

# Imágenes de funciones holomorfas

Fernando Chamizo

6 de marzo de 2018

**Nota:** Este documento es un resumen muy abreviado de algunos puntos principales de una parte del capítulo 4 de [5].

## 1. Resultados más relevantes

En este tema vamos a ver que las imágenes de las funciones holomorfas son de algún modo “grandes”. Dos resultados fundamentales que tratan respectivamente el problema local y el problema global, son:

**Teorema 1.1** (Teorema de Bloch). *Sea  $\mathbb{D}$  el disco unidad abierto. La imagen de cualquier función holomorfa  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  contiene algún disco de radio  $|f'(0)|/4$ .*

**Teorema 1.2** (Teorema pequeño de Picard). *Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera no constante, entonces su imagen es todo  $\mathbb{C}$  o todo  $\mathbb{C}$  menos un punto.*

Las versiones originales de estos teoremas se pueden consultar en [3] y [7]. Ambos resultados son bastante sorprendentes, quizá más el primero que el segundo por lo débil de la hipótesis. ¿Qué es lo que hace que controlar la derivada en un solo punto implique que la imagen tenga cierto “grosor”? Littlewood (contemporáneo de Bloch y famoso por sus anécdotas [6] además de por sus teoremas) dijo que era uno de los resultados más raros de las Matemáticas y que su prueba era una locura [9, §10.1]. Utilizaremos el primer teorema para deducir el segundo a pesar de que este es muy posterior históricamente y la prueba original bien diferente.

Más adelante mencionaremos el teorema de Schottky y el teorema grande de Picard, que son otros dos resultados importantes de este tipo descritos con detalle en [5].

## 2. Las transformaciones de Möbius del disco

En lo sucesivo  $\mathbb{D}$  indicará el disco abierto unidad como en el Teorema 1.1.

Seguramente el lector conoce las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{C}$ . Son las funciones  $(az + b)/(cz + d)$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tales que  $ad - bc \neq 0$  (esta condición es para que no se

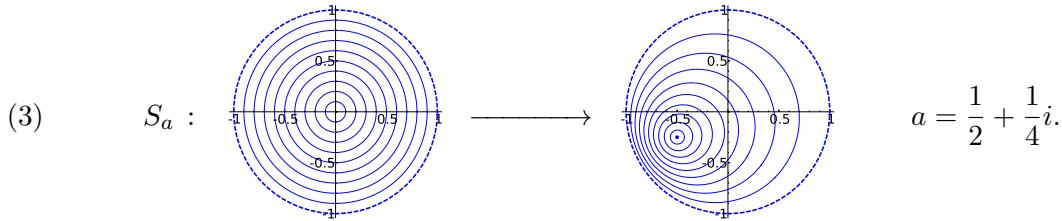
simplifiquen a una constante). Estas transformaciones llevan rectas y circunferencias a rectas y circunferencias. Las que aplican  $\mathbb{D}$  en sí mismo de manera biyectiva se llaman *transformaciones de Möbius del disco* y denotaremos al conjunto de ellas por  $\text{Möb}(\mathbb{D})$ . Con un poco de esfuerzo se prueba que

$$(1) \quad \text{Möb}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} : a, b \in \mathbb{C}, |a| > |b| \right\}.$$

Si sacamos un factor  $a/\bar{a}$  y lo llamamos  $e^{i\alpha}$ , se tiene

$$(2) \quad \text{Möb}(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\alpha} S_a(z) : \alpha \in [0, 2\pi), a \in \mathbb{D} \right\} \quad \text{con} \quad S_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

La transformación de Möbius  $S_a$  aplica  $a$  en 0 y aparecerá en varias demostraciones para que solo tengamos que ocuparnos de lo que ocurre en el origen. Geométricamente, lo que hace  $S_a$  es aplicar circunferencias concéntricas centradas de  $\mathbb{D}$  en circunferencias alrededor de  $-a$ .



El factor  $e^{i\alpha}$  introduce un giro adicional alrededor del origen.

Con la composición de funciones,  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  es grupo no conmutativo. Se puede probar que no hay otras funciones holomorfas  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  que tengan inversa holomorfa (definida en  $\mathbb{D}$ ).

Si  $T \in \text{Möb}(\mathbb{D})$  entonces

$$(4) \quad \left| \frac{T(z) - T(w)}{1 - \overline{T(z)T(w)}} \right| = \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right| \quad \text{para} \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Esto se sigue de un cálculo directo con  $T(z) = e^{i\alpha} S_a(z)$  (para una demostración más rápida y elegante sabiendo un poco más, ver [5, §4.2]). Si dividimos entre  $|z - w|$  y tomamos límites  $w \rightarrow z$ , se obtiene

$$(5) \quad (1 - |z|^2)|T'(z)| = 1 - |T(z)|^2.$$

Una forma de escribir lo mismo pero con un aspecto más general, será útil más adelante:

**Lema 2.1.** *Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$ . Si  $T \in \text{Möb}(\mathbb{D})$  entonces para todo  $z \in \mathbb{D}$*

$$(6) \quad (1 - |z|^2)|g'(z)| = (1 - |w|^2)|f'(w)|$$

donde  $g = f \circ T$  y  $w = T(z)$ .

