de $(\star)$ es, salvo signo, la expresión definitoria de la función Υ. Por consiguiente, tenemos que

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \Upsilon(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

Recuerde, lector, de este vistazo rápido al ejemplo 5.2.3, que Λ es la función (aritmética) de von Mangoldt.

La expresión $(\star)$ de ζ'/ζ es muy parecida a la de la función $-\Phi$. Recuerde, lector, que la función Φ apareció en el ejemplo 5.2.2 y está definida por

$$\Phi(z) = \sum_p \frac{\ln(p)}{p^z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

Nos permitimos volver a enunciar, ahora en términos de la derivada logarítmica ζ'/ζ y de Φ, la comparación entre Υ y Φ recogida en la proposición 5.18.

Proposición 7.18 *Existe una función holomorfa D en $\mathbb{H}_{1/2}$ tal que*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \Phi(z) + D(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

En otros términos, $\zeta'(z)/\zeta(z) + \Phi(z)$ es (se extiende a ser) holomorfa en $\mathbb{H}_{1/2}$.

7.2.4. Función seno: fórmula de Euler como producto infinito

La fórmula de Euler que expresa la función seno, o mejor, la función $z \mapsto \operatorname{sen}(\pi z)$, como producto infinito reza así:

$$(7.3) \qquad \boxed{\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}}$$

En su comprobación, se derivará una representación en fracciones simples igualmente fascinante:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}}$$

☞ **Nota** 7.2.1. ☜ Poniendo $z = \imath$ en la representación de Euler obtenemos el sorprendente (¿verdad, lector?) resultado de que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\,.$$

Poniendo $z = 1$, se concluye que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)=\lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi\, z\,(1-z^2)}=\frac{1}{2}\,.$$

Consulte, lector, el ejemplo 7.1.1, en el que como uno de los primeros ejemplos de productos infinitos ya habíamos obtenido este último resultado exhibiendo la sencilla fórmula explícita de los productos parciales. ¿Ve el lector una fórmula cerrada manejable para los productos parciales

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)?$$

♠

La función $\operatorname{sen}(\pi z)$ se anula exactamente en los enteros $\mathbb{Z}$. ¡Qué cosas!

El producto infinito $\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-z^2/n^2\big)$ que aparece en la representación de Euler de la ecuación (7.3) y que vamos a construir seguidamente se anula asimismo exactamente en $\mathbb{Z}$. ¡Vaya por Dios!

Discutimos primero este producto infinito, para luego compararlo con $\operatorname{sen}\pi z$.

a) *Producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$ para $z\in\mathbb{C}$.

Para cada $n\geq 1$, definamos la función entera f_n dada por

$$f_n(z)=1-\frac{z^2}{n^2}\,,\quad\text{para todo } z\in\mathbb{C}\,;$$

f_n es un polinomio de orden 2 que se anula en $z=n$ y $z=-n$.

Sea F la función definida por

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)\,.$$

Si $|z|\leq R$, podemos acotar $|f_n(z)-1|\leq R^2/n^2$. Por tanto, por el criterio M de Weierstrass para productos infinitos, tenemos que F es un función entera que se anula exactamente (una vez) en cada entero no nulo.

☞ **Nota** 7.2.2. ☜ Observe el lector que al producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)$ no le podríamos haber aplicado el criterio de Weierstrass. De hecho, este producto no converge para z real, salvo, en el caso $z=0$. ♠

b) *Comparación del producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$ *con la función* $\operatorname{sen}\pi z$.

Sea
$$G(z)=\pi\, z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)=\pi z F(z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$
La función G es una función entera que se anula exactamente en los números enteros con multiplicidad 1, es decir, $m(G,z)=0$, si $z\notin\mathbb{Z}$, y $m(G,z)=1$, si $z\in\mathbb{Z}$. Nótese la inopinada aparición del factor π.

Como las funciones $\operatorname{sen}(\pi z)$ y $G(z)$ se anulan ambas exactamente en los números enteros, con las mismas multiplicidades, ceros simples, de hecho, tenemos que su cociente es una función entera que no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$. Podemos, por tanto, pues $\mathbb{C}$ es simplemente conexo (consulte, lector, si acaso, el apartado 1.8), escribir
$$(\star)\qquad \operatorname{sen}(\pi z)=\pi\, z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)\,e^{H(z)},$$
donde H es una cierta función entera.

Para completar la verificación de la factorización del seno dada por la ecuación (7.3), hemos de comprobar que la función H es, de hecho, una constante. Si así fuera, ya habríamos terminado, porque si dividiéramos por πz la expresión $(\star)$ e hiciéramos tender z a 0, obtendríamos que $1=e^H$.

Para ver que H es constante, comenzamos derivando (logarítmicamente) ambos miembros de $(\star)$ para obtener que
$$\pi\operatorname{cotan}(\pi z)=\frac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n^2-z^2}+H'(z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,.$$
Observe, lector, que como la función cotangente es impar, de esta expresión se deduce que H' es asimismo una función impar, es decir, $H'(-z)=-H'(z)$, para todo $z\in\mathbb{C}$.

Impasibles, sin perder la cara y mirando al tendido, volvemos a derivar, para obtener que
$$(\star\star)\qquad \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z+n)^2}-H''(z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,.$$

☞ **Nota** 7.2.3. ☜ Para obtener $(\star\star)$ puede resultar de utilidad la expresión
$$\frac{2z}{n^2-z^2}=\frac{1}{n-z}-\frac{1}{n+z}$$
para $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ y $n\in\mathbb{Z}$. ♠

Seguidamente probaremos que $H''\equiv 0$. Supongamos por el momento que ese es el caso y antes de continuar con el argumento formulemos dos observaciones. La primera observación es que si $H''\equiv 0$ entonces
$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z+n)^2}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},$$

o, mejor,

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,.$$

Observe, lector, que en cada z entero ambos lados de la descomposición anterior tienen un polo.

Y, en segundo lugar, observemos que en cuanto probemos que $H'' \equiv 0$ ya habremos terminado. La razón es que de que $H'' \equiv 0$ deduciríamos que H' debería ser constante, pero como se trata de una función impar, ese valor constante de H' habría de ser 0, lo que nos daría que H sería constante, lo que, finalmente, como ya adujimos más arriba, concluiría la demostración de la factorización (7.3) de Euler del $\operatorname{sen}(\pi z)$.

Resta, pues, probar que $H'' \equiv 0$. Reescribamos ($\star\star$):

$$H''(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} - \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}\,.$$

Esta expresión es válida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. El miembro izquierdo es una función entera: los enteros son singularidades evitables para la función de la derecha.

Observe el lector que H'' goza de las propiedades de invariancia siguientes:

$$H''(z+1) = H''(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

y, además,

$$H''(-z) = H''(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Consideremos la región (cerrada) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \le 1/2\,,\ \Im(z) \ge 0\}$.

Por las invariancias de H'', si probáramos que H'' está acotada en $\mathcal{R}$, entonces estaría acotada en todo $\mathbb{C}$ y, por el teorema de Liouville, deduciríamos que H'' es constante. Pero en realidad queremos concluir que $H'' \equiv 0$, y no solo que H'' es constante.

Probaremos a continuación que

$$(\dagger) \quad \lim_{\substack{|z|\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} |H''(z)| = \lim_{\substack{\Im(z)\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} |H''(z)| = 0\,.$$

Nótese que en la región $\mathcal{R}$, son equivalentes $|z| \to \infty$ y a $\Im(z) \to \infty$. De que el límite ($\dagger$) es finito deducimos que H'' es acotada en $\mathcal{R}$ y, por tanto, que H'' es constante en todo $\mathbb{C}$, pero como además el límite en ($\dagger$) es 0, deducimos adicionalmente que ese valor constante de H'' ha de ser 0.

Para comprobar ($\dagger$), verificaremos por separado que

$$(\dagger_1) \quad \lim_{\substack{|z|\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} \left|\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}\right| = \lim_{\substack{\Im(z)\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} \left|\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}\right| = 0$$

y que

$$(\dagger_2) \qquad \lim_{\substack{|z|\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\Big| = \lim_{\substack{\Im(z)\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\Big| = 0\,.$$

Para $w = x+iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, el módulo de $\operatorname{sen}(w)$ se puede expresar:

$$|\operatorname{sen}(w)|^2 = \operatorname{senh}^2(y) + \operatorname{sen}^2(x) \geq \operatorname{senh}^2(y)\,.$$

Por tanto,

$$\Big|\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}\Big| \leq \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2(\pi y)}\,,$$

de donde se sigue $(\dagger_1)$.

Para $(\dagger_2)$, acotamos primero

$$\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\Big| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\frac{1}{z+n}\Big|^2.$$

Cada sumando, individualmente, tiende a 0 cuando $|z| \to \infty$, pero necesitamos la convergencia de la suma infinita. Para entero $N \geq 1$ y $z \in \mathcal{R}$, podemos acotar

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\Big| &\leq \sum_{|n|\leq N} \Big|\frac{1}{z+n}\Big|^2 + 2\sum_{n\geq N+1} \frac{1}{(n-1/2)^2}\\ &\leq \sum_{|n|\leq N} \Big|\frac{1}{z+n}\Big|^2 + 2\sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2}\,.\end{aligned}$$

Como para cada n fijo se tiene que $\lim_{|z|\to\infty} |1/(z+n)|^2 = 0$, podemos concluir que, para todo entero $N \geq 1$, se tiene que

$$\limsup_{\substack{|z|\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\Big| \leq 2\sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2}\,.$$

Haciendo $N \to \infty$, se deduce finalmente que

$$\limsup_{\substack{|z|\to\infty;\\ z\in\mathcal{R}}} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\Big| = 0\,,$$

completando así la verificación de $(\dagger_2)$.

A. Producto infinito para coseno

Y el coseno, ¡eh!, ¿qué pasa con el coseno? Para el coseno se tiene la siguiente y correspondiente factorización como producto infinito:

$$\boxed{\cos(\pi z) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}}$$

Esta representación puede obtenerse con un argumento análogo al que ha permitido obtener la factorización del seno, pero es más eficiente, a estas alturas, deducirla directamente de la del propio producto infinito del seno usando la identidad trigonométrica

$$\cos(\pi z) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi z)}{2\operatorname{sen}(\pi z)}\,.$$

Véase el ejercicio 7.8.10.

B. La suma de Basilea $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

La clásica fórmula de Euler

$$\boxed{\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

puede obtenerse, por ejemplo, a partir de la identidad

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\,.$$

Veamos. Restando $1/z^2$ de ambos lados y pasando al límite cuando $z \to 0$ se tiene que

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{z\to 0}\Big(\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2}\Big)\,.$$

Usando el desarrollo de Taylor del seno alrededor de $z=0$ se deduce que

$$\lim_{z\to 0}\Big(\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2}\Big) = \lim_{z\to 0}\Big(\frac{\pi^2 z^2 - \operatorname{sen}^2(\pi z)}{z^2\operatorname{sen}^2(\pi z)}\Big) = \lim_{z\to 0}\frac{\pi^3 z^3/3}{\pi^2 z^3} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Por tanto,

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Podemos obtener asimismo la suma de Basilea del propio producto infinito para el seno. Veamos. Para $N \geq 1$, denotemos por $P_N(z)$ al producto parcial

$$P_N(z) = \pi z\prod_{n=1}^{N}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Para cada $N \geq 1$, este $P_N(z)$ es un polinomio de grado $2N+1$. Además $P_N(z) \overset{\mathbb{C}}{\Longrightarrow} \operatorname{sen}(\pi z)$. Por tanto, los coeficientes de Taylor del desarrollo en serie de potencias de z de $P_N(z)$ tienden a los correspondientes coeficientes del desarrollo de $\operatorname{sen}(\pi z)$.

El polinomio $P_N(z)$ se escribe:

$$P_N(z) = \pi z - \pi \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\, z^3 + \pi \sum_{1\le n<m\le N} \frac{1}{n^2\, m^2}\, z^5 - \cdots$$

Y $\operatorname{sen}(\pi z)$ se desarrolla

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z - \frac{\pi^3}{3!}\, z^3 + \frac{\pi^5}{5!}\, z^5 + \cdots$$

Así que centrándonos en el coeficiente de z^3 y haciendo $N \to \infty$, obtenemos que

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{3!}$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Ya puestos, miremos al coeficiente de z^5. Escribámoslo,

$$\pi \sum_{1\le n<m\le N} \frac{1}{n^2\, m^2} = \frac{\pi}{2}\Big(\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\Big)^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}\Big),$$

para concluir, haciendo $N \to \infty$ y usando la suma de Basilea, que

$$\frac{\pi^5}{5!} = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{\pi^4}{36} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\Big)\,,$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

☞ **Nota** 7.2.4. ☜ **Intuición a la Euler.** Pongámonos en modo Euler[2] para verificar que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. Se trata de «justificación» basada en intuiciones y analogías, pero al fin y a la postre «correcta».

Un polinomio complejo P tal que $P(0) \neq 0$, se factoriza

$$P(z) = P(0) \prod_{j=1}^{m} (1 - z/a_j)\,,$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son sus raíces (todas no nulas). La expresión de $P(z)$ en potencias de z comienza

$$P(z) = P(0)\Big(1 - \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{a_j}\Big)\, z + \cdots\Big).$$

[2]Como si fuera fácil, e incluso, posible.

Así que
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{a_j} = -\frac{P'(0)}{P(0)}\,.$$

Podríamos entender la representación (7.3) del seno como la factorización de un polinomio de grado infinito (serie de potencias): si *pusiéramos*

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + \cdots = P(z^2)$$

entonces
$$P(z) = 1 - \frac{\pi^2}{6} z + \cdots\,, \qquad \text{y} \qquad P(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z/n^2),$$

de donde se obtendría que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{P'(0)}{P(0)} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

pues $P'(0) = -\pi^2/6$ y $P(0) = 1$. ♠

C. Fórmula de Wallis para el número π

Poniendo $z = 1/2$ en la fórmula de Euler del seno, se obtiene que

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big)\,,$$

de donde

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots \tag{7.4}$$

en otros términos,
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}$$

o,
$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n)!\sqrt{n}}\,,$$

que se puede deducir asaz directamente de la aproximación de Stirling.

D. Descomposición en fracciones simples de cotan(πz)

Al tomar la derivada logarítmica del producto infinito (7.3) de Euler para representar $\operatorname{sen}(\pi z)$ se obtiene

$$\boxed{\pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}} \tag{7.5}$$

En realidad, ya nos habíamos topado con la fórmula (7.5). En la justificación, revísela lector si lo tiene a bien, de la expresión (7.3) de producto infinito para $\operatorname{sen}(\pi z)$, se obtuvo en un paso intermedio que

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 - z^2} + H'(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,.$$

donde H es una función entera que trabajosamente comprobamos que a la postre no era sino $H \equiv 0$.

7.2.5. Fórmula de Viète y otro producto infinito de Euler

El usual Vieta, por cierto, es la versión latinizada de Viète (François). Así que usemos Viète, tal como usamos Euler en lugar de Eulero.

La fórmula de Viète es un valor concreto de una fórmula de... quién si no, Euler, otro producto infinito para la función seno.

El producto infinito que vamos a discutir a continuación surge de iterar la fórmula del seno del ángulo doble o mitad:

$$\operatorname{sen}(z) = 2\operatorname{sen}(z/2)\,\cos(z/2)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}(z) = 2^2\operatorname{sen}(z/2^2)\,\cos(z/2^2)\,\cos(z/2)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

y, en general, para entero $N \geq 1$ se tiene que

$$\operatorname{sen}(z) = 2^N\operatorname{sen}(z/2^N)\prod_{n=1}^{N}\cos(z/2^n)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} k\operatorname{sen}(z/k) = z\,.$$

Por tanto, tenemos la siguiente **expresión de Euler del seno como producto infinito**:

$$\boxed{\operatorname{sen}(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\cos(z/2^n)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}}$$

Este producto infinito converge uniforme y absolutamente sobre compactos de $\mathbb{C}$. De hecho, como para una cierta constante $C > 0$ se tiene que

$$|\cos(z) - 1| \leq C|z|^2\,, \quad \text{si } |z| \leq 1\,,$$

tenemos que si $|z| \leq R$ y si $2^N \geq R$ entonces

$$|\cos(z/2^n) - 1| \leq C\,\frac{R^2}{2^{2n}}\,.$$

Si ponemos $z=\pi/2$, se obtiene

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi}{2^{n+1}}\Big)\,.$$

Usando recursivamente que $\cos(x/2)=\sqrt{(1+\cos(x))/2}$, para $0\le x\le\pi/2$, se obtiene la alucinante **fórmula de Viète** para el número π:

$$\boxed{1=\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\,\cdots}$$

La derivada logarítmica de la expresión del seno como producto de cosenos, nos da la identidad

$$\operatorname{cotan}(z)=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\Big(\frac{z}{2^n}\Big)\,,\quad \text{para } z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\dots\}\,.$$

☞ **Nota** 7.2.5. ☜ **Interpretación probabilista del producto de Euler.** Marc Kac, en el luminosamente maravilloso [9], da la siguiente interpretación del producto de Euler[3] y que describimos a continuación con liberal despreocupación de ciertos detalles de paso al límite.

Usamos el desarrollo binario de los números $x\in[0,1]$,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_k(x)}{2^k}.$$

Las ξ_k son variables Bernoulli con $p=1/2$ completamente independientes en el intervalo $[0,1]$. Para $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, tenemos que

$$e^{xz}=\prod_{n=1}^{\infty}e^{\xi_k(x)z/2^k}.$$

La independencia completa de la ξ_k nos da para las esperanzas que

$$\mathbf{E}(e^{xz})=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}(e^{\xi_k\,z/2^k}),$$

es decir,

$$\frac{e^z-1}{z}=\int_0^1 e^{xz}\,dx=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{e^{z/2^k}+1}{2}\Big).$$

Como $e^{z/2}=\prod_{k=1}^{\infty}e^{z/2^{k+1}}$, se deduce que

$$e^{z/2}-e^{-z/2}=z\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{z/2^{k+1}}+e^{-z/2^{k+1}})}{2}.$$

Con el cambio $z\longmapsto 2\imath z$ deviene en

$$\operatorname{sen}(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\cos(z/2^n)\,,$$

para $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Para $z=0$ esta expresión es obvia, y tenemos el producto de Euler. ♠

[3]Le recomendamos encarecidamente al lector la autobiografía de Marc Kac [10].