En palabras,  $(1-|w|^2)|f'(w)|$  es invariante por composición con transformaciones de Möbius del disco.

*Demostración.* Al derivar  $g = f \circ T$  se obtiene  $g'(z) = f'(T(z))T'(z) = f'(w)T'(z)$ . Tomando módulos y despejando  $T'(z)$  de (5) se deduce el resultado.  $\square$

Hay una manera interesante de interpretar geoméricamente las transformaciones de Möbius del disco. Esto requiere algunos conocimientos de geometría diferencial que están fuera del contenido del curso pero quien los tenga puede encontrar interesante el siguiente párrafo.

Poincaré introdujo en  $\mathbb{D}$  la métrica  $4(dx^2 + dy^2)/(1 - |z|^2)$ , con ello se convierte en una variedad riemanniana, el *disco de Poincaré*. Se puede probar que la curvatura de Gauss correspondiente a esta métrica es igual a  $-1$  y así el disco de Poincaré da un modelo sencillo de una variedad bidimensional de curvatura constante  $-1$ , es una *pseudoesfera*, algo así como una esfera de radio  $\sqrt{-1}$ , pues la curvatura de Gauss de una esfera es  $1/R^2$ . Recordando la geometría de curvas y superficies, uno puede preguntarse si corresponde a una superficie que uno pueda ver. La respuesta es afirmativa solo localmente y eso da más valor al modelo. La relación (5) implica que la métrica es invariante por  $T \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ , esto es, que las transformaciones de Möbius del disco son isometrías. No es difícil comprobar (sabiendo geometría diferencial) que el diámetro horizontal de  $\mathbb{D}$ , convenientemente parametrizado, es una geodésica. Sus imágenes por elementos de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  deben dar nuevas geodésicas y así se determinan todas, que son diámetros o circunferencias ortogonales al borde. Se tiene una distancia  $\rho$  correspondiente a la métrica que corresponde a la longitud de la única geodésica que une dos puntos. Tal distancia, llamada *distancia hiperbólica*, debe cumplir  $\rho(z, w) = \rho(T(z), T(w))$  para  $T \in \text{Möb}(\mathbb{D})$  por lo dicho anteriormente. De hecho a través de esta relación es posible deducir una fórmula para  $\rho$  sin hacer grandes cálculos.

Para no depender del enfoque de geometría diferencial, introducimos la distancia hiperbólica  $\rho$  de manera artificial y sin mostrar que es una distancia, a través de la expresión

$$(7) \quad \rho(z, w) = \log \left( \frac{|1 - \bar{z}w| + |z - w|}{|1 - \bar{z}w| - |z - w|} \right).$$

La invariancia se deduce de cálculos anteriores.

**Lema 2.2.** Si  $T \in \text{Möb}(\mathbb{D})$  entonces  $\rho(z, w) = \rho(T(z), T(w))$  para todo  $z, w \in \mathbb{D}$ .

*Demostración.* Basta dividir por  $|1 - \bar{z}w|$  en el numerador y denominador de (7) y aplicar (4).  $\square$

Una curiosidad que no explotaremos [5, §4.2.1] es que toda función holomorfa  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  que no esté en  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  es una contracción respecto a la distancia  $\rho$  en el sentido de que verifica  $\rho(f(z), f(w)) < \rho(z, w)$ .

Lo que sí aparecerá en la prueba del teorema de Bloch es la razón entre la distancia hiperbólica entre dos puntos y la euclídea de sus imágenes en términos de la derivada.

**Lema 2.3.** *Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Si  $(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 2C$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  entonces  $|f(z) - f(w)| \leq C\rho(z, w)$  para  $z, w \in \mathbb{D}$ .*

El recíproco también es cierto [5, §4.2.1] pero lo omitimos porque no es necesario para la prueba del teorema de Bloch.

*Demostración.* Escribiendo  $w = S_{-w}(0)$  y cambiando  $z$  por  $S_{-w}(z)$ , la conclusión equivale a  $|(f \circ S_{-w})(z) - (f \circ S_{-w})(0)| \leq 2C\rho(z, 0)$ , donde se ha usado la invariancia de  $\rho$ . Por otro lado el Lema 2.1 asegura que se puede cambiar  $f$  por  $f \circ S_{-w}$  en la hipótesis sin modificar el valor de  $C$ . Así pues, basta probar el resultado para  $w = 0$ .