7.3. Funciones enteras con ceros dados en $\mathbb{C}$: Weierstrass

La representación del producto infinito de la función seno invita a discutir la existencia de funciones enteras con un conjunto de ceros dados.

Si el conjunto dado de ceros es finito: $a_1, \ldots, a_m$, entonces, un polinomio $P(z) = \prod_{n=1}^{m}(z - a_n)$ nos da esa función entera buscada. De hecho, todas las funciones enteras f que se anulan exactamente en los a_j se escriben en la forma

$$f(z) = P(z)\, e^{g(z)}\,,$$

donde g es una función entera arbitraria.

En todo este apartado, $(a_n)_{n\geq 1}$ denotará una sucesión de números complejos tales que

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- $a_n \neq 0$, para cada $n \geq 1$.

Esta sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es el dato; el objetivo es obtener, a ser posible, una función f entera que se anule exactamente en los a_n. Los a_n pueden repetirse y entenderemos que f ha de anularse en ese valor repetido tantas veces como aparezca.

La condición de que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ se impone porque si no fuera el caso, es decir, si $\liminf_{n\to\infty} |a_n| < +\infty$, entonces tendríamos un punto de acumulación finito (en $\mathbb{C}$) de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de ceros y, por el principio de ceros aislados, la única función entera que se anularía en una tal sucesión sería la función nula.

La condición de que los a_n sean no nulos es, sin embargo, puramente cómoda, y se impone porque en las construcciones que siguen usaremos $(1 - z/a)$ como función básica y simple que se anula en a, y no $(z - a)$; y esto, claro, requiere, $a \neq 0$. En cualquier caso, si quisiéramos que una función entera f se anulase en $z = 0$, digamos k veces, además de en los a_n dados, tomaríamos $f(z) = z^k g(z)$, donde g se anula exactamente en los a_n. De manera que esta condición de que $a_n \neq 0$ es inocua y fácilmente soslayable.

Como veremos en este apartado, dada una sucesión cualquiera cumpliendo esas dos condiciones existe una función entera f que se anula exactamente en los a_n; no hay restricción alguna adicional.

Comenzaremos tratando dos casos especiales de sucesiones (a_n): primero las sucesiones que verifican $\sum_{n\geq 1} 1/|a_n| < +\infty$, para seguidamente considerar, algo más generalmente, las sucesiones que cumplen $\sum_{n\geq 1} 1/|a_n|^2 < +\infty$. En este segundo caso, harán acto de presencia los llamados *factores primarios*, que nos permitirán tratar y abarcar sucesiones generales.

A. Sucesiones que cumplen $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n| < +\infty$

Para cada entero $n \geq 1$, tomamos la función $f_n(z) = 1 - z/a_n$, que se anula exactamente en a_n. Formamos el producto infinito

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\,.$$

Fijemos $R > 0$. Entonces, para z tal que $|z| \le R$, se tiene que

$$|f_n(z) - 1| = \Big|\frac{z}{a_n}\Big| \le \frac{R}{|a_n|}\,.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1/|a_n|) < +\infty$, el teorema M de Weierstrass para productos infinitos, teorema 7.13, nos da que, en efecto, la función f es entera y se anula exactamente en la sucesión a_n. Ya está.

La «construcción» del producto (7.2) de la función seno se enmarca en este caso: si $a_n = n^2$, para $n \ge 1$, entonces

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{n^2}\Big)$$

define una función entera que se anula en los n^2, $n \ge 1$. La función entera

$$h(z) = g(z^2)$$

se anula en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y finalmente,

$$h(z) = z f(z^2)$$

es entera y se anula exactamente en $\mathbb{Z}$.

Si hubiéramos querido construir una función que simplemente se anulase exactamente en todos los números naturales en lugar de en todos los enteros, la construcción anterior habría fallado, pues $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$. La simetría de $\mathbb{Z}$ ha jugado a nuestro favor.

B. Sucesiones que cumplen $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^2 < +\infty$

Observe el lector primero que esta condición es menos restrictiva que la del caso anterior. La sucesión $a_n = n$, $n \ge 1$, cae bajo este caso, pero no bajo el anterior.

El truco del caso anterior de usar los factores $1 - z/a_n$, los más simples posibles, no funciona, porque no se tendría convergencia.

Incorporamos un nuevo ingrediente: consideremos, para cada $n \ge 1$, el factor

$$f_n(z) = \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\, e^{z/a_n}\,.$$

Esta función entera f_n se anula exactamente en $z = a_n$.

La acotación del siguiente lema será la clave para verificar convergencia de productos formados con los factores f_n.

Lema 7.19 *Se tiene que*

$$|1 - (1 - z)\, e^z| \le |z|^2\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Supongamos por ahora la veracidad de este lema 7.19. Dada la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ con $\sum_{n\geq 1} 1/|a_n|^2 < +\infty$, formamos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\, e^{z/a_n}\,.$$

Para verificar la convergencia de este producto infinito, fijemos $R > 0$. Para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq R$ y n tal que $|a_n| \geq R$, se tiene, puesto que $|z/a_n| \leq 1$ y por el lema 7.19, que

$$\Big|\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\, e^{z/a_n} - 1\Big| \leq \frac{|z|^2}{|a_n|^2} \leq \frac{R^2}{|a_n|^2}\,.$$

Con esta acotación deducimos que

$$\prod_{n\geq 1\,, |a_n|\geq R} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\, e^{z/a_n}$$

converge uniformemente en $\mathbb{D}(0,R)$ y define, por tanto, una función holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$ que no se anula. Si le incorporamos al producto los factores (un número finito de ellos) con $|a_n| < R$, tenemos que

$$f(z) = \prod_{n\geq 1} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\, e^{z/a_n}$$

converge, es holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$ y en $\mathbb{D}(0,R)$ se anula solo en los $a_n \in \mathbb{D}(0,R)$.

Como esta última conclusión es válida para todo R, concluimos que f es una función entera que se anula exactamente en los a_n.

Vamos con la:

demostración del lema 7.19. Desarrollando en serie de potencias vemos que

$$(\flat) \quad 1 - (1-z)\, e^z = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\Big)\, z^n\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Los coeficientes de Taylor de este desarrollo son positivos, así que

$$\big|1 - (1-z)\, e^z\big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\Big)|z|^n = 1 - (1-|z|)\, e^{|z|}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $e^x \geq (1+x)$; además, si $0 \leq x \leq 1$, entonces $(1-x)\, e^x \geq (1-x^2)$. Por consiguiente, si $|z| \leq 1$, se tiene que

$$\big|1 - (1-z)\, e^z\big| \leq 1 - (1-|z|)\, e^{|z|} \leq |z|^2\,.$$

Podemos argumentar alternativa y telescópicamente que del desarrollo $(\flat)$ se deduce directamente la conclusión, pues si $|z| \leq 1$, se tiene que

$$\big|1 - (1-z)\, e^z\big| \leq |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\Big) = |z|^2\,. \qquad \blacksquare$$

☞ **Nota** 7.3.1. ☜ La desigualdad del lema 7.19 es óptima en dos sentidos. No es cierta para $|z| > 1$; de hecho $1 - (1 - x)\,e^x > x^2$, si $x > 1$. Y no se puede poner delante de $|z|^2$ una constante fija menor que 1, pues

$$\lim_{z\to 0} \frac{1 - (1 - z)\,e^z}{z^2} = 1\,.$$

♠

☞ **Nota** 7.3.2. ☜ Conviene señalar, lector, que como

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1 - (1 - z)\,e^z}{z^2}$$

es una función entera (por singularidad evitable, definiéndola como 1 en $z = 0$), la acotación

$$\big|(1 - z)\,e^z - 1\big| \le \alpha |z|^2\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,, \tag{7.6}$$

para una cierta constante $\alpha > 0$, es inmediata y nos hubiera bastado para la verificación de convergencia del producto infinito de las f_n, porque para $|z| \le R$ y n tal que $|a_n| > R$ se tendría que

$$\Big|\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\,e^{z/a_n} - 1\Big| \le \alpha \frac{R^2}{|a_n|^2}\,.$$

♠

Por cierto, lector, podemos usar el lema 7.19, o simplemente la acotación de la ecuación (7.6), para comprobar la convergencia uniforme:

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n \overset{\mathbb{C}}{\Longrightarrow} e^z\,,$$

que ya vimos en el ejemplo 5.5.3.

Veamos. Tomemos $R > 0$ y $n > R$. Para todo $z \in \mathbb{D}(0, R)$ se tiene, por el lema 7.19, que

$$\Big|1 - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)\,e^{-z/n}\Big| \le \frac{|z|^2}{n^2} \le \frac{R^2}{n^2}\,.$$

Como $1 - w^n = (1 - w)(1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1})$, deducimos que

$$|1 - w^n| \le n|1 - w|\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}\,.$$

Por tanto, poniendo $w = (1 + z/n)\,e^{-z/n}$, se obtiene

$$\Big|1 - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n e^{-z}\Big| \le n\Big|1 - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)\,e^{-z/n}\Big| \frac{R^2}{n}\,,$$

de donde

$$\Big|e^z - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n\Big| \le \frac{R^2\,e^R}{n}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0, R) \text{ y entero } n > R\,,$$

lo que implica la deseada convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{C}$.

7.3.1. Factores primarios

Para cada entero $k \geq 1$ se define el k-ésimo **factor primario**, también llamado k-ésimo **factor elemental**, E_k, como la función *entera* dada por

$$(\star) \quad E_k(z) = (1-z)\exp\Big(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^k}{k}\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Añadimos además a la lista el factor primario E_0 dado por $E_0(z) = 1 - z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Las funciones $E_0(z) = (1-z)$ y $E_1(z) = (1-z)\,e^z$ han aparecido ya, sin la presente nomenclatura, en dos casos anteriores de construcción de funciones enteras con ceros dados: $\sum_n 1/|a_n| < +\infty$ y $\sum_n 1/|a_n|^2 < +\infty$.

Cada $E_k(z)$ se anula únicamente en $z = 1$. Además, para cada entero $k \geq 0$ se tiene que $E_k(0) = 1$.

Anticipemos un poco la razón de ser de la, a primera vista, extraña expresión de estos factores primarios E_k. Veamos. La función $z \mapsto 1/(1-z)$ lleva el disco unidad $\mathbb{D}$ en el semiplano $\mathbb{H}_{1/2}$, así que $\mathrm{Ln}(1/(1-z))$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Su desarrollo de Taylor, convergente en $\mathbb{D}$, es

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1}{1-z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}\,.$$

Por consiguiente,

$$(1-z)\exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}\Big) \equiv 1\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}\,,$$

de donde,

$$\lim_{k\to\infty} E_k(z) = 1\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Para $z \in \mathbb{D}$, se tiene la siguiente expresión alternativa para $E_k(z)$:

$$E_k(z) = \exp\Big(-\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{z^j}{j}\Big)\,;$$

basta multiplicar ambos lados de $(\star)$ por $\exp\big(\sum_{j=1}^{\infty} z^j/j\big)$. De manera que el desarrollo de $1 - E_k(z)$ en potencias de z comienza $z^{k+1}/(k+1) + \cdots$.

Tras estas observaciones, la acotación recogida en el siguiente lema, parece, quizás natural.

Lema 7.20 (Acotación de factores primarios) *Para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo entero $k \geq 0$ se tiene que*

$$\big|1 - E_k(z)\big| \leq |z|^{k+1}\,.$$

Observe, lector, que el lema 7.19 se corresponde con el caso particular $k=1$ del presente lema 7.20 y que el caso $k=0$ es obvio.

Pertrechados con este lema podemos abarcar más casos de potenciales sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ de ceros, pues como consecuencia del lema 7.20 se deduce que si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^{k+1} < \infty$, entonces el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n)$$

converge y define una función entera que se anula exactamente en los a_n. Los casos particulares $k=0$ y $k=1$ han sido discutidos más arriba. Estos productos infinitos donde todos los factores primarios tienen el mismo índice (en este caso $k+1$) se conocen como productos canónicos y son pieza clave en el teorema de factorización de Hadamard que nos ocupará más adelante en los apartados 8.5 y 8.6.

☞ **Nota** 7.3.3. ☜ Conviene quizás apuntar que para obtener la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n)$ cuando $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^{k+1} < \infty$ basta con saber que $\big|1-E_k(z)\big| \leq \alpha_k |z|^{k+1}$ para todo $z \in \mathbb{D}$, (donde $\alpha_k > 0$ es una cierta constante), y cuya demostración requiere menos finura que la del lema 7.20. ♠

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.20. Fijemos $k \geq 0$. Pongamos $P_k(z) = \sum_{j=1}^{k} z^j/j$, de manera que

$$E_k(z) = (1-z)\, e^{P_k(z)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Observe el lector que

$$\frac{d}{dz}(1-E_k(z)) = z^k e^{P_k(z)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

puesto que $P_k'(z) = (1-z^k)/(1-z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

La observación clave ahora es que los coeficientes de Taylor de $1-E_k(z)$ son no negativos. Esto se sigue en cadena, observando que así lo son los de P_k, y, por tanto, los de $e^{P_k(z)}$, de donde, los de $\frac{d}{dz}(1-E_k(z))$ y, finalmente, (nótese que $1-E_k(0)=0$) los de $1-E_k(z)$.

Pongamos que el desarrollo de Taylor de $1-E_k(z)$ viene dado

$$1-E_k(z) = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j^{(k)} z^j\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

La serie de potencias «comienza» con z^{k+1}, porque $\frac{d}{dz}(1-E_k(z))$ tiene un cero de orden k en $z=0$.

Como $E_k(1)=0$, se deduce que $\sum_{j=k+1}^{\infty} b_j^{(k)} = 1$. Por tanto, para $|z| \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\big|1-E_k(z)\big| &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j^{(k)} |z|^j \\ &\leq |z|^{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j^{(k)} |z|^{j-(k+1)} \leq |z|^{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j^{(k)} = |z|^{k+1}\,.\end{aligned}$$

■

Derivada logarítmica de factores primarios. Las derivadas logarítmicas de los factores primarios serán de utilidad en varias oportunidades posteriores, así que recojámoslas.

Fijemos el entero $k \geq 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$(\star) \quad \frac{E_k'(z)}{E_k(z)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{j=0}^{k-1} z^j\,,$$

que podemos reescribir, sumando la progresión geométrica finita,

$$\frac{E_k'(z)}{E_k(z)} = -\frac{z^k}{1-z}\,.$$

Las derivadas de orden al menos k de la derivada logarítmica de E_k admiten una expresión particularmente sencilla que recogemos en el siguiente lema.

Lema 7.21 *Para $k \geq 0$ y $j \geq k$ se cumple que*

$$\Big(\frac{E_k'(z)}{E_k(z)}\Big)^{(j)} = -\frac{j!}{(1-z)^{j+1}}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de $(\star)$, pues la derivada j-ésima del polinomio que aparece en esa expresión es nulo. ■

El caso $k = j = 1$ de este lema,

$$\Big(\frac{E_1'(z)}{E_1(z)}\Big)' = -\frac{1}{(1-z)^2}\,,$$

se usará en ocasiones varias.

7.3.2. Teorema de Weierstrass

Ya podemos enunciar el resultado general sobre la existencia de funciones enteras con ceros dados.

Teorema 7.22 (Teorema de Weierstrass: funciones enteras, ceros dados) *Sea (a_n) una sucesión de números complejos tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Entonces existe una función entera f que se anula exactamente en los a_n.*

Observe, lector, como en este enunciado hemos dispensado de la hipótesis activa hasta ahora, conveniente aunque inocua, de que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer y suponemos que ninguno de los a_n es cero. Veamos. Dada una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, sea k el número total de estos a_n que son

0. Para los a_n que no son 0, tomemos una g entera que se anula exactamente en esos $a_n \neq 0$. Entonces la función

$$f(z) = z^k g(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

se anula exactamente en los a_n dados.

Sea

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big)$$

con el mismo índice n para E_n y para a_n.

Comprobemos la convergencia en todo $\mathbb{C}$ de este producto infinito.

Si $R > 0$, sea N_R tal que $|a_n| \geq 2R$, para $n \geq N_R$. Entonces, por el lema 7.20, si $|z| \leq R$, se tiene que

$$\Big|E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big) - 1\Big| \leq \frac{R^{n+1}}{|a_n|^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

Se deduce del criterio M que el producto infinito

$$\prod_{n \geq N_R} E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big)$$

converge, es holomorfo en $\mathbb{D}(0,R)$ y no se anula en $\mathbb{D}(0,R)$. Por tanto, el producto infinito

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big)$$

converge, es holomorfo en $\mathbb{D}(0,R)$ y en $\mathbb{D}(0,R)$ se anula exactamente en los a_n tales que $|a_n| < R$. Como esto es cierto para todo $R > 0$, se deduce que f es entera. Por propiedades generales de productos infinitos convergentes, f se anula exactamente en los a_n. ■

☞ **Nota** 7.3.4. ☜ Parece oportuno señalar, lector, cuán conveniente ha resultado, en la demostración anterior, que en el lema 7.20 la constante ante $|z|^{k+1}$ sea un 1. Como ya observamos más arriba, el enunciado del lema es directo si nos contentamos con una cota $\alpha_k\,|z|^{k+1}$, pero si sólo dispusiéramos de esta cota nos veríamos ahora ante la necesidad de asegurar que $\alpha_n/2^{n+1}$ es sumable. ♠

De la propia demostración del teorema 7.22 se sigue el siguiente teorema:

Teorema 7.23 (Teorema de factorización de Weierstrass) *Toda función entera f se puede representar en la forma*

$$f(z) = z^k\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big)\,,$$

donde k el el orden $z = 0$ como cero de f, los a_n son una enumeración de los ceros no nulos de f, y donde g es una cierta función entera.

El lector recordará que una función f meromorfa en $\mathbb{C}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo por singularidades aisladas que son polos. Los polos de una función f meromorfa en $\mathbb{C}$ no se pueden acumular salvo en $\infty_{\mathbb{C}}$, por que si se acumularan en un punto finito, digamos, $a \in \mathbb{C}$, entonces a no sería singularidad aislada de f.

El conjunto $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con la suma y producto de funciones conforman un cuerpo. Si f es meromorfa (y no nula) entonces, $1/f$ es meromorfa; los ceros de f son los polos de $1/f$ y los polos de f son los ceros de $1/f$

Corolario 7.24 *Toda función f meromorfa en $\mathbb{C}$ se puede escribir como cociente $f \equiv g/h$, donde g y h son funciones enteras y h no es idénticamente nula. Y recíprocamente, un tal cociente g/h siempre define una función meromorfa.*

En otras palabras, *el cuerpo $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ de las funciones meromorfas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ es el cuerpo de fracciones del anillo $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de las funciones enteras.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una enumeración de los polos no nulos de f repetidos según su multiplicidad y sea, además, k el orden de $z = 0$ como polo de f.

Formemos la función entera

$$h(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big).$$

El producto $g = f\, h$ es una función entera. ∎

7.4. Función Gamma, *a la Weierstrass*

En este apartado desarrollamos un enfoque de presentación de la función Γ de Euler como producto infinito debido a Weierstrass. Más adelante, en el apartado 10.1, desarrollaremos una presentación de la función Γ como cierta integral (holomorfa) más en la línea de Euler; allá comprobaremos que ambos enfoques dan lugar a la misma función. Si nos adhiriéramos a cierto fundamentalismo notacional quizás debiéramos usar una notación como $\Gamma_{\mathcal{W}}$ para la función Γ a la Weierstrass y otra como $\Gamma_{\mathcal{E}}$ para la función Γ a la Euler; pero no, no es el caso, no nos adherimos.

Buscamos una función entera F, o quizás meromorfa, en $\mathbb{C}$, que

- cumpla la *ecuación funcional*

$$F(z+1) = zF(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,, \tag{7.7}$$

- y verifique la siguiente *condición normalizadora*: $F(1) = 1$.

La segunda condición se consigue en cuanto $F(1) \neq 0$, porque si la función $F(z)$ cumple la ecuación funcional y $F(1) \neq 0$, entonces la función $F(z)/F(1)$ cumpliría ambas condiciones.

El interés de tal búsqueda radica en que para entero $n \geq 1$ se tendría $F(n) = (n-1)F(n-1)$, e iterando y usando que $F(1) = 1$, se tendría que $F(n) = (n-1)!$. Así que una tal F sería una extensión desde $\mathbb{N}$ a todo $\mathbb{C}$ del factorial.

La ecuación funcional (7.7) y la normalización no determinan una única función, pues, por ejemplo, si g es cualquier función entera/meromorfa periódica de periodo 1 y con $g(1) = 1$, digamos, $\cos(2\pi z)$ o $e^{\operatorname{sen}(2\pi z)}$, entonces la función $F(z)g(z)$ cumpliría las dos condiciones requeridas.

Como $F(1) = 1$, la ecuación funcional nos dice que $\lim_{z \to 0} zF(z) = 1$. Esto obliga a que F tenga un polo simple (con residuo 1) en 0. Pero entonces, de nuevo, la ecuación funcional forzaría a tener polos (simples) sucesivamente en $-1, -2, \ldots$, es decir, en todos los enteros negativos. Anticipando esta circunstancia nos hemos curado en salud, y postulado que F sea, «quizás» meromorfa: ha de serlo, si queremos que se cumpla la ecuación funcional.

Pero aún más, argumentemos en la dirección contraria. Supongamos que $F(z)$ es una función meromorfa que tiene polos simples exactamente en $\{0, -1, -2, \ldots\}$ y además que no se anula en todo $\mathbb{C}$. Entonces la función $z \mapsto F(z+1)$ y la función $zF(z)$ tienen polos (simples) exactamente en $\{-1, -2, \ldots\}$ y no se anulan, de manera que el cociente $F(z+1)/(zF(z))$ sería una función entera que no se anula, y, por tanto, para una cierta función entera $f(z)$ se tendría

$$F(z+1) = zF(z)\, e^{f(z)}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Esto invita a buscar $F(z)$ entre las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con polos simples en $\{0, -1, -2, \ldots,\}$ (y que no se anulen). El recíproco $G(z) = 1/F(z)$ de una tal $F(z)$ sería una función entera con ceros simples en $\{0, -1, -2, \ldots,\}$.

Consideremos el producto infinito

$$G(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} E_1\Big(\frac{z}{-n}\Big) = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)\, e^{-z/n}, \tag{7.8}$$

que, en efecto, define una función entera con ceros simples en $\{0, -1, -2, \ldots\}$.

La función G no se anula en $z = 1$; de hecho, $G(1) = e^{-\gamma}$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. Veamos. Recordemos que la constante γ es el límite $\lim_{n \to \infty}(H_n - \ln(n+1))$, donde para cada entero $n \geq 1$ denotamos con H_n al n-ésimo número armónico: $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$.

Como $G(1) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 1/n)\, e^{-1/n}$, tenemos que

$$G(1) = \lim_{n \to \infty} \prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{j}\Big)\, e^{-1/j} = \lim_{n \to \infty} e^{-H_n} \prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{j}\Big) = \lim_{n \to \infty} e^{-H_n}(n+1) = e^{-\gamma}.$$

Podemos expresar $G(z)$ como límite de productos parciales en la forma:

$$G(z) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{N}(z+j)}{N!}\; e^{-zH_N} \right), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Esta expresión sugiere que podremos expresar $G(z+1)$ en términos de $G(z)$ de manera sencilla. De hecho, nos da que

$$\frac{G(z+1)}{G(z)} = \lim_{N\to\infty} \frac{z+1+N}{z}\, e^{-H_N}\,;$$

un límite que podemos calcular:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{z{+}1{+}N}{z}\, e^{-H_N} = \frac{1}{z} \lim_{N\to\infty} \frac{z{+}1{+}N}{N+1}\, e^{-(H_N-\ln(N+1))} = \frac{e^{-\gamma}}{z}\,,$$

de manera que

$$\frac{G(z+1)}{G(z)} = \frac{e^{-\gamma}}{z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}\,.$$

Así que el producto infinito G verifica una ecuación funcional con todo el aire de la que andamos buscando.

Sea ahora la función entera $H(z) = e^{\gamma z} G(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Observe el lector que

$$\frac{H(z+1)}{H(z)} = \frac{1}{z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}\,,$$

y que además $H(1) = 1$. Nótese que $H'(0) = 1$.

Definimos, finalmente, la función meromorfa Γ como $\Gamma = 1/H$. Esta función Γ ya tiene las propiedades requeridas, pues $\Gamma(1) = 1$ y además

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}\,.$$

Para $z \in \{-1,-2,\dots\}$, ambos lados se hacen infinito, y para $z = 0$, tomando límites, ambos lados se hacen 1, pues $H'(0) = 1$, así que podemos escribir

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}} \tag{7.9}$$

La función $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{e^{-\gamma z}}{G(z)}$$

se expresa como producto infinito en la forma

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+z}\Big)\, e^{z/n}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}} \tag{7.10}$$

A esta fórmula de la función Γ como producto infinito se la conoce en los ambientes como **fórmula de Weierstrass**.[4]

[4] En realidad, esta fórmula de Γ había aparecido mucho antes (que en el trabajo sistematizador

7.4.1. Algunas propiedades de la función Γ

- *Ceros y polos.* La función Γ
  - no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$, pues $1/\Gamma$ es una función entera, y
  - tiene polos simples en $0, -1, -2, \ldots$.
- *Simetría.* Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\boxed{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}}$$

De la expresión de la ecuación (7.8) de la función auxiliar G como producto infinito se deduce que

$$G(z)\,G(-z) = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Por la factorización del seno como producto infinito, que se recoge en la fórmula (7.3), se puede escribir

$$G(z)\,G(-z) = -z\,\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

lo que se a su vez, usando la relación de H con G y de Γ con H, se traduce en que

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \operatorname{sen}(\pi z)}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

que preferimos reescribir, usando la ecuación funcional (7.9): $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, en la forma

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

De la expresión de Γ como producto infinito se deduce que Γ tiene además simetría respecto de conjugación:

$$\boxed{\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z})\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}}$$

En particular, Γ toma valores reales en el eje real. Observe, lector, que además $\Gamma(x)$ es positiva, para $x > 0$.

---

de Weierstrass) en artículos de Oscar Xaver Schlömilch y Francis William Newman. El trabajo de Newman lleva el elegante y sugerente título de *On* $\Gamma(a)$ *especially when a is negative.* En referencia a la variedad de intereses intelectuales y académicos de Newman, un biógrafo dice: *Newman's work covered many spheres: he wrote on logic, political economy, English reforms, Austrian politics, Roman history, diet, grammar, the most abstruse departments of mathematics, Arabic, the emendation of Greek texts, and languages as out of the way as the Berber and as obsolete as the dialect of the Iguvine inscriptions.* Su trabajo sobre la función Γ caería, según el biógrafo de marras, dentro del territorio de las más abstrusas áreas de las matemáticas. ¡Vaya por Dios!

Observe el lector que Γ está determinada por sus valores en la región

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1/2; \Im(z) \geq 0\}\,.$$

• *Algunos valores de* Γ. Para cualquier entero $n \geq 1$, se tiene que

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

Poniendo $z = 1/2$ en la relación de simetría se obtiene que

$$\Gamma(1/2)^2 = \pi\,,$$

y como Γ es real en el eje real, se tiene que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (la raíz positiva de π). Recuerde, lector, que $\Gamma(x)$ es positiva para argumentos $x > 0$.

La fórmula (7.4) de Wallis, viene ahora a colación. Como $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, sustituyendo $z = 1/2$ en la definición de Γ se obtiene

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\,e^{-\gamma/2} \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{2j}\Big)^{-1} e^{\frac{1}{2j}}\,,$$

de donde

$$\frac{\pi}{4} = e^{-\gamma} \prod_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{2j}{2j+1}\Big)^2 e^{1/j} = e^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} e^{H_n} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{2j}{2j+1}\Big)^2.$$

Como

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{H_n}}{n}\,,$$

se deduce que

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{2j}{2j+1}\Big)^2 n = \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{22}{33}\frac{44}{55}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n+1)(2n+1)}\Big] n,$$

y por tanto,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^2 (2n) = \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{2\,2}{3\,3}\frac{4\,4}{5\,5}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n+1)}\Big]\frac{2n}{2n+1} = \frac{2\,2\,4\,4\,6\,6\cdots}{1\,3\,3\,5\,5\,7\cdots}$$

donde en el denominador de la última expresión hemos añadido un 1 para equiparar el número de factores de numerador y denominador y donde hemos reemplazado $\lim_{n\to\infty} 2n/(2n{+}1)$ por 1. Finalmente, por puro afán esteticista (casi de estetiscista), escribimos la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{2j}{2j-1}\frac{2j}{2j+1}\,.$$

Esto es lo que hemos obtenido de $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. En general, se tiene

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\,,\quad \text{para } n\geq 0\,.$$

• *Residuos de* Γ *en sus polos.*

Fijemos un entero $n\geq 0$; queremos determinar el residuo $\operatorname{Residuo}(\Gamma,-n)$ de Γ en el polo (simple) $-n$, es decir

$$\operatorname{Residuo}(\Gamma,-n)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)\,.$$

Ahora bien, por la simetría de Γ tenemos que

$$(z+n)\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{(z+n)\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,,$$

y como $\operatorname{sen}(\pi z)$ se anula en $-n$, se tiene, tomando límite cuando $z\to -n$, que

$$\operatorname{Residuo}(\Gamma,-n)\ \Gamma(1+n)=\frac{1}{\cos(\pi n)}\,.$$

Por tanto,

$$\operatorname{Residuo}(\Gamma,-n)=\frac{(-1)^n}{n!}\,,\quad \text{para } n\geq 0\,.$$

• *Fórmula de Gauss para la función* Γ. Para todo $z\in\mathbb{C}$ se tiene que

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N^z N!}} \tag{7.11}$$

Para $z=0,-1,-2,\ldots$ el lado derecho es 0, mientras que, como Γ tiene polos en esos puntos, el lado izquierdo es asimismo 0.

Para $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)}&=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z+n}{n}\,e^{-z/n}=ze^{\gamma z}\,e^{-zH_N}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{z+n}{n}\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N!}\,e^{-(H_N-\gamma)z}=\lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N^z\,N!}\,.\end{aligned}$$

☞ **Nota** 7.4.1. ☜ Con la notación de coeficientes binómicos generalizados, véase el apartado 9.1.2, podemos escribir la fórmula de Gauss como:

$$\Gamma(z)\,z=\lim_{N\to\infty}\frac{N^z}{\binom{N+z}{N}}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,2,\ldots\}\,.$$

♠

7.4.2. Derivada logarítmica $\digamma$ de Γ.

La derivada logarítmica de la función Γ se denota $\digamma$ (letra que se lee «digamma»):

$$\digamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\,.$$

La función entera $H = 1/\Gamma$ viene dada por el producto infinito

$$H(z) = z\,e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z+n}{n}\Big)\, e^{-z/n}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Este producto infinito converge uniforme y absolutamente sobre compactos, de manera que podemos utilizar el teorema 7.13 de Weierstrass sobre productos infinitos para formular su derivada logarítmica:

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Como

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = -\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}\,,$$

se deduce que

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}\,.$$

Es decir,

$$\digamma(z) = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}. \tag{7.12}$$

Si, entusiastas (y mirando de soslayo al lema 7.21), derivamos una vez más, deducimos que

$$\boxed{\digamma'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}} \tag{7.13}$$

La función $\digamma'$ tiene polos dobles en cada $z \in \{0,-1,-2,\dots\}$. Además

La función $\digamma'$ cumple la siguiente fórmula de «duplicación»:

$$\digamma'(z) + \digamma'\Big(z + \frac{1}{2}\Big) = 4\digamma'(2z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}\,. \tag{7.14}$$

Esta duplicación se deduce, usando (7.13), como sigue:

$$
\begin{aligned}
\digamma'(z)+\digamma'\Big(z+\frac{1}{2}\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n+1/2)^2}= \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+\frac{2n}{2})^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+\frac{2n+1}{2})^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n/2)^2}=4\digamma'(2z)\,.
\end{aligned}
$$

De la fórmula de duplicación de $\digamma'$ se deduce

• *Fórmula de duplicación de Legendre.* Esta fórmula afirma que

$$
\boxed{2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)=\Gamma(2z)\sqrt{\pi}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}}
$$

Las funciones $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$ y $\Gamma(2z)$ son meromorfas en $\mathbb{C}$, no se anulan nunca, y tienen exactamente los mismos polos con las mismas multiplicidades.

Por consiguiente, para una cierta función entera L se tiene que

$$
\Gamma(z)\,\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)=\Gamma(2z)\,e^{L(z)}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\,.
$$

Al calcular, impertérritos, la derivada logarítmica de ambos lados, y volviendo a derivar con resolución obtenemos que

$$
\digamma'(z)+\digamma'\Big(z+\frac{1}{2}\Big)=4\digamma'(2z)+L''(z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}\,.
$$

En virtud de (7.14) se deduce que $L''(z)=0$, para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, y, por consiguiente, que $L''\equiv 0$. De manera que L es una función lineal: $L(z)=az+b$ para todo $z\in\mathbb{C}$, y ciertos coeficientes $a,b\in\mathbb{C}$. Así que, por ahora, tenemos que

$$
(\flat)\qquad \Gamma(z)\,\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)=\Gamma(2z)\,e^{az+b}\,.
$$

Resta, lector, determinar los coeficientes a y b. Los vamos a obtener «dando valores» en $(\flat)$. Veamos.

De que $\lim_{z\to 0} z\Gamma(z)=1$, se deduce que

$$
\sqrt{\pi}=\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}e^b
$$

así $e^b=2\sqrt{\pi}$.

Poniendo $z=1/2$, se obtiene que

$$
\Gamma(1/2)\Gamma(1)=\Gamma(1)\,e^{a/2}e^b \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\pi}=e^{a/2}\,2\,\sqrt{\pi}\quad\Longrightarrow\quad e^a=\frac{1}{4}\,.
$$

Sustituyendo e^a y e^b en $(\flat)$ se obtiene

$$
\Gamma(z)\,\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)=\Gamma(2z)\,\frac{1}{4^z}\,2\sqrt{\pi}\,,
$$

como queríamos ver. ■

7.4.3. Algunos «asintóticos» asociados a la función Γ

Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 7.25 *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, entonces*

$$\prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{z}{j}\Big) \sim \frac{1}{\Gamma(z+1)}\, n^z\,, \quad \textit{cuando } n \to \infty\,.$$

Recuérdese que $z \mapsto n^z = e^{(\ln n) z}$ es una función entera; aquí $\ln n$ es el logaritmo real del número n.

Si $z = 0$, ambos lados son iguales a 1, para cada $n \geq 1$.

Si z es un entero negativo, la izquierda es nula de un n en adelante,[5] mientras que la derecha se hace 0,[6] pues $z+1$ es un polo de Γ.

Si z es un entero positivo, digamos $z = k > 0$, podemos argumentar como sigue:

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{k}{j}\Big) &= \frac{(k{+}1)\cdots(k{+}n)}{1 \cdots n}\\ &= \frac{(n{+}1)\cdots(n{+}k)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!} = \frac{\Gamma(k+1)}{n}^k\,, \quad \text{cuando } n \to \infty\,.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Recordemos que, por su mera definición,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{z}{j}\Big) e^{-z/j}\,.$$

Usando que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, tenemos que

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z} \lim_{n\to\infty} e^{-H_n z} \prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{z}{j}\Big)\,,$$

donde H_n es el n-ésimo número armónico.

Como $\lim_{n\to\infty} H_n - \ln n = \gamma$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}(1 + z/j)}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\,,$$

como queríamos probar. ■

Pasamos ahora a plantear una extensión (y consecuencia) del lema 7.25.

Supongamos que $Q(w) = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l w^l$ es un polinomio de grado k, así que $\alpha_k \neq 0$, y que $Q(w)$ está normalizado con $\alpha_0 = 1$, de manera que $Q(0) = 1$.

[5] ¡Hum!

[6] ¡Hum!

Supongamos que $Q(1/j) \neq 0$, para cada entero $j \geq 1$. Factorizamos el polinomio $Q(w)$ en la forma

$$Q(w) = \prod_{r=1}^{k} \big(1 + \beta_r w\big)\,,$$

de manera que las raíces de $Q(w)$ son los números $-1/\beta_r$. Los β_r no son necesariamente distintos. Como $Q(0) = 1$, el 0 no es raíz de Q.