La identidad  $f(z) - f(0) = z \int_0^1 f'(zt) dt$  junto con  $(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 2C$  implica

$$(8) \quad |f(z) - f(0)| \leq |z| \int_0^1 \frac{2C}{1 - |z|^2 t^2} dt = C \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = C\rho(z, 0),$$

lo que concluye la prueba. □

El caso especial de (7) utilizado en esta prueba,

$$(9) \quad \rho(z, 0) = \log \frac{1 + r}{1 - r} \quad \text{para } |z| = r,$$

es interesante tenerlo en mente. Implica que los puntos de  $\mathbb{D}$  a distancia pequeña euclídea  $r$  del origen están aproximadamente a distancia  $2r$  hiperbólica, ya que  $\log(1 \pm r) \sim \pm r$ , mientras que según la distancia euclídea va a acercándose a 1, la hiperbólica crece indefinidamente, de manera que la frontera de  $\mathbb{D}$  queda infinitamente lejos.

### 3. Algunos resultados auxiliares

Comenzamos con un famoso resultado sencillo que desempeña un papel relevante en diversas demostraciones.

**Lema 3.1** (Lema de Schwarz). *Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorfa con  $f(0) = 0$  entonces  $|f(z)| \leq |z|$  y  $|f'(0)| \leq 1$ . Además  $|f'(0)| = 1$  si y solo si  $f$  es una rotación  $f(z) = e^{i\alpha}z$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .*

*Demostración.* Sea  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = f(z)/z$  y  $g(0) = f'(0)$ . Es holomorfa (basta pensar en el desarrollo de Taylor de  $f$  en 0) y por el principio del módulo máximo en cada disco  $|z| \leq r$  con  $0 < r < 1$  se tiene  $|g(z)| \leq 1/r$ . Tomando límites  $r \rightarrow 1^-$  se sigue  $|g(z)| \leq 1$ .

Para la parte final, si  $|f'(0)| = 1$ , el módulo de  $g$  alcanzaría un máximo en el punto interior  $z = 0$  y por tanto en ese caso  $g$  debe ser una constante de módulo 1. □

Componiendo con transformaciones de Möbius podemos mover los valores de 0 y  $f(0)$  a otros puntos sin salirnos de  $\mathbb{D}$ , obteniendo así como corolarios generalizaciones de la formulación inicial.

**Corolario 3.2.** *Si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es holomorfa entonces  $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$ .*

*Demostración.* Aplíquese el lema de Schwarz a la función  $S_{f(0)} \circ f$ . □

**Corolario 3.3** (Lema de Schwarz-Pick). *Si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es holomorfa entonces para todo  $w \in \mathbb{D}$  se tiene  $(1 - |w|^2)|f'(w)| \leq 1 - |f(w)|^2$ .*

*Demostración.* Aplíquese el Corolario 3.2 a la función  $f \circ S_{-w}$ . □

Las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{C}$  transforman  $\mathbb{D}$  en otros círculos o en semiplanos. Utilizándolas en este último caso se deduce por ejemplo:

**Corolario 3.4.** *Si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \{\Re(z) > 0\}$  es holomorfa entonces  $|f'(0)| \leq 2\Re(f(0))$ .*

*Demostración.* Es fácil ver que la transformación  $T(z) = (z - 1)/(z + 1)$  aplica  $\{\Re(z) > 0\}$  en  $\mathbb{D}$ . El Corolario 3.2 para la función  $T \circ f$  implica  $2|f'(0)| \leq |f(0) + 1|^2 - |f(0) - 1|^2$ , lo que da el resultado. □

Topológicamente un semiplano en  $\mathbb{C}$  es como un disco sin un punto (que correspondería al infinito). Sin entrar en el significado preciso de esta afirmación, veamos cómo deducir un Lema de Schwarz cuando  $0 \notin f(\mathbb{D})$  y entonces  $f(0) = 0$  no tiene sentido.

**Corolario 3.5.** *Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} - \{0\}$  holomorfa, entonces  $|f'(0)| \leq -2|f(0)| \log |f(0)|$ .*

*Demostración.* Como  $f$  no se anula y está definida en un simplemente conexo, tiene un logaritmo<sup>1</sup>, es decir, existe  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $f = e^g$ . De  $1 > |f| = e^{\Re(g)}$  se sigue que  $-g$  tiene parte real positiva y el Corolario 3.4 implica  $|g'(0)| \leq -2\Re(g(0))$ . Sustituyendo  $g' = f'/f$  y  $\Re(g) = \log |f|$ , se sigue el resultado. □

Un resultado debido a Landau de naturaleza bien distinta pero todavía consecuencia de lo anterior, asegura que en el Lema de Schwarz la imagen siempre debe tener cierto “grosor”. Es una versión débil del Teorema de Bloch que requiere más hipótesis y da un resultado con un radio menor [5, §4.4].

**Teorema 3.6** (Teorema de cubrimiento de Landau). *Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorfa con  $f(0) = 0$  y  $|f'(0)| \neq 0, 1$  y sea  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|f'(0)| = t_0/\sinh t_0$ , entonces  $f(\mathbb{D})$  contiene al disco abierto centrado de radio  $e^{-t_0}$ .*

---

<sup>1</sup>La parte imaginaria del logaritmo es el ángulo y entonces lo que impide definir bien el logaritmo es la posibilidad de dar vueltas, lo que se evita con la condición de simplemente conexo (las vueltas en un simplemente conexo se puede deshacer contrayendo a un punto). Por otro lado, la parte