Tome nota lector que $\sum_{r=1}^{n} \beta_r = \alpha_1$.

Lema 7.26 *Con las notaciones anteriores,*

$$(\star) \qquad \pi_n \triangleq \prod_{j=1}^{n} \big(1 + \frac{\alpha_1}{j} + \frac{\alpha_2}{j^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{j^k}\big) \sim \frac{1}{\prod_{r=1}^{k} \Gamma(\beta_j + 1)}\, n^{\alpha_1}\,, \quad \textit{cuando } n \to \infty\,,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{n^{\alpha_1}} = \frac{1}{\prod_{r=1}^{k} \Gamma(\beta_j + 1)}\,.$$

Observe, lector, que $\pi_n = \prod_{j=1}^{n} Q(1/j)$. Las prevenciones previas al enunciado sobre las raíces de Q tienen que ver con que si algún $1/j$ es raíz de Q entonces π_n es 0 de un n en adelante. En ese caso, el coeficiente de la derecha es 0, pues algún $\beta_r + 1$ es polo de Γ.

Tome nota, por favor, lector, que sólo el exponente α_1 aparece en el lado derecho de $(\star)$.

El lema 7.25 es el caso $k = 1$ del lema 7.26.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que

$$\pi_n = \prod_{j=1}^{n} Q\Big(\frac{1}{j}\Big) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{r=1}^{k} \Big(1 + \frac{\beta_r}{j}\Big) = \prod_{r=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} \Big(1 + \frac{\beta_r}{j}\Big)\,,$$

aplicar el lema 7.25, y recordar que $\sum_{r=1}^{k} \beta_j = \alpha_1$. ■

Sucesiones hipergeométricas

Aplicaremos seguidamente el lema 7.26 al análisis asintótico de las sucesiones hipergeométricas.

Una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ se dice **hipergeométrica** si para cierto factor A y ciertos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, se tiene que

$$(\flat) \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = A\, \frac{n^k + \alpha_1\, n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{n^k + \gamma_1\, n^{k-1} + \cdots + \gamma_k}\,, \quad \text{para cada } n \geq 1\,.$$

Aquí $\alpha_k, \gamma_k \neq 0$ y $A \neq 0$.

Normalizamos, suponiendo $a_0 = 1$. Suponemos además que los coeficientes son tales que numerador y denominador no se anulan para cada $n \geq 1$. La sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ queda entonces completamente determinada por la recurrencia ($\flat$) y la condición inicial $a_0 = 1$.

Por cierto, una sucesión geométrica es aquella para la que $a_n/a_{n-1} = A$, para cada $n \geq 1$ y si $a_0 = 1$ entonces $a_n = A^n$, para cada $n \geq 0$.

La sucesión $b_n = a_n/A^n$, para $n \geq 0$, verifica $b_0 = 1$ y la recurrencia ($\flat$) con $A = 1$, es decir,

$$(\flat\flat) \qquad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{n^k + \gamma_1 n^{k-1} + \cdots + \gamma_k}, \quad \text{para cada } n \geq 1\,.$$

Reescribimos ($\flat\flat$) en la forma

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1 + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{1 + \frac{\gamma_1}{n} + \cdots + \frac{\gamma_k}{n^k}}, \quad \text{para cada } n \geq 1\,,$$

de manera que

$$b_n = \frac{\prod_{j=1}^n 1 + \frac{\alpha_1}{j} + \cdots + \frac{\alpha_k}{j^k}}{\prod_{j=1}^n 1 + \frac{\gamma_1}{j} + \cdots + \frac{\gamma_k}{j^k}}, \quad \text{para cada } n \geq 1\,.$$

Apelamos ahora al lema 7.26 para concluir que para una cierta constante κ se tiene que

$$b_n \sim \kappa\, n^{\alpha_1 - \gamma_1}, \quad \text{cuando } n \to \infty\,,$$

y, por tanto, que

$$a_n \sim \kappa\, A^n\, n^{\alpha_1 - \gamma_1}, \quad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

La constante κ es, de hecho,

$$\kappa = \frac{\prod_{r=1}^k \Gamma(\omega_r + 1)}{\prod_{r=1}^k \Gamma(\beta_r + 1)}\,, \tag{7.15}$$

donde $-1/\beta_r$ son las raíces del polinomio $1 + \alpha_1 w + \cdots + \alpha_k w^k = 0$ y $-1/\omega_r$ son las raíces del polinomio $1 + \gamma_1 w + \cdots + \gamma_k w^k = 0$.

[☞ Nota 7.4.2. ☜] Enfoque alternativo para la fórmula asintótica de las sucesiones hipergeométricas. Suponemos que $A = 1$. Denotamos, por abreviar, $\omega = \alpha_1 - \beta_1$.

Introducimos la función racional $f(z)$ dada por

$$f(z) = \Big(1 + \sum_{j=1}^k \alpha_j z^j\Big) \Big/ \Big(1 + \sum_{j=1}^k \gamma_j z^j\Big)\,.$$

La función f es holomorfa y no se anula en un disco centrado en 0 que por comodidad notacional en lo que sigue escribimos $\mathbb{D}(0, 2r)$, para un cierto $r > 0$. Observe, lector, que $f(0) = 1$ y que $f'(0) = \omega$.

Sea g el logaritmo holomorfo de f en el disco $\mathbb{D}(0,2r)$ tal que $g(0)=0$. Observe, lector, que $g'(0)=\omega$.

Consideremos asimismo la función auxiliar $h(z)=(g(z)-\omega z)/z^2$ holomorfa en $\mathbb{D}(0,2r)$ (singularidad evitable en $z=0$) y acotada, digamos por $\Theta>0$ en $\mathbb{D}(0,r)$. Observe, lector, que $g(z)=\omega\, z+z^2h(z)$, si $|z|<2r$.

Fijemos un entero M tal que $M>1/r$. Reescribimos ($\flat$) en la forma

$$a_n=a_{n-1}f(1/n)=a_n e^{g(1/n)}\,, \quad \text{para } n\geq M\,.$$

De manera que

$$a_n=a_M\exp\Big(\sum_{k=M}^{n} g\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big)=c_M\, e^{\omega(H_n-H_{M-1})}\exp\Big(\sum_{k=M}^{n}\frac{1}{k^2}\,h\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big)\,, \quad \text{para } n\geq M\,,$$

donde H_k denota al k-ésimo número armónico $H_k=\sum_{j=1}^{k}1/j$, para $k\geq 1$.

La serie $\sum_{k=M}^{\infty}h(1/k^2)/k^2$ es absolutamente convergente, pues $\sum_{k=M}^{\infty}|h(1/k^2)/k^2|\leq\Theta\zeta(2)$.

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{e^{\omega H_n}}=\Delta\,,$$

donde $\Delta\neq 0$ (de hecho, $\Delta=a_M e^{-\omega H_{M-1}}\exp(\sum_{k=M}^{\infty}h(1/k^2)/k^2)$).

Como $\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\omega}}=e^{\omega\gamma}\Delta\triangleq\kappa\,.$$

Este enfoque, lector, no nos da una fórmula para la constante κ. ——— ♠

Ejemplo 7.4.1 *Números de Catalan.*

Los números de Catalan $C_n, n\geq 0$, vienen dados por

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,.$$

Observe, lector, que $C_0=1$.

Para el cociente de números de Catalan consecutivos se tiene que

$$\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{2n(2n-1}{n(n+1)}=4\,\frac{n^2-n/2}{n^2+n}\,, \quad \text{para } n\geq 1\,.$$

De manera que en este caso y con la notaciones anteriores, $A=4$, $C_0=1$ y $\alpha_1-\gamma_1=-3/2$, y, por tanto,

$$C_n\sim\kappa\frac{4^n}{n^{3/2}}\,, \quad \text{cuando } n\to\infty\,,$$

para una cierta constante $\kappa\neq 0$.

En cuanto a la constante κ, la fórmula (7.15) nos da que $\kappa=1/\sqrt{\pi}\,$. ♣

Coeficientes binómicos

Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \dots\}$. Vamos a obtener aquí un resultado asintótico para la sucesión de coeficientes binómicos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\,2\,\dots n}\,, \quad \text{para } n = 0, 1, 2\dots.$$

Si el lector no está familiarizado con estos coeficientes binómicos generalizados, le sugerimos que adelante unas cuantas páginas y eche un vistazo al apartado 9.1.2 sobre la serie binómica.

Cuando α es un entero no negativo, caso que hemos excluido, la sucesión se hace 0 para $n > \alpha$.

Escribamos

$$\binom{\alpha}{n} = (-1)^{n-1}\frac{\alpha}{n}\prod_{j=1}^{n-1}\Big(1 + \frac{-\alpha}{j}\Big)\,, \quad \text{para } n \ge 1\,.$$

El lema 7.25 nos da que

$$\prod_{j=1}^{n-1}\Big(1 + \frac{-\alpha}{j}\Big) \sim \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}n^{-\alpha}\,, \quad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

Por tanto,

$$\boxed{(-1)^n\binom{\alpha}{n} \sim \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}n^{-\alpha-1}\,, \quad \text{cuando } n \to \infty} \tag{7.16}$$

De (7.16) se deduce que

$$\Big|\binom{\alpha}{n}\Big| \sim \frac{1}{|\Gamma(-\alpha)|}\,n^{-\Re\alpha-1}\,, \quad \text{cuando } n \to \infty\,, \tag{7.17}$$

y de (7.17) se deduce a su vez que

$$(\star) \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Big|\binom{\alpha}{n}\Big|} = 1\,,$$

(con «lím» no con «lím sup»). Más adelante, en el apartado 9.1.2, veremos una demostración alternativa, más básica, de $(\star)$ sin apelar a la función Γ, para comprobar que el radio de convergencia de la serie binómica con parámetro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \dots\}$ es 1.

7.5. Funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con polos dados: Mittag-Leffler

El teorema de Weierstrass permite especificar los ceros de una funciones entera. Vale.

Nos interesamos ahora por la posibilidad de construir funciones meromorfas f en $\mathbb{C}$ que tengan una sucesión de polos $(b_n)_{n\geq 1}$ dada que cumple que $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$. Sin más restricciones sobre f o sus polos, este empeño se resuelve sin dificultad, porque si se construye g entera que se anula exactamente en los b_n entonces la función $f = 1/g$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene polos exactamente en los b_n.

Si quisiéramos una función meromorfa que se anule exactamente en una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ y que tenga polos exactamente en una sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$, sucesiones ambas que cumplen $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, bastaría considerar el cociente $f = g/h$ donde g es entera y se anula exactamente en los a_n, y donde h es entera y se anula exactamente en los b_n.

Recuerde el lector que, al fin y al cabo, éste fue el enfoque seguido para construir la función Γ.

El objetivo que nos ocupa en este apartado, y que el teorema de Mittag-Leffler resuelve, va (mucho) más allá, porque de la función meromorfa a construir se especificará qué parte principal ha de tener en cada polo y no sólo la ubicación de cada polo.

☞ **Nota** 7.5.1. ☜ **Parte principal en un polo.** Si f es holomorfa en $\mathbb{D}(b,r)\setminus\{b\}$ y tiene un polo de orden $k\geq 1$ en esa singularidad aislada b, entonces f se expresa

$$f(z) = \frac{c_k}{(z-b)^k} + \cdots + \frac{c_1}{z-b} + h(z)$$

donde h es holomorfa en $\mathbb{D}(b,r)$. Observe el lector que $c_k \neq 0$, pues el grado de b como polo de f es k.

La **parte principal** de f en b es $\dfrac{c_k}{(z-b)^k} + \cdots + \dfrac{c_1}{z-b}$, que podemos escribir como

$$\frac{c_k}{(z-b)^k} + \cdots + \frac{c_1}{z-b} = Q\Big(\frac{1}{z-b}\Big)$$

donde Q es el polinomio

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{k} c_j z^j\,.$$

Observe el lector que el polinomio Q tiene grado k y que $Q(0)=0$. ♠

El dato del problema general que estamos planteando está conformado por:

1. una sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ de números complejos, todos ellos distintos, y tales que $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$,
2. una sucesión de polinomios $(Q_n)_{n\geq 1}$ (no constantes) y tales que $Q_n(0)=0$.

El objetivo del problema es construir, a ser posible, una función meromorfa f en $\mathbb{C}$ que tenga polos exactamente en los b_n y tal que

$$f(z) - Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big) \quad \text{sea holomorfa en un entorno de } b_n, \text{ para cada } n \geq 1\,.$$

En otros términos, la función meromorfa objetivo f ha de tener parte principal $Q_n\big(\frac{1}{z-b_n}\big)$ en cada $b_n, n \geq 1$. Además, aparte de los b_n, la función objetivo f no tiene ningún otro polo.

Observe el lector que, en contraposición al dato para la cuestión de ceros, ahora se supone que los b_n no se repiten. La razón es que la multiplicidad (el orden como polo) ya viene especificado en el grado del polinomio que da la parte principal.

☞ **Nota** 7.5.2. ☜ En la cuestión de construir funciones enteras con ceros dados, podríamos haber planteado el dato como una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de números distintos tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ más una sucesión k_n de números enteros $k_n \geq 1$ y exigir que la función entera f solución tenga un cero de orden k_n en a_n y no se anule en ningún punto que no sea un a_n. ♠

Si como dato sólo hubiera un número finito de b_n, digamos $(b_n)_{n=1}^N$, podríamos tomar como f la función meromorfa en $\mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)\,.$$

En general, para una sucesión infinita $(b_n)_{n=1}^\infty$ la idea natural sería considerar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)\,,$$

pero, ¡ay!, ésta podría no converger.

En cualquier caso,

Teorema 7.27 (Teorema de Mittag-Leffler) *Sea una sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ de números complejos todos distintos y que cumple $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$. Sea $(Q_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de polinomios no constantes y tales que $Q_n(0) = 0$, para cada $n \geq 1$.*

Entonces existe una función meromorfa f en $\mathbb{C}$ tal que f tiene polos exactamente en los b_n y tal que para cada $n \geq 1$, la parte principal de f en b_n es

$$Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)\,.$$

Por mor de precisión metodológica, conviene señalar que la demostración del teorema de Mittag-Leffler no usa productos infinitos, que es el tema de este capítulo. Su ubicación aquí se debe a su proximidad en objetivos al teorema de Weierstrass de funciones holomorfas con ceros dados, y a que los teoremas de Weierstrass y

Mittag-Leffler combinados nos darán un teorema general de interpolación de funciones enteras que será el objetivo del próximo apartado.

Para la demostración del teorema de Mittag-Leffler nos apoyaremos en el siguiente lema de aproximación y en el corolario que le sigue.

Lema 7.28 *Sea g una función holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Para cada entero $k \geq 1$ existe un polinomio g_k, de grado a lo sumo k, tal que*

$$|g(z) - g_k(z)| \leq \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

En particular,

$$|g(z) - g_k(z)| \leq 2|z|^{k+1}, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \leq 1/2.$$

Corolario 7.29 *Sea g una función holomorfa en un disco $\mathbb{D}(a,r)$, acotada en módulo por una constante M, es decir, $|g(z)| \leq M$, para cada $z \in \mathbb{D}(a,r)$.*

Entonces, para cada entero $k \geq 1$ existe un polinomio g_k, de grado a lo sumo k, tal que

$$|g(z) - g_k(z)| \leq 2M\Big(\frac{|z-a|}{r}\Big)^{k+1}, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z-a| \leq \frac{r}{2},$$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 7.29. Este corolario se obtiene sin más que aplicar el lema 7.28 a la función holomorfa: $z \in \mathbb{D} \mapsto g(a + r\,z)/M$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.28. Pongamos que el desarrollo de g en serie de Taylor alrededor de $z = 0$ viene dado por

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j.$$

Como $|g(z)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, la fórmula de Cauchy nos da que $|c_j| \leq 1$ para $j \geq 0$.

Sea g_k la suma parcial hasta orden k de la serie de potencias de g:

$$g_k(z) = \sum_{j=0}^{k} c_j z^j, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Para $z \in \mathbb{D}$ y $k \geq 0$, acotamos

$$|g(z) - g_k(z)| = \Big|\sum_{j=k+1}^{\infty} c_j\, z^j\Big| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j|\,|z|^j \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |z|^j = \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|},$$

como queríamos ver. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.27 DE MITTAG-LEFFLER. Podemos suponer y suponemos que $b_n \neq 0$ para cada $n \geq 1$. Pues si, digamos $b_1 = 0$, construiríamos f meromorfa en $\mathbb{C}$ que cumple la prescripción de partes principales en cada $b_n, n \geq 2$ para finalmente tomar

$$f(z) = g(z) + Q_1\Big(\frac{1}{z}\Big)\,.$$

Asimismo, podemos suponer y suponemos que los b_n están ordenados según módulo creciente: $0 < |b_1| \leq |b_2| \leq \cdots$.

El candidato natural para la f buscada es la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(1/(z - b_n))$ pero, como ya hemos comentado pudiera ser que esta serie no fuera sumable, y no definiera una función meromorfa. Para lograr sumabilidad pondremos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big) - g_n(z)\Big)\,,$$

donde las g_n son funciones enteras, lo que no altera el objetivo de conseguir las partes principales deseadas en los b_n, y de manera que g_n aproxime bien a $Q_n(1/(z - b_n))$ para que la serie de diferencias sí sea sumable.

Ese es el plan; vamos con él, comenzando con determinar esas buenas aproximaciones.

Fijemos $n \geq 1$. La función $Q_n(1/(z - b_n))$ es holomorfa en el disco $\mathbb{D}(0, |b_n|)$. Denotemos

$$M_n = \max_{|z| \leq |b_n|/2} \big|Q_n(1/(z - b_n))\big|\,.$$

Aplicamos ahora el corolario 7.29 a $Q_n(1/(z-b_n))$ en el papel de g, en el disco $\mathbb{D}(a, r)$ con centro $a = 0$ y con radio $r = |b_n|/2$ y con un k_n que enseguida especificaremos pertinentemente con el fin de obtener un polinomio g_n (de grado a lo sumo k_n) tal que

$$\Big|Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big) - g_n(z)\Big| \leq 2M_n\Big(\frac{|z|}{|b_n|/2}\Big)^{k_n+1}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0, |b_n|/4)\,.$$

Elegimos los k_n de forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_n+1} < +\infty\,,$$

por ejemplo, exigiendo que

$$M_n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_n} \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

Observe el lector que con esta elección de los polinomios g_n tenemos que

$$(\sharp) \quad \Big|Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big) - g_n(z)\Big| \leq \frac{1}{2^n}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0, |b_n|/4) \text{ y cada } n \geq 1\,,$$

pues

$$\begin{aligned}\Big|Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)-g_n(z)\Big| &\le 2M_n\,\Big(\frac{|z|}{|b_n|/2}\Big)^{k_n+1}\\ &\le 2M_n\Big(\frac{|b_n|/4}{|b_n|/2}\Big)^{k_n+1}=2M_n\,\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_n+1}\le\frac{1}{2^n}\,.\end{aligned}$$

Pues bien, la función f dada por

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)-g_n(z)\Big)$$

cumple, como comprobamos a continuación, todos los requerimientos del enunciado.

Fijemos $R>0$. Fijemos N_R tal que $|b_n|>4R$, para $n\ge N_R$.

Sea $|z|\le R$, como $|z|<|b_n|/4$, para $n\ge N_R$, tenemos que

$$\Big|Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)-g_n(z)\Big|\le\frac{1}{2^n}\,.$$

Además, para cada $n\ge N_R$ se tiene que $Q_n(1/(z-b_n)$ es holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$, pues $|b_n|>4R$. Por el criterio M de Weierstrass para series, corolario 5.15, deducimos que

$$\sum_{n\ge N_R}\Big(Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)-g_n(z)\Big)\quad\text{es holomorfa en }\mathbb{D}(0,R)\,.$$

En consecuencia, esto nos dice que f está bien definida en $\mathbb{D}(0,R)$ y además que la diferencia

$$f(z)-\sum_{n=1}^{N_R-1}Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)=\sum_{n\ge N_R}\Big(Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)-g_n(z)\Big)-\sum_{n=1}^{N_R-1}g_n(z)$$

es holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$.

Consideremos ahora la suma

$$S_R(z)=\sum_{n=1}^{N_R-1}Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)\,.$$

Todos los b_n con $|b_n|<R$ intervienen en la suma S_R pues, si $n\ge N_R$, se tiene $|b_n|\ge 4R$. Los otros sumandos de S_R tienen $|b_n|\ge R$ y son, por tanto, funciones holomorfas en $\mathbb{D}(0,R)$. Así que

$$S_R(z)=\sum_{\substack{n\ge1;\\|b_n|<R}}Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)+\big(\text{función holomorfa en }\mathbb{D}(0,R)\big)\,.$$

Por consiguiente,

$$f(z) - \sum_{\substack{n\geq 1;\\ |b_n|<R}} Q_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big) \quad \text{es holomorfa en } \mathbb{D}(0,R)\,.$$

Así que f cumple en el disco $\mathbb{D}(0,R)$ las estipulaciones del enunciado. Como esto es cierto para todo $R>0$ tenemos que f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que cumple lo exigido en el enunciado. ■

Si el lector tiene a bien revisar con cariño y atención la demostración del teorema 7.27, observará sin dificultad que pequeñas variaciones de su argumento demuestran de hecho la siguiente versión más general.

Teorema 7.30 (Extensión del teorema de Mittag-Leffler en $\mathbb{C}$) *Sea una sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ de números complejos todos distintos y que cumple* $\lim_{n\to\infty}|b_n| = +\infty$*. Sea $(\Theta_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones enteras no constantes y tales que para cada $n\geq 1$ se cumple que $\Theta_n(0)=0$.*

Entonces existe una función f holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{b_n; n\geq 1\}$ tal que, para cada $n\geq 1$,

$$f(z) - \Theta_n\Big(\frac{1}{z-b_n}\Big)$$

es holomorfa en un entorno de b_n.

Para cada $n\geq 1$, si el dato Θ_n es un polinomio, entonces f tiene en b_n un polo (con parte principal prescrita), mientras que si Θ_n no es un polinomio, entonces f tiene una singularidad esencial en b_n (con la parte de exponentes negativos del desarrollo de Laurent prescrito).

7.6. Funciones enteras con valores dados: interpolación

Vamos a combinar ahora los teoremas de Weierstrass y de Mittag-Leffler para abordar la siguiente cuestión de interpolación con funciones enteras.

El dato consiste ahora en dos sucesiones: $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(w_n)_{n\geq 1}$. El objetivo es construir, a ser posible, una función holomorfa f tal que $f(a_n)=w_n$, para cada $n\geq 1$.

El ingrediente básico de la construcción es el siguiente. Supongamos que g es una función holomorfa en un disco $\mathbb{D}(a,r)$, con $r>0$, en cuyo centro a tiene un cero simple, y que h es una función holomorfa en $\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\}$ que en a tiene un polo simple, entonces la función producto $g\cdot h$ tiene en a una singularidad evitable y

$$(g\cdot h)(a) = g'(a)\ \text{Residuo}(h;a)\,.$$

Así que si $g'(a)$ está dado y queremos que $(g\cdot h)(a)=w$ necesitamos que

$$\text{Residuo}(h;a) = \frac{w}{g'(a)}\,.$$

Observe el lector que $g'(a)\neq 0$, pues hemos supuesto que a es cero simple de g.

Teorema 7.31 (Interpolación con funciones enteras.) *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión cuyos términos son todos distintos y es tal que* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ *y sea $(w_n)_{n\geq 1}$ una sucesión cualquiera. Entonces existe una función entera tal que*

$$f(a_n) = w_n\,, \quad \textit{para cada } n \geq 1\,.$$

Observe, lector, que en el enunciado no se impone restricción alguna sobre la sucesión $(w_n)_{n\geq 1}$.

DEMOSTRACIÓN. Con la idea expuesta antes del enunciado la demostración es muy directa. Apelamos primero al teorema 7.22, de Weierstrass, para conseguir una función entera g que tenga ceros simples en los a_n (nótese que por hipótesis los (a_n) son todos distintos).

Como los a_n son ceros simples, se tiene que $g'(a_n) \neq 0$, para cada $n \geq 1$.

Apelamos seguidamente al teorema 7.27, de Mittag-Leffler, para conseguir una función h meromorfa en $\mathbb{C}$ que tiene polos exactamente en los a_n con partes principales respectivas

$$\frac{w_n/g'(a_n)}{z - a_n}\,.$$

La función h no tiene otros polos. Así que la función producto $f = g \cdot h$ es entera y, como explicábamos justo antes del enunciado, cumple, para cada $n \geq 1$, que

$$f(a_n) = g'(a_n)\ \text{Residuo}(h; a_n) = g'(a_n)\,\frac{w_n}{g'(a_n)} = w_n\,.$$

■

A la vista de esta demostración, es claro que *no* hemos usado toda la potencia del teorema de Mittag-Leffler, y que podemos prescribir más sobre el valor de f en los a_n. Una ligera variación del argumento anterior permite demostrar un teorema aún más general.

Supongamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números complejos *distintos* tales que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Para cada $n \geq 1$, damos un entero $N_n \geq 1$ y una lista finita (de longitud $N_n + 1$) de números complejos $(b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_{N_n}^{(n)})$.

Teorema 7.32 (General de interpolación por funciones enteras) *Con las notaciones y los datos anteriores, existe una función entera f tal que*

$$f^{(j)}(a_n) = b_j^{(n)}\,, \quad \textit{para cada } n \geq 1 \textit{ y cada } 0 \leq j \leq N_n\,.$$

En otros términos, no sólo se puede especificar el valor de la función entera f en cada a_n sino además un número finito de derivadas de f en cada uno de esos a_n.

Observe, lector, que el teorema de existencia de funciones enteras con ceros dados (con multiplicidades prefijadas) es un caso particular del teorema 7.31.

Para la demostración del teorema 7.32 seguiremos el mismo argumento de la demostración del teorema 7.31, usando el lema que sigue y su corolario.

Lema 7.33 *Sean f, g holomorfas en un entorno de 0 y tal que $f(0) \neq 0$. Para cada n existe un polinomio h de grado n tal que*

$$f(z)h(z) - g(z) = O(|z|^{n+1}), \quad \text{cuando } z \to 0 .$$

En otras palabras, el desarrollo de Taylor de fh y el de g coinciden hasta el coeficiente de z^n. En este lema, tenemos $n+1$ grados de libertad, los coeficientes de h, y queremos que se cumplan $n+1$ ecuaciones, $(fh-g)^{(j)}(0) = 0$, para $0 \leq j \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos que los desarrollos de Taylor de f y de g en potencias de z vienen dados por $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ y $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Por hipótesis, $a_0 \neq 0$.

Sea $h(z) = \sum_{k=0}^{n} c_n z^n$ el polinomio incógnita.

El producto fh se desarrolla

$$\begin{aligned} f(z)h(z) = a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_01)\, z + (a_0c_1 + a_1c_1 + a_2c_0)\, z^2 \\ + \cdots + (a_0c_n + \cdots + a_nc_0)\, z^n + O(|z|^{n+1}). \end{aligned}$$

De manera que queremos elegir los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ para que se cumplan las ecuaciones

$$\begin{array}{lll} (0) & b_0 & = a_0c_0, \\ (1) & b_1 & = a_0c_1 + a_1c_0, \\ (\cdot) & \cdots & = \cdots, \\ (n) & b_n & = a_0c_n + \cdots + a_nc_0. \end{array}$$

Como $a_0 \neq 0$, la ecuación j-ésima permite despejar c_j en términos de las c anteriores: $c_0, c_1, \ldots, c_{j-1}$ (y de los datos a y b), así que comenzando con la ecuación (0) tenemos $c_0 = b_0/a_0$, luego con la ecuación (1) obtenemos c_1 (usando c_0) y así sucesivamente.

Matricial y alternativamente, tenemos que

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} .$$

Podemos invertir la matriz cuadrada $(n+1) \times (n+1)$, pues su determinante es $a_0^{n+1} \neq 0$, para obtener la matriz columna de las c. ■

Corolario 7.34 *Sean f y g holomorfas en un entorno de 0, de manera que f tiene un cero de orden $k+1$ en $z = 0$, donde $k \geq 0$. Entonces existe un polinomio h de grado $k+1$, con $h(0) = 0$ y tal que*

$$f(z)h\Big(\frac{1}{z}\Big) - g(z) = O(|z|^{k+1}) .$$

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $f(z) = z^{k+1}F(z)$ donde F es holomorfa en un entorno de $z = 0$. Obsérvese que $F(0) \neq 0$. Por el lema 7.33 existe un polinomio de grado k tal que

$$F(z)H(z) - g(z) = O(|z|^{k+1})\,.$$

Pongamos que $H(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_k z^k$, entonces

$$\frac{1}{z^{k+1}}H(z) = \frac{c_0}{z^{k+1}} + \frac{c_1}{z^k} + \cdots + \frac{c_k}{z} = h\Big(\frac{1}{z}\Big)\,,$$

donde h es el polinomio

$$h(z) = c_0 z^{k+1} + c_1 z^k + \cdots + c_k z$$

de grado $k+1$ y tal que $h(0) = 0$.

Observe, lector, para finalizar, que

$$f(z)\,h\Big(\frac{1}{z}\Big) - g(z) = z^{k+1}F(z)\,h\Big(\frac{1}{z}\Big) - g(z) = F(z)\,H(z) - g(z) = O(|z|^{k+1})\,.$$

■

Podemos ya pasar a:

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.32. Para cada $n \geq 1$ formamos el polinomio

$$g_n(z) = \sum_{j=0}^{N_n} \frac{b^{(n)_j}}{j!} z^j\,.$$

Sea F una función entera que se anula únicamente en los a_n y tal que en a_n tiene un cero de orden $N_n + 1$, para cada $n \geq 1$.

Usando el corolario 7.34 obtenemos que para cada $n \geq 1$ existe un polinomio Q_n de grado $N_n + 1$ de manera que

$$F(z) \cdot Q_n\Big(\frac{1}{z - a_n}\Big) = g_n(z - a_n) + O\big(|z - a_n|^{N_n+1}\big)\,.$$

Con el teorema de Mittag-Leffler 7.27 obtenemos G meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos únicamente en los a_n y con parte principal $Q_n(1/(z - a_n))$ en a_n, para cada $n \geq 1$.

La función $f(z) = F(z)G(z)$ es entera y

$$F(z) = g_n(z - a_n) + O\big(|z - a_n|^{n+1}\big)$$

para cada $n \geq 1$.

La función f cumple los requisitos estipulados en el enunciado del teorema. ■

Se puede incluso amalgamar los teoremas de Mittag-Leffler y de interpolación con funciones enteras en un teorema general que exhibe funciones enteras con polinomios de Taylor especificados en una sucesión de puntos y partes principales especificadas en otra sucesión de puntos, ambas sucesiones convergiendo a $\infty_{\mathbb{C}}$, como se recoge en el siguiente:

Teorema 7.35 *Sean* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *y* $(b_n)_{n=1}^\infty$ *dos sucesiones disjuntas, es decir,* $a_j \neq b_k$, *para cualesquiera* $j, k \geq 1$ *y que cumplen que* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$.

Asociado a cada a_n, *tenemos un polinomio* P_n *de grado, digamos* N_n.

Asociado a cada b_n, *tenemos un polinomio* Q_n *tal que* $Q_n(0) = 0$.

Existe una función holomorfa f *en* $\mathbb{C} \setminus \{b_n; n \geq 1\}$ *tal que*

$$(\star) \quad f(z) - P_n(z - a_n) = O\big(|z - a_n|^{N_n+1}\big)\,, \quad \textit{para todo } n \geq 1\,,$$

y tal que

$$f(z) - Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big) \quad \textit{es holomorfa en un entorno de } b_n, \textit{ para todo } n \geq 1.$$

Observe, lector, cómo la condición $(\star)$ especifica los valores de las derivadas $f^{(j)}(a_n)$, para $0 \leq j \leq N_n$.

DEMOSTRACIÓN. Tomamos primero, con Mittag-Leffler, g meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que

$$g(z) - Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big) \quad \text{es holomorfa en un entorno de } b_n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Para cada $n \geq 1$, sea $R_n(z - a_n)$ el polinomio de Taylor de grado N_n de g alrededor de $z = a_n$. Así que

$$g(z) - R_n(z - a_n) = O\big(|z - a_n|^{N_n+1}\big)\,, \quad \text{para todo } n \geq 1\,.$$

Con el teorema de interpolación tomamos ahora h entera tal que

$$h(z) - P_n(z - a_n) + R_n(z - a_n) = O\big(|z - a_n|^{N_n+1}\big)\,, \quad \text{para todo } n \geq 1\,.$$

La función $f = g + h$ cumple los requisitos del enunciado, pues como h es entera

$$f(z) - Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big) \quad \text{es holomorfa en un entorno de } b_n, \text{ para todo } n \geq 1\,,$$

y además, para cada a_n,

$$\begin{aligned} f(z) - P_n(z - a_n) &= g(z) + h(z) - P_n(z - a_n) \\ &= R_n(z - a_n) + O(|z - a_n|^{N_n+1}) + h(z) - P_n(z - a_n) \\ &= O(|z - a_n|^{N_n+1}) + O(|z - a_n|^{N_n+1}) = O(|z - a_n|^{N_n+1})\,. \end{aligned}$$

■

7.7. Ceros, polos e interpolación en dominios generales

Los teoremas que hemos visto en los apartados anteriores sobre existencia de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ con ceros dados, de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con polos con partes principales dadas y de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ que interpolan valores tienen versiones correspondientes en dominios Ω generales.

El teorema de interpolación con funciones enteras, incluso en su versión más general, se ha obtenido combinando el teorema de Weierstrass sobre ceros con el teorema de Mittag-Leffler sobre polos, más algunas cuestiones locales, así que con ligeras modificaciones se puede, como veremos, obtener un teorema de interpolación en un dominio general siempre que dispongamos ya de las versiones de estos dos teoremas (Weierstrass y Mittag-Leffler) para dominios generales.

Por su parte, la demostración del teorema de Mittag-Leffler para dominios generales precisa de herramientas adicionales, teorema de aproximación de Runge, que nos ocuparán más adelante, en concreto en el capítulo 14. Así que proponemos posponer, si el lector no tiene objeción, su demostración hasta ese momento.

El plan de este apartado es el siguiente. Para un dominio Ω en $\mathbb{C}$ general, primero enunciaremos, demostraremos e ilustraremos el teorema sobre ceros, a continuación, enunciaremos el teorema sobre polos y, finalmente, combinaremos estos dos teoremas para enunciar y demostrar el teorema de interpolación.

A. Ceros

La versión del teorema de Weierstrass para dominios generales reza así:

Teorema 7.36 (de Weierstrass sobre ceros, dominios generales) *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de puntos de Ω sin punto de acumulación en Ω. Entonces existe una función f holomorfa en Ω que se anula exactamente en los a_n.*

De entrada postulamos que buscamos una función que se anula en una sucesión infinita porque si el dato fuera un conjunto finito de puntos $(a_n)_{n=1}^N$ entonces el resultado es trivial: basta con tomar como función f al polinomio $f(z) = \prod_{n=1}^N (z - a_n)$ que es una función entera y, por consiguiente, holomorfa en Ω.

Por supuesto, si los a_n tuvieran puntos de acumulación en Ω, la única función f holomorfa en Ω que se anula en todos los a_n es $f \equiv 0$.

De igual manera que en el teorema de Weierstrass en $\mathbb{C}$, cada a_n puede repetirse un número finito de veces y eso significa que se requiere que la función f se anule en a_n tantas veces como aparece en la sucesión.

En el caso del teorema en el que el dominio es $\mathbb{C}$, la sucesión dato $(a_n)_{n=1}^\infty$ sólo se acumula en $\infty_{\mathbb{C}}$, mientras que ahora la sucesión dato $(a_n)_{n=1}^\infty$ se acumula tan sólo en puntos de $\partial\Omega$, aunque ya apuntamos que puede que incluso se acumule sobre todo $\partial\Omega$.

En el corolario 7.24 exhibíamos cualquier función meromorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ como cociente de funciones enteras holomorfas en todo $\mathbb{C}$. Vamos a considerar ahora este mismo asunto, pero para un dominio Ω y no para el plano complejo $\mathbb{C}$.

Para un dominio Ω denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas en Ω, es decir, el conjunto de las funciones f que son holomorfas en Ω salvo un conjunto de puntos sin acumulación donde tiene polos. Los polos de una función meromorfa en Ω no pueden tener punto de acumulación en Ω (pues ese punto de acumulación no sería una singularidad aislada.

El conjunto $\mathcal{M}(\Omega)$ dotado de las operaciones de suma y producto de multiplicación de funciones es un cuerpo. Si f es meromorfa en Ω y no idénticamente nula entonces $1/f$ es asimismo meromorfa en Ω. De hecho, los polos de $1/f$ son ceros de f y los ceros de $1/f$ son polos de f, con los mismos órdenes.

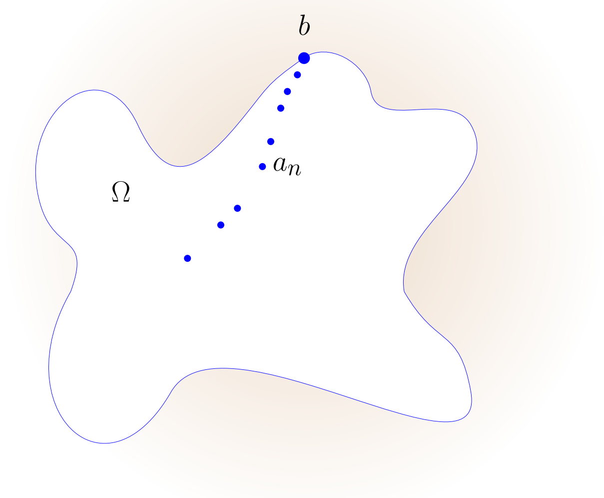
Análogamente al corolario 7.24 tenemos que:

Corolario 7.37 *Si f es una función meromorfa en un dominio Ω, entonces f puede escribirse como el cociente $f \equiv g/h$, donde g, h son holomorfas en Ω y h no es idénticamente nula. Y recíprocamente, todo tal cociente define una función meromorfa en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función f meromorfa en Ω tuviera un número finito de polos $a_1, \ldots, a_n$ (repetidos según su multiplicidad) entonces tomamos $h(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - a_j)$ que es entera y tal que $f\,h$ es holomorfa en Ω.

Supongamos que f tiene infinitos polos. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ los polos de f repetidos según su multiplicidad. Como hemos comentado más arriba los a_n no se acumulan en Ω. El teorema 7.36 de Weierstrass nos da una función h holomorfa en Ω que se anula (exactamente) en los a_n. El producto $g \equiv f\,h$ tiene singularidades evitables en los a_n y es, por tanto, holomorfo en Ω. Como $f \equiv g/h$ obtenemos la conclusión deseada. ■

Antes de abordar la demostración propiamente dicha del teorema 7.36 consideremos, lector, el caso particular en que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge toda ella entera hacia un único punto b de $\partial\Omega$; el análisis de este caso particular iluminará el enfoque del caso general.



Dibujo 7.1. UN SOLO PUNTO b DE ACUMULACIÓN.

Si $b = \infty_{\mathbb{C}}$, entonces, de hecho, por el teorema 7.22 hay una función f entera (y, por tanto, holomorfa en Ω) que se anula exactamente en los a_n.

Supongamos que $b \in \mathbb{C}$. El plan natural ahora pasa por 1) cambiar variables haciendo que b vaya $\infty_{\mathbb{C}}$, 2) usar el caso entero como acabamos de comentar, para, finalmente, 3) deshacer el cambio de variables. Veamos.

1) Consideremos la transformación de Möbius $z \to 1/(z-b)$ que lleva b en $\infty_{\mathbb{C}}$ y transforma la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en la sucesión $c_n = 1/(a_n - b)$, para cada $n \geq 1$. Observe, lector, que $c_n \to \infty_{\mathbb{C}}$, cuando $n \to \infty$.

2) Sea g una función entera que se anula exactamente en los c_n.

3) Sea f la función

$$f(z) = g\Big(\frac{1}{z-b}\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Esta función f es holomorfa en Ω, porque $b \notin \Omega$, y, además, se anula exactamente en los a_n, pues g se anula exactamente en los c_n. Así que, en este caso especial, la función f resuelve la cuestión planteada.

Conviene notar que la función g se puede escribir, tal y como se hace en la demostración del teorema 7.22 en la forma

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{z}{c_n}\Big)\,,$$

y que, por tanto, f se puede expresar de manera explícita como

$$(\star) \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{a_n - b}{z-b}\Big)\,.$$

Podíamos haber arrancado el análisis de este caso particular *deus ex machina* con la expresión $(\star)$. El factor n-ésimo de este producto es holomorfo, porque $b \notin \Omega$, y se anula en a_n. Además, para z en un compacto de Ω, como $a_n \to b$, tendríamos que para n grande el cociente $(a_n - b)/(z-b)$ sería uniformemente pequeño y, por tanto, $E_n\big((a_n-b)/(z-b)\big)$ sería adecuadamente próximo a 1, garantizando la convergencia del producto infinito.

Esta discusión previa sugiere, como enfoque para el caso general en el que los a_n no se aproximan a un único punto concreto de $\partial\Omega$, considerar la función

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{a_n - b_n}{z-b_n}\Big), \quad \text{para todo } z \in \Omega$$

donde, con el fin de garantizar que todos los factores sean holomorfos en Ω, se tomarían de partida $b_n \notin \Omega$, para $n \geq 1$. Para que este producto converja (uniforme y absolutamente sobre compactos de Ω) necesitaríamos poder seleccionar los b_n de forma que $a_n - b_n \to 0$.

Podríamos completar este enfoque, sin más ingredientes, en el caso en el que el dominio Ω está acotado. En este caso, se ha de dar que $\operatorname{dist}(a_n, \partial\Omega) \to 0$, cuando $n \to \infty$, y si tomamos $b_n \in \partial\Omega$ tal que, por ejemplo, $|b_n - a_n| \leq 2\operatorname{dist}(a_n, \partial\Omega)$, tendríamos, en efecto, que $b_n - a_n \to 0$.

Pero, para un dominio Ω no acotado, no tiene por qué darse que $\operatorname{dist}(a_n, \partial\Omega) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, si $\Omega = \mathbb{H}$ y si $a_n = n$, para cada $n \geq 1$, entonces a_n no se acumula en Ω, pero $\operatorname{dist}(a_n, \partial\Omega) = n \to +\infty$, cuando $n \to \infty$.

¡Hum!, y ¿si pudiéramos transformar biholomorfamente el dominio Ω dado en un dominio $\widetilde{\Omega}$ acotado? Algo de esta índole pondremos en práctica en la demostración general que sigue y para la que ya disponemos de todas los ingredientes.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.36. Con una transformación lineal, podemos suponer, y suponemos, que $0 \in \Omega$, que $\mathbb{D} \subset \Omega$ y que $|a_n| > 1$, para cada $n \geq 1$.

Transformamos Ω en $\widetilde{\Omega}$ aplicando la transformación $z \mapsto 1/z$:

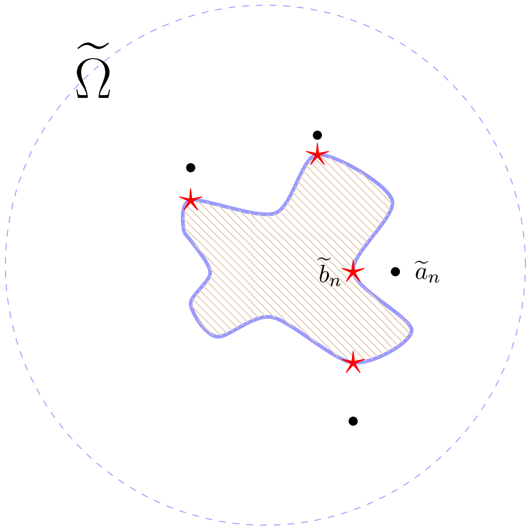
$$\widetilde{\Omega} = \left\{ \frac{1}{z}; z \in \Omega \setminus \{0\} \right\}.$$

Observe, lector, que «hemos perdido» el punto 0 de Ω, que se ha transformado en $\infty_{\mathbb{C}}$.

El dominio $\widetilde{\Omega}$ contiene a $\{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$; además, $\partial\widetilde{\Omega}$, excluyendo $\infty_{\mathbb{C}}$, está contenido en $\operatorname{cl}(\mathbb{D})$.

Denotemos $\tilde{a}_n = 1/a_n$, para cada $n \geq 1$. Observe, lector, que $\tilde{a}_n \in \mathbb{D}$, para cada $n \geq 1$, que los $\tilde{a}_n$ se acumulan en $\partial\widetilde{\Omega}$ y que, por tanto, $d(\tilde{a}_n, \partial\widetilde{\Omega}) \to 0$, cuando $n \to \infty$. Para esta última observación quizá convenga apuntar que, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{dist}(z, \partial\widetilde{\Omega}) \geq \varepsilon\}$ es compacto.

El objetivo ahora es construir una función $\tilde{f}$ holomorfa en $\widetilde{\Omega}$ que se anule en los $\tilde{a}_n$, para luego definir f en Ω deshaciendo el cambio mediante $f(z) = \tilde{f}(1/z)$. Esta f sería holomorfa en $\Omega \setminus \{0\}$ y se anularía en los a_n. Observe, lector, que este plan requerirá que lidiemos con la holomorfía de esta f en 0, pero le adelantamos que esto no supondrá una dificultad seria.



Dibujo 7.2. DOMINIO $\widetilde{\Omega}$.

Para cada $n \geq 1$, tomemos $\tilde{b}_n$ en $\partial\widetilde{\Omega}$, con $|\tilde{b}_n| \leq 1$ tal que $|\tilde{a}_n - \tilde{b}_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, podríamos tomar $\tilde{b}_n$ tal que $\mathrm{dist}(\tilde{a}_n, \partial\widetilde{\Omega}) = |\tilde{a}_n - \tilde{b}_n|$. Definamos

$$\tilde{f}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{\tilde{a}_n - \tilde{b}_n}{z - \tilde{b}_n}\Big), \quad \text{para todo } z \in \widetilde{\Omega}\,.$$

Para verificar que el producto definitorio de $\tilde{f}$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\widetilde{\Omega}$, fijemos K compacto, $K \subset \widetilde{\Omega}$. Sea $\delta = \mathrm{dist}(K, \partial\widetilde{\Omega})$. Para un cierto $N = N_\delta$ tenemos que $|\tilde{a}_n - \tilde{b}_n| \leq \delta/2$, para $n \geq N$; de manera que

$$\Big|\frac{\tilde{a}_n - \tilde{b}_n}{z - \tilde{b}_n}\Big| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para } z \in K \text{ y } n \geq N\,.$$

Apelando ahora al lema de acotación de factores primarios, lema 7.20, deducimos que

$$\Big|1 - E_n\Big(\frac{\tilde{a}_n - \tilde{b}_n}{z - \tilde{b}_n}\Big)\Big| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \text{para } z \in K \text{ y } n \geq N\,.$$

De donde, por el teorema M de Weierstrass para productos infinitos, teorema 7.13, se concluye que, en efecto, el producto infinito definitorio de $\tilde{f}$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\widetilde{\Omega}$ y que $\tilde{f}$ es holomorfa en $\widetilde{\Omega}$ y se anula exactamente en los $\tilde{a}_n$.

Con todo esto tenemos que la función f es holomorfa en $\Omega \setminus \{0\}$ y que se anula exactamente en los a_n.

Para gestionar el comportamiento de f cerca de 0 registramos la siguiente acotación de $\tilde{f}$ para $|z| > 5$ como sigue. Si $z \in \widetilde{\Omega}$ se tiene $|z - \tilde{b}_n| \geq 4$ y, por tanto que

$|\tilde{a}_n - \tilde{b}_n|/|z - \tilde{b}_n| \le (1/2)$, para cada $n \ge 1$. Por consiguiente, si $|z| > 5$ entonces

$$|\tilde{f}(z)| \le \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \Big|1 - E_n\Big(\frac{\tilde{a}_n - \tilde{b}_n|}{|z - \tilde{b}_n|}\Big)\Big|\Big) \le \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\big) < e^{1/2}.$$

En consecuencia,

$$|f(z)| < e^{1/2}\,, \quad \text{si } |z| < 1/5\,.$$

Por consiguiente, la función f tiene una singularidad evitable en $z = 0$.

Finalmente, si f (al definirse en $z = 0$) se anulase en $z = 0$, digamos, de orden k, tomaríamos como solución final de nuestros afanes y desvelos constructivos a la función $\hat{f}$ dada por

$$\hat{f}(z) = \frac{f(z)}{z^k}\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega\,.$$

■

B. Polos.

La versión del teorema de Mittag-Leffler para dominios generales reza así:

Teorema 7.38 (Teorema de Mittag-Leffler, dominios generales) *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y sea una sucesión $(b_n)_{n\ge 1}$ de elementos de Ω todos distintos y sin punto de acumulación en Ω. Sea $(Q_n)_{n\ge 1}$ una sucesión de polinomios no constantes y tales que $Q_n(0) = 0$, para cada $n \ge 1$.*

Entonces existe una función meromorfa f en Ω tal que f tiene polos exactamente en los b_n y tal que, para cada $n \ge 1$,

$$\text{la parte principal de } f \text{ en } b_n \text{ es} \quad Q_n\Big(\frac{1}{z - b_n}\Big)\,.$$

Como ya hemos advertido, la demostración del teorema de Mittag-Leffler para dominios generales requiere algunas herramientas que desarrollaremos más adelante.

C. Interpolación.

El teorema de interpolación mediante funciones holomorfas en un dominio Ω general va como sigue:

Supongamos que $(a_n)_{n\ge 1}$ es una sucesión de elementos *distintos* de Ω sin punto de acumulación en Ω.

Para cada $n \ge 1$, damos un entero $N_n \ge 1$ y una lista finita (de longitud $N_n + 1$) de números complejos $(b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_{N_n}^{(n)})$.

Teorema 7.39 (Interpolación con holomorfas, dominios generales) *Con las notaciones y los datos anteriores, existe una función f holomorfa en Ω tal que*

$$f^{(j)}(a_n) = b_j^{(n)}\,, \quad \text{para cada } n \ge 1 \text{ y cada } 0 \le j \le N_n\,.$$

La demostración del teorema 7.39 es casi idéntica a la del caso particular de $\mathbb{C}$, teorema 7.31, pero usando ahora los teoremas de Weierstrass y de Mittag-Leffler para funciones holomorfas en dominios generales, teoremas 7.38 y 7.39 en lugar de los correspondientes para $\mathbb{C}$.

7.8. El anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ de funciones holomorfas

El conjunto de funciones enteras en un dominio Ω es un anillo con las operaciones de suma y de producto de funciones; la maquinaria de teoremas de Weierstrass y de interpolación nos va a permitir estudiar sus propiedades algebraicas.

Abreviaremos habitualmente y hablaremos de las funciones 1 y nula para referirnos, respectivamente, a la función idénticamente 1 en Ω y la función idénticamente 0 en Ω, que aparecerán frecuentemente como elementos neutros que son de las operaciones de producto y de suma en $\mathcal{H}(\Omega)$. Además decimos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es no nula, para significar que la función f no es idénticamente nula, es decir, no es la función nula.[7]

7.8.1. Divisibilidad

Con ritmo vivo[8] apuntamos a continuación las caracterizaciones oportunas de distintas cuestiones de divisibilidad en el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$, que dilucidaremos usando como herramientas básicas el teorema de Weierstrass, teorema 7.36, sobre funciones holomorfas en Ω con ceros dados y el teorema 7.39, de interpolación con funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$.

• UNIDADES. Las **unidades** de $\mathcal{H}(\Omega)$ son justamente las funciones holomorfas en Ω que no se anulan. Es decir, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ es unidad si y sólo $\mathcal{Z}_h = \emptyset$

• DIVISIBILIDAD. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f **divide a** g (en notación $f|g$) si la función cociente g/f es holomorfa en Ω, es decir, si $m(g, z) \geq m(f, z)$ para todo $z \in \Omega$, es decir, si f se anula en $z \in \Omega$ entonces g se anula en z, al menos el mismo número de veces. Note, lector, que, en particular si $f|g$, entonces $\mathcal{Z}_f \subset \mathcal{Z}_g$.

• COPRIMALIDAD. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f, g \not\equiv 0$, entonces las funciones f, g son **coprimas** (o primas entre sí) si no tienen divisores comunes (salvo unidades).

Coprimalidad equivale a que $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g = \emptyset$.

Veamos. Si $h|f$ y $h|g$ y h no es unidad, entonces $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g \supset \mathcal{Z}_h \neq \emptyset$. Recíprocamente, si $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g \neq \emptyset$, por el teorema de Weierstrass tenemos h que se anula exactamente en $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g$ (una vez en cada punto); h no es unidad y divide a f y a g.

• PRIMOS. Una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no idénticamente nula es un **elemento primo** de $\mathcal{H}(\Omega)$ si no es unidad y de $f|gh$ se deduce que $f|g$ o $f|h$.

Los elementos primos de $\mathcal{H}(\Omega)$ son precisamente las funciones que se factorizan como $(z-a)h(z)$ donde $a \in \Omega$ y donde h es unidad.

[7] Picajosillos, andamos, Sancho.
[8] Entre allegro y vivace.

Veamos. Supongamos que f es primo. Como f no es unidad, se tiene que $\mathcal{Z}_f \neq \emptyset$. Sea $a \in \mathcal{Z}_f$. Tomemos g que se anula en a tantas veces como f y en ningún otro punto, y h que se anula exactamente en $\mathcal{Z}_f \setminus \{a\}$, tantas veces en cada punto como lo hace f. Entonces $f \mid gh$. Como $f \nmid h$, ha de darse que $f \mid g$, es decir, $f = (z-a)^k u$, con $k = m(f,a)$ y u una unidad. Si $k \geq 2$ tendríamos que $f \mid (z-a)(z-a)^{k-1}$, y entonces $f \mid (z-a)$ o $f \mid (z-a)^{k-1}$, de manera que $m(f,a) \leq k-1$. Por tanto $k = 1$.

Recíprocamente, si $(z-a) \mid gh$, una de las dos funciones g, h se anula en a y por tanto $(z-a)$ la divide.

En otro términos, los elementos primos de $\mathcal{H}(\Omega)$ son las funciones que se anulan en un único punto, en el cual se anulan con orden 1, es decir, de la forma $(z-a)u(z)$ donde u es una unidad.

• IRREDUCIBLES. Una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es **irreducible** si no es unidad y no se puede factorizar $f = gh$ donde $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ no son unidades.

Los elementos irreducibles f son, de nuevo, las funciones $(z-a)u(z)$ donde $a \in \Omega$ y u es unidad. Veamos.

Si $f = (z-a)u(z)$ se factoriza $(z-a) = gh$ con $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$, una sola de las dos funciones g, h se anula en a y la otra es una unidad. Por tanto, $f = (z-a)u(z)$ es irreducible.

Recíprocamente, supongamos que f es irreducible y que se anula en más de un punto. Sea $\mathcal{Z}_f = C \cup D$, una partición con $C, D \neq \emptyset$. Tomamos g que se anula en C con la misma multiplicidad que f y h que se anula en D con la misma multiplicidad que f. Entonces $f = ghu = g(hu)$ donde u es unidad y f no sería irreducible.

• MÁXIMO COMÚN DIVISOR. Para una familia $\mathcal{F}$ de funciones no nulas de $\mathcal{H}(\Omega)$, un máximo divisor de $\mathcal{F}$ es una función g tal que $g|f$ para toda $f \in \mathcal{F}$, y es tal que si $h|f$ para toda $f \in \mathcal{F}$ entonces $h|g$.

Lema 7.40 *Toda familia $\mathcal{F}$ de funciones no nulas de $\mathcal{H}(\Omega)$ tiene máximo común divisor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{Z} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{Z}_f$. Si $\mathcal{Z} = \emptyset$ entonces los únicos divisores comunes de $\mathcal{F}$ son unidades y, por tanto, la función constante 1 es máximo común divisor. Si $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, sea h holomorfa en Ω y tal que $m(h,z) = \text{mín}\{m(f,z); f \in \mathcal{F}\}$, para cada $z \in \mathcal{Z}$. Esta función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ es máximo común divisor de $\mathcal{F}$. ■

Observe, lector, que el máximo común divisor de una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ está definido salvo unidades: d_1, d_2 son máximo común divisor de $\mathcal{F}$ si y sólo si d_1/d_2 es unidad.

Tome nota, lector, de que dos funciones no nulas $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ son coprimas si y sólo si su máximo común divisor es la constante 1, o una unidad cualquiera.

El siguiente teorema de Joseph (Henry Maclagan) Wedderburn nos dice que en el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ se cumple la **identidad de Bezout.**

Teorema 7.41 (Teorema de Wedderburn) *Sea $f(z), g(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ coprimas, es decir, tales que $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g = \emptyset$. Entonces existen funciones $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ holomorfas en Ω tales que*

$$1 \equiv \alpha(z) f(z) + \beta(z)\, g(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \Omega\,.$$

DEMOSTRACIÓN. La conclusion del enunciado es equivalente a comprobar que podemos hallar una función $\beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que el cociente

$$\frac{1-\beta(z)g(z)}{f(z)}$$

sea una función holomorfa en Ω. En otros términos, buscamos $\beta(z)$ tal que $1 - \beta(z)g(z)$ tiene en cada cero de f un cero con al menos el mismo orden que el de f.

Para verificar la existencia de la tal función β usaremos el teorema general de interpolación mediante funciones holomorfas en el dominio Ω; teorema 7.39.

Si a es un cero de $f(z)$, digamos de orden $k \geq 1$, buscamos que la función $1 - \beta(z)g(z)$ se anule de orden k en a, es decir, queremos que

$$\begin{array}{rll} \text{orden } 0: & 1-\beta(a)g(a) & = 0\,, \\ \text{orden } (j): & (\beta g)^{(j)}(a) & = 0\,, \quad \text{para } 1 \leq j \leq k\,. \end{array}$$

Tome nota el lector de que $g(a) \neq 0$.

Usando la regla de Leibniz de derivación, esto significa que

$$\begin{array}{rll} \text{orden } 0: & \beta(a)g(a) & = -1\,, \\ \text{orden } (j): & \beta^{(j)}(a)g(a) & = -\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j}{l}\beta^{(l)}(a)g^{(j-l)}(a)\,, \quad \text{para } 1 \leq j \leq k\,. \end{array}$$

La condición de orden 0 nos dice que $\beta(a)$ ha de ser $\beta(a) = 1/g(a)$.

La condición de orden 1 nos dice que

$$\beta'(a)g(a) + \beta(a)g'(a) = 0\,,$$

y, por tanto,

$$\beta'(a)g(a) = -\beta(a)g'(a)\,.$$

Como $\beta(a)$ ya está especificada y como $g(a) \neq 0$ esto nos da el valor que debe tener $\beta'(a)$, en concreto, $\beta'(a) = g'(a)/g(a)^2$.

Procedemos ahora recursivamente, y usando que $g(a) \neq 0$, deducimos qué valores han de tener las sucesivas derivadas $\beta^{(j)}(a)$, para cada $0 \leq j \leq k$, si queremos que se cumplan las condiciones requeridas para que $(1-\beta(z)g(z))$ tenga un cero de orden k en a.

El teorema general de interpolación para funciones holomorfas en $\mathcal{H}(\Omega)$, teorema 7.39, nos dice que existe una función $\beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ que obedece fielmente todo este cúmulo de condiciones en todos y cada uno de los ceros de $f(z)$, completando así la demostración. ■

Corolario 7.42 *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones no nulas en $\mathcal{H}(\Omega)$. Sea d un máximo común divisor de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Entonces existen funciones $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que*

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n \equiv d\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción en n partiendo de $n \geq 2$. (El caso $n = 1$ es tautológico: $\alpha_1 = 1$.)

El caso $n = 2$ se obtiene del teorema 7.41 sin más que dividir por d. Supongamos que el resultado del enunciado es cierto con $n-1$ funciones.

Sean $d^\star$ y d máximos comunes divisores respectivos de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ y de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Observe, lector, que d es asimismo un máximo común divisor de $d^\star$ y de f_n. El caso de $n-1$ funciones nos provee de funciones $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$(\star) \qquad \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j f_j \equiv d^\star\,.$$

El caso $n = 2$ da funciones γ y α_n in $\mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$(\star\star) \qquad \gamma d^\star + \alpha_n f_n \equiv d\,.$$

La combinación de $(\star)$ y $(\star\star)$ nos da ya el resultado buscado si definimos $\alpha_j = \gamma\beta_j$, para $1 \leq j \leq n-1$. ■

Como enunciamos en las dos siguientes proposiciones, $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio de integridad pero no es un dominio de factorización única.

Proposición 7.43 $\mathcal{H}(\Omega)$ *es un* ***dominio de integridad****.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f \cdot g \equiv 0$. Hemos de ver que $f \equiv 0$ o que $g \equiv 0$. Si $f \not\equiv 0$, entonces existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$. En un entorno U de z_0 se tiene entonces que $f(z) \neq 0$, para todo $z \in U$, y por tanto, $g(z) = 0$ para todo $z \in U$ de donde, por el principio de ceros aislados, $g \equiv 0$. ■

☞ **Nota** 7.8.1. ☜ *Teoría general de anillos:* todo dominio de Bezout es dominio de integridad. El argumento de tal implicación en nuestro caso concreto de $\mathcal{H}(\Omega)$ va como sigue. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f \cdot g \equiv 0$. Hemos de ver que f ó g (o las dos) son nulas. Si ninguna fuera nula, tomemos un máximo común divisor d (que es no nulo) de f y g. Por la identidad de Bezout tendríamos $\alpha, \beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $d \equiv \alpha f + \beta g$. Como en cada punto $z \in \Omega$, se tiene $f(z) = 0$ o $g(z) = 0$, concluiríamos que $d \equiv 0$. ♠

Proposición 7.44 $\mathcal{H}(\Omega)$ no *es un* ***dominio de factorización única****.*

DEMOSTRACIÓN. Si lo fuera, cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no nula se tendría que poder factorizar como producto *finito* de unidades y elementos primos, y vista la caracterización de elementos primos como aquellas funciones que se anulan (de orden 1) en un único punto, cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ debería tener un número finito de ceros, pero el teorema de Weierstrass 7.36 nos dice que en $\mathcal{H}(\Omega)$ hay funciones cuyo conjunto de ceros $\mathcal{Z}_f$ es infinito. ■

7.8.2. Ideales

En nuestro dilecto anillo $\mathcal{H}(\Omega)$, un **ideal** $\mathcal{I}$ es un subanillo que tiene la propiedad de que si $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{I}$ entonces el producto $\alpha f \in \mathcal{I}$.

Hay dos familias de ideales que nos interesan particularmente.

a) **Ideal** $\mathcal{I}_E$; de las funciones que se anulan en un subconjunto $E \subset \Omega$.

Sea E un subconjunto de Ω sin puntos de acumulación en Ω. Consideremos el conjunto $\mathcal{I}_E$ de funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que se anulan en cada punto de E, es decir, las $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f(z) = 0$, para todo $z \in E$.

El conjunto $\mathcal{I}_E$ es obviamente un subanillo, y además si $f \in \mathcal{I}_E$ y $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $\alpha\, f$ se anula en cada punto de E, de manera que $\mathcal{I}_E$ es un ideal.

Observe lector, que si E, F son tales conjuntos sin puntos de acumulación en Ω y si $E \subset F$ entonces $\mathcal{I}_F \subset \mathcal{I}_E$; así que cuanto más pequeño es E más grande es $\mathcal{I}_E$.

Por supuesto, si el subconjunto E tuviera punto de acumulación en Ω, entonces la única función de $\mathcal{H}(\Omega)$ que se anularía en todos los puntos del conjunto E es la función nula.

En el caso en que el subconjunto E de Ω consta de un sólo punto, $E = \{a\}$, escribimos simplemente I_a y no $\mathcal{I}_{\{a\}}$, para denotar el ideal de las funciones holomorfas de $\mathcal{H}(\Omega)$ que se anulan en a.

b) **Ideal** $\mathcal{I}[\mathcal{F}]$; generado por una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$. Dada una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ este $\mathcal{I}[\mathcal{F}]$ es el ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$ más pequeño que contiene a $\mathcal{F}$. Explícitamente $\mathcal{I}[\mathcal{F}]$ se expresa

$$\mathcal{I}[\mathcal{F}] = \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, f_j \text{ donde } \alpha_j \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ y } f_j \in \mathcal{F}, \text{ para } j = 1, \ldots, m \Big\},$$

pues este conjunto es obviamente un ideal que está contenido en cualquier ideal $\mathcal{J}$ que contiene a la familia $\mathcal{F}$.

Un ideal $\mathcal{I}$ se dice *finitamente generado* si es el ideal $\mathcal{I}[\mathcal{F}]$ generado por una familia finita $\mathcal{F}$.

Cuando $\mathcal{F} = \{f\}$ para un cierta función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ escribimos simplemente $\mathcal{I}[f]$ en lugar de $\mathcal{I}[\{f\}]$. A los ideales $\mathcal{I}[f]$, donde $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con f no nula, se les dice **ideales principales**.

Observe, lector, que $\mathcal{I}[f] \neq \mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si f se anula en algún punto de Ω, es decir, si y sólo si f no es unidad.

El siguiente lema nos dice que los ideales $\mathcal{I}_E$ son ideales principales.

Lema 7.45 *Sea $a \in \Omega$ y sea g holomorfa en Ω y que se anula sólo en a y de orden 1. Entonces*

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{I}[g]\,.$$

En general, sea E un subconjunto de Ω sin puntos de acumulación en Ω y sea g holomorfa en Ω que se anula exactamente en E y de orden 1 en cada punto de E. Entonces

$$\mathcal{I}_E = \mathcal{I}[g]\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $g \in \mathcal{I}_E$ y que si $h \in \mathcal{I}_E$ entonces $h/g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $h = (h/g)\, g$. ■

Teorema 7.46 *Todo ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ finitamente generado es principal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea d un máximo común divisor de los generadores $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de $\mathcal{I}$. Por el corolario 7.42, tenemos que $d \in \mathcal{I}$, y, por tanto, $\mathcal{I}[d] \subset \mathcal{I}$. Además, como d divide a cada f_j, tenemos que d divide a toda $f \in \mathcal{I}$ y, por tanto, $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}[d]$. En suma, $\mathcal{I} = \mathcal{I}[d]$. ■

En la jerga de la teoría de anillos, un anillo es de Bezout si sus ideales finitamente generados son principales, o equivalentemente, como se desprende de la prueba del teorema anterior, si se cumple la identidad de Bezout. Así que $\mathcal{H}(\Omega)$ **es un anillo de Bezout**.

Registramos a continuación dos propiedades como anillo de las que carece $\mathcal{H}(\Omega)$, a saber, $\mathcal{H}(\Omega)$ no es dominio de ideales principales y no es anillo noetheriano.

a) $\mathcal{H}(\Omega)$ **no es dominio de ideales principales**, es decir, no todo ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$ es principal, aunque como hemos visto como consecuencia de la identidad de Bezout los ideales finitamente generados sí son principales.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Ω que converge a un punto $b \in \partial\Omega$. Para cada entero $n \geq 1$, sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función que se anula exactamente en $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Consideremos el ideal $\mathcal{I} = \mathcal{I}[f_1, f_2, \ldots]$, el ideal generado por las f_n. Toda $g \in \mathcal{I}$ se escribe en la forma $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{n_j}$, de manera que g se ha de anular en $\{a_N, a_{N+1}, \ldots\}$, con $N = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. En particular, $\mathcal{I} \neq \mathcal{H}(\Omega)$.

Si $\mathcal{I}$ fuera principal, estaría generado por una cierta $d \in \mathcal{H}(\Omega)$, y por tanto, $d|f_n$, para cada $n \geq 1$. Pero, entonces, $\mathcal{Z}_d \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_{f_n} = \emptyset$, es decir, d seria unidad y $\mathcal{I} = \mathcal{H}(\Omega)$, que no es el caso. Así que el ideal $\mathcal{I}$ no es principal.

☞ **Nota** 7.8.2. ☜ *Teoría general de anillos:* todo dominio de ideales principales es dominio de factorización única. ♠

b) $\mathcal{H}(\Omega)$ **no es anillo noetheriano**. Basta considerar la cadena ascendente $\mathcal{I}[f_n]$ anterior.

Así que, lector, los anillos $\mathcal{H}(\Omega)$ están justamente en la transición entre ser anillos de Bezout, que sí, y dominios de factorización única, que no.

Ideales maximales principales. Los ideales de $\mathcal{H}(\Omega)$ que son *a la vez* maximales y principales tienen una caracterización límpida que será muy útil, crucial de hecho, en el teorema de Bers, teorema 7.49, y que pasamos a exponer.

Teorema 7.47 *Sea $\mathcal{I}$ un ideal propio de $\mathcal{H}(\Omega)$.*

El ideal $\mathcal{I}$ es maximal y principal si y sólo si $\mathcal{I} = \mathcal{I}_a$ para un cierto $a \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{I}$ es principal y además maximal. Por ser principal, podemos escribir $\mathcal{I} = \mathcal{I}[f]$ para una cierta $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f no se anula en ningún punto de Ω, entonces f es una unidad en $\mathcal{H}(\Omega)$ y, por tanto, $\mathcal{I} = \mathcal{H}(\Omega)$.

Así que f se ha de anular al menos en un punto $a \in \Omega$. Vamos a ver que f se anula solamente en ese único punto a. Sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que g se anula de orden 1 en a y en ningún otro punto de Ω (por ejemplo, la función $z - a$). Como $f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$, tenemos para todo $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ que

$$\alpha f = \alpha \frac{f}{g} g \,,$$

así que $\mathcal{I}[f] \subset \mathcal{I}[g]$. Como g no es unidad, $\mathcal{I}[g] \neq \mathcal{H}(\Omega)$, y como $\mathcal{I}[f]$ es maximal se tiene que $\mathcal{I} = \mathcal{I}[f] = \mathcal{I}[g]$. Por el lema 7.45, tenemos que $\mathcal{I}[g] = \mathcal{I}_a$. En suma $\mathcal{I} = \mathcal{I}_a$.

Vamos con el recíproco. Escribamos, apelando al lema 7.45, $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}[g]$, donde g se anula sólo en a y de orden 1. Así que $\mathcal{I}$ es ideal principal.

Para ver que es $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}[g]$ es maximal, sea $\mathcal{J}$ un ideal tal que $\mathcal{J} \supsetneq \mathcal{I}_a$. Y sea $h \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}_a$. Entonces h no se anula en a y g solo se anula en a. Así que $\mathcal{Z}(h) \cap \mathcal{Z}(g) = \emptyset$. Por el teorema de Wedderburn, teorema 7.41, tenemos $\alpha, \beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$1 \equiv \alpha g + \beta h \,.$$

Como $\alpha g \in \mathcal{I}[g] \subset \mathcal{J}$ y $\beta h \in \mathcal{J}$, se tiene que $1 \in \mathcal{J}$ y, por tanto, $\mathcal{J} = \mathcal{H}(\Omega)$. Por consiguiente $\mathcal{I}_a$ es maximal.

7.8.3. Teorema de Bers

Este *teorema de Bers* es debido a Claude Chevalley y Shizuo Kakutani e, independientemente, a Lipman Bers, con precisiones ulteriores de Halsey Royden y Walter Rudin.[9]

Los ideales maximales principales de $\mathcal{H}(\Omega)$ son justamente los $\mathcal{I}_a$ donde $a \in \Omega$. De manera que hay una correspondencia biyectiva entre los puntos de Ω y los ideales maximales principales del anilllo $\mathcal{H}(\Omega)$. Si para dos dominios Ω y Ω', los anillos $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega')$ son isomorfos como anillos, entonces un isomorfismo entre $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega')$ establece una biyección canónica entre los ideales maximales principales de $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega')$ y, por tanto, induce una *biyección* entre Ω y Ω'. Como veremos, bajo una hipótesis adicional sobre el homomorfismo, la biyección inducida entre Ω y Ω' resulta ... biholomorfa.

Definición 7.3 Decimos que un homomorfismo π del anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ en el anillo $\mathbb{C}$ **preserva constantes** si

$$\pi(\lambda) = \lambda \,, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \,.$$

La λ en la izquierda es la función constante λ, en $\mathcal{H}(\Omega)$, mientras que la λ en la derecha es el escalar λ, en $\mathbb{C}$.

[9] ¡Vaya alineación!

Si Ω, Ω' son dos dominios en $\mathbb{C}$, decimos que un homomorfismo Φ del anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ en el anillo $\mathcal{H}(\Omega')$ **preserva constantes** si

$$\pi(\lambda) = \lambda\,, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

La λ en la izquierda es la función constante λ, en $\mathcal{H}(\Omega)$, y la λ en la derecha es la función constante λ, en $\mathcal{H}(\Omega')$.

En lo que sigue, identificaremos la función de $\mathcal{H}(\Omega)$ que vale constantemente λ con la constante λ, sin machacona diferenciación, que el puro contexto se encargará de señalar.

Observe, lector, que en realidad, un homomorfismo entre los *anillos* $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega')$ que preserva constantes es un homomorfismo entre las estructuras de *álgebra* de $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega')$.

Para cada $a \in \Omega$ consideremos $\pi_a : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\pi_a(f) = f(a)\,, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H}(\Omega)\,.$$

cada π_a es un homomorfismo de anillos que preserva constantes. A π_a se le denomina *homomorfismo de evaluación en a*. Note, lector, que $\mathrm{Ker}(\pi_a) = I_a$, para cada $a \in \Omega$.

Conviene hacer notar que $\pi_a \equiv \pi_b$ implica (y equivale a) que $a = b$, pues si $a \neq b$ y f es la función en $\mathcal{H}(\Omega)$ dada por $f(z) = (z-a)/(b-a)$, entonces $\pi_a(f) = 0$ y $\pi_b(f) = 1$.

En estricta ortodoxia notacional debiéramos escribir algo así como π_a^{Ω}, en lugar de simplemente π_a, para hacer referencia al anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ en que está definida π_a, pero con leve rebeldía no nos someteremos, lector, a tal imposición pues el contexto siempre dejará claro el Ω de que se trata.

Como se muestra en el siguiente lema, los π_a son los únicos homomorfismos de $\mathcal{H}(\Omega)$ sobre $\mathbb{C}$ que preservan constantes.

Lema 7.48 (Lema de Royden) *Si $\pi\colon \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de anillos que preserva constantes, entonces $\pi \equiv \pi_a$ para un cierto $a \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{I}$ el ideal $\mathcal{I} = \mathrm{Ker}(\pi)$. Como π preserva constantes, π no es idénticamente nulo y además $\mathcal{I} \neq \mathcal{H}(\Omega)$.

Buscamos[10] una función $h \in \mathcal{I}$ que sólo se anula en un único punto, digamos, a, y con multiplicidad 1. Si la hallásemos,[11] entonces $\mathcal{I}[h] \subset \mathcal{I}$. El lema 7.45 nos dice que $\mathcal{I}[h] = \mathcal{I}_a$ y el teorema 7.47 que $\mathcal{I}_a$ es maximal. Así que $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}$.

Para cualquier $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene que $g - g(a) \in \mathcal{I}_a = \mathrm{Ker}(\pi)$, así que como π preserva constantes se tiene que $\pi(g) - g(a) = 0$, es decir, $\pi(g) = \pi_a(g)$, de manera que, como queríamos ver, $\pi \equiv \pi_a$.

Vamos, pues, con la verificación de la existencia de la tal $h \in \mathcal{I}$ que se anula en un único punto y con multiplicidad 1.

[10]¡Seguro que la encontramos!
[11]¡Fé!

Si $\mathcal{I} = \{0\}$, entonces π sería inyectivo, y esto no es posible, por que entonces $\mathcal{H}(\Omega)$ solo contendría funciones constantes, pues para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, la función f y la constante $\pi(f)$ tendrían la misma imagen por π.

Sea $f \in \mathcal{I}$, no nula. La función f no es unidad, pues $\mathcal{I} \neq \mathcal{H}(\Omega)$. Por tanto ha de anularse. Enumeremos el conjunto $\mathcal{Z}(f) = \{a_n, n \geq 1\}$ de ceros de f.

Sea ahora $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z_n) =$ con multiplicidad 1, es decir, tal que $g'(z_n) \neq 0$, para cada $n \geq 1$ La existencia de una tal g nos la da del teorema 7.39 de interpolación.

La función $\widehat{g} = g - \pi(g) \in \mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{I}$. Analicemos los ceros de $\widehat{g}$. Si $\widehat{g}$ no se anulara en ninguno de los z_n, el teorema 7.41 de Wedderburn, nos daría que $1 \in \mathcal{I}$, puesto que $f, \widehat{g} \in \mathcal{I}$, y se tendría que $\mathcal{I} = \mathcal{H}(\Omega)$. Por tanto, $\widehat{g}$ se anula en algún z_n, digamos, en z_{n_0}. Esto significa que

$$0 = \widehat{g}(z_{n_0}) = g(z_{n_0}) - \pi(g)$$

y, por tanto, $\widehat{g}$ no se anula en ningún otro z_n, puesto que

$$\widehat{g}(z_n) = g(z_n) - \pi(g) = n - n_0\,.$$

Además, $\widehat{g}$ se anula de orden 1 en z_{n_0}, pues $\widehat{g}'(z_{n_0}) = g'(z_{n_0}) \neq 0$.

En suma f y $\widehat{g}$ tienen exactamente un cero en común, a saber, z_{n_0}.

Sea h un máximo común divisor de f y $\widehat{g}$. Por el teorema 7.41, de nuevo, tenemos que $h \in \mathcal{I}$, pues $f, \widehat{g} \in \mathcal{I}$. Además, h se anula en z_{n_0} y lo hace con orden 1, pues h divide a $\widehat{g}$ y no se anula en ningún otro punto de Ω.

Esta h es, finalmente, la función buscada. ■

Teorema 7.49 (Teorema de Bers) *Sean Ω y Ω' dos dominios en el plano complejo $\mathbb{C}$. Existe un isomorfismo que preserva constantes entre $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega')$ si y sólo si existe un biholomorfismo entre Ω y Ω'.*

¡Un elegante teorema!: la estructura algebraica del anillo (o mejor del álgebra) de las funciones holomorfas en Ω determina su estructura compleja. Con el lema 7.48 de Royden, la demostración será coser y cantar.

DEMOSTRACIÓN. Sea $F\colon \Omega \to \Omega'$ un biholomorfismo. Definimos $\Phi\colon \mathcal{H}(\Omega') \to \mathcal{H}(\Omega)$ mediante

$$\Phi(g) = g \circ F\,, \quad \text{para toda } g \in \mathcal{H}(\Omega')\,.$$

Esta Φ es un isomorfismo de $\mathcal{H}(\Omega')$ sobre $\mathcal{H}(\Omega)$ que preserva constantes. Esta implicación del teorema es directa. El interés y el busilis, y hasta el quid, yace en la implicación contraria.

Sea ahora Φ un isomorfismo de $\mathcal{H}(\Omega)$ sobre $\mathcal{H}(\Omega')$ que preserva constantes.

Vamos a definir a partir de Φ una función F de Ω' en Ω.

Sea $a \in \Omega'$. Consideremos el homomorfismo $\pi_a\colon \mathcal{H}(\Omega') \to \mathbb{C}$, de evaluación en a. La composición $\pi_a \circ \Phi$ es un homomorfismo de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ que preserva constantes.

Por el lema 7.48 de Royden, tenemos que $\pi_a \circ \Phi \equiv \pi_b$ para un cierto $b \in \Omega$. Este $b \in \Omega$ es único, pues $\pi_{b_1} = \pi_{b_2}$ implica $b_1 = b_2$. Definimos $F(a) = b$.

Observe, lector, que

$$\Phi(f)(a) = f(F(a)), \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ y todo } a \in \Omega',$$

es decir,

$$(\star) \qquad \Phi(f) \equiv f \circ F, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Sea $\mathrm{id}_\Omega \in \mathcal{H}(\Omega)$ la función identidad: $\mathrm{id}_\Omega(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. Aplicando $(\star)$ tenemos que

$$F \equiv \Phi(\mathrm{id}_\Omega) \in \mathcal{H}(\Omega').$$

De manera que la función F es holomorfa.

Argumentando con Φ^{-1} obtenemos $G : \Omega \longrightarrow \Omega'$ holomorfa y tal que

$$(\star) \qquad \Phi^{-1}(g) \equiv g \circ G, \quad \text{para toda } g \in \mathcal{H}(\Omega').$$

Pero entonces

$$f \circ F \circ G \equiv \Phi(f) \circ G \equiv \Phi^{-1}(\Phi(f)) \equiv f, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

En particular, con $f = \mathrm{id}_\Omega$, se deduce que

$$F \circ G \equiv \mathrm{id}_\Omega,$$

y, análogamente, que

$$G \circ F \equiv \mathrm{id}_{\Omega'}.$$

En conclusión, F es biholomorfa de Ω' sobre Ω. ■

☞ **Nota** 7.8.3. ☜ Algunas referencias *clásicas* sobre el contenido del teorema de Bers son [20], [33], [30], [45], [42], [44], ... ♠

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 7

Productos infinitos

7.8.1 *Compruébese que*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\Big)=\frac{1}{3} \qquad y \qquad \prod_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{k^3-1}{k^3+1}\Big)=\frac{2}{3}\,.$$

7.8.2 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números* reales. *Demuéstrese que*

i) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2<\infty$, *entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n) \ \ \textit{converge si y sólo si} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \textit{converge}\,.$$

ii) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es convergente, entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n) \ \ \textit{converge si y sólo si} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2<+\infty\,.$$

7.8.3 a1) *Compruébese que si* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *y* $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$ *convergen absolutamente, entonces* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n\, w_n$ *converge absolutamente y que*

$$\Big(\prod_{n=1}^{\infty} z_n\Big)\Big(\prod_{n=1}^{\infty} w_n\Big)=\prod_{n=1}^{\infty}(z_n\, w_n)\,.$$

a2) *Dése un ejemplo de productos* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$ *convergentes, pero tales que* $\prod_{n=1}^{\infty}(z_n\, w_n)$ *no converja.*

b1) *Supóngase que* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente. Sea* $A\cup B$ *una partición de* $\mathbb{N}$. *Compruébese que*

$$\prod_{n\in A} z_n \ y \ \prod_{n\in B} z_n \quad \textit{covergen absolutamente}\,,$$

y que

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n=\big(\prod_{n\in A} z_n\big)\big(\prod_{n\in B} z_n\big)\,.$$

b2) *Dése un ejemplo de producto* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *convergente y de partición* $A\cup B=\mathbb{N}$ *tales que* $\prod_{n\in A} z_n$ *y* $\prod_{n\in B} z_n$ *no convergen.*

7.8.4 *Compruébese que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^k}\right) = \frac{1}{1-z}\,.$$

Dedúzcase que, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{1+z^{-2^j}}\,.$$

7.8.5 *Compruébese que los productos infinitos*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n) \qquad y \qquad G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2n-1})$$

convergen uniforme y absolutamente sobre compactos de $\mathbb{D}$ y que

$$F(z)G(z) = 1\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

7.8.6 *Para entero $d \geq 1$, sea H_d el polinomio*

$$H_d(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{d-1} = \frac{z^d - 1}{z-1}\,.$$

Compruébese que

$$\prod_{j=0}^{\infty} H_d(z^{d^j}) = \frac{1}{1-z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

SUGERENCIA: $(1-z)\prod_{j=0}^{n} H_d(z^{d^j}) = (1 - z^{d^{n+1}})$.

7.8.7 *Fijemos $|b| < 1$. Compruébese que el producto infinito*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - b^n z)$$

define una función entera.

Verifíquese además que

$$F(z) = (1-bz)F(bz)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

y que

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{b^k}{b^k - 1} \Big) z^n \,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

7.8.8 *Sea $b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Compruébese que la función*

$$\theta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + b^{2n-1} e^{z}\big)\big(1 + b^{2n-1} e^{-z}\big)$$

es entera. Determínense los ceros de θ. Compruébese que θ satisface la ecuación funcional

$$\theta\big(z + 2\ln(b)\big) = b^{-1}\, e^{-z}\, \theta(z)\,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

($\ln(b)$ *significa cualquier logaritmo de* b) .

Producto infinito para $\operatorname{sen}(z)$

7.8.9 *Considérese la representación*

$$\frac{\pi^2}{sen^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\,,$$

válida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dedúzcase que el desarrollo de Taylor de $z^2/\operatorname{sen}^2 z$ para $|z| < \pi$ es

$$\frac{z^2}{\operatorname{sen}^2 z} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)\, \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}\, z^{2m}\,.$$

Dedúzcase que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \textit{y que} \qquad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Arguméntese por qué, para todo $m \geq 1$, se tiene que

$$\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} = \frac{1}{\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \quad \textit{es un número racional}.$$

7.8.10 *Demuéstrese que, para todo $z \in \mathbb{C}$,*

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2}\Big)\,.$$

SUGERENCIA: $\cos(\pi z) = \operatorname{sen}(2\pi z)/2\operatorname{sen}(\pi z)$.

Dedúzcase que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

y de aquí que

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Dedúzcase que para todo $z \in \mathbb{C}$ que no es un cero de $\cos(\pi z)$ se cumple que

$$\frac{\pi}{2}\,\tan\Big(\frac{\pi}{2} z\Big) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\,\mathrm{impar}}} \Big(\frac{1}{m-z} - \frac{1}{m+z}\Big)\,.$$

7.8.11 *Partiendo de la representación*

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big),$$

obténgase el desarrollo de Taylor alrededor del origen de $\operatorname{sen}(\pi z)/(\pi z)$ para deducir que

$$\sum_{1\leq n_1<n_2<\cdots<n_k} \frac{1}{n_1^2\,n_2^2\cdots n_k^2} = \frac{\pi^{2k}}{2k+1!} \qquad \textit{para todo } k \geq 1.$$

Dedúzcase, de nuevo, que

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

7.8.12 *Compruébese que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\,.$$

Dedúzcase que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{n^4}\Big) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{8\pi}\,.$$

7.8.13 *Para entero $k \geq 2$, considérese la función entera H_k dada por el siguiente producto infinito:*

$$H_k(z) = \pi^k z^k \prod_{n\in\mathbb{Z}; n\neq 0} \Big(1 - \frac{z^k}{n^k}\Big)\,.$$

Compruébese que

$$H_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi\,\omega_k^j\, z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

donde $\omega_k = e^{2\pi\imath/k}$.

Obténgase, para entero $k \geq 2$ *una fórmula cerrada para el correspondiente desarrollo en fracciones simples:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z^k - n^k}\,.$$

Obténganse, para cada entero $k \geq 1$, *fórmula explícitas finitas de*

$$a_k = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{n^{2k}}\Big) \qquad y \qquad b_k = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{n^{2k}}\Big)\,.$$

7.8.14 *Obténgase que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)^2}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\frac{12}{11}\frac{12}{13}\cdots = \pi\frac{\sqrt{2}}{4}\,,$$

y que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\Big) = \sqrt{2}\,.$$

Solución. Para el primer producto, póngase $z = 1/4$ en el producto de Euler para la función seno; para el segundo producto, multiplíquense los dos productos infinitos y úsese Wallis.

Función Γ

7.8.15 *Calcúlesen los residuos de la función* Γ *en cada uno de sus polos.*

7.8.16 *Compruébese que para todo* $z \in \mathbb{C}$ *se tiene que*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n^z\, n!}$$

7.8.17 *Definamos la función* $\Omega(z)$ *como la derivada de la derivada logarítmica de* Γ:

$$\Omega(z) = \Big(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\Big)'\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}\,.$$

Compruébese que

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}\,.$$

7.8.18 Fórmula de duplicación de Legendre. *Pruébese que*

$$2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big) = \Gamma(2z)\,\sqrt{\pi}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

SUGERENCIA: $\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2)=\Gamma(2z)\,e^{A(z)}$, donde A es una función entera. Usar la derivada de la derivada logarítmica de ambos lados, para comprobar que $A''\equiv 0$.

7.8.19 FÓRMULA DE MULTIPLICACIÓN DE GAUSS. *Pruébese que para cada entero $n\geq 1$ se tiene que*

$$(2\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(nz)=n^{nz-1/2}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(z+k/n)\,,\quad \textit{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$

7.8.20 *Compruébese que para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple*

$$\frac{1}{|\Gamma(\imath x)|^2}=\frac{x\,\operatorname{senh}(\pi x)}{\pi}\,.$$

7.8.21 *Compruébese que*

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^z\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^{-1},\quad \textit{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$

WEIERSTRASS Y MITTAG-LEFFLER

7.8.22 *Sean f_1 y f_2 dos funciones enteras que no tienen ceros en común, es decir, para todo $z\in\mathbb{C}$ se tiene que $|f_1(z)|^2+|f_2(z)|^2\neq 0$. Demuéstrese que existen dos funciones enteras g_1 y g_2 tales que*

$$f_1(z)\,g_1(z)+f_2(z)\,g_2(z)=1\,,\qquad \textit{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$

7.8.23 *Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones holomorfas en $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$, con $\varepsilon>0$.*

a) *Supóngase que $f(0)\neq 0$. Demuéstrese que para todo entero $k\geq 1$ existe un polinomio $R(z)$ de grado k tal que*

$$f(z)R(z)-g(z)=O(|z|^{k+1})\qquad \textit{cuando } z\to 0.$$

b) *Supóngase ahora que f tiene un cero de orden (exactamente) k en 0, donde $k\geq 1$ es un cierto entero. Demuéstrese que existe un polinomio S de grado k tal que*

$$f(z)\,S\Big(\frac{1}{z}\Big)-g(z)=O(|z|^{k+1})\qquad \textit{cuando } z\to 0.$$

7.8.24 EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE INTERPOLACIÓN. *Sea $(z_n)_n\in\mathbb{C}$ una sucesión con $\lim_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$. Supóngase que para cada entero $n\geq 1$ se ha dado un entero*

$N_n \geq 0$ *y una lista finita* $(w_{n,0}, w_{n,1}, \ldots, w_{n,N_n})$. *Demuéstrese que existe una función entera* f *tal que, para cada* $n \geq 1$,

$$f^{(j)}(z_n) = w_{n,j} \qquad \textit{para cada } 0 \leq j \leq N_n\,.$$

SUGERENCIA: Remedar la prueba del teorema de interpolación, usando el ejercicio anterior, apartado b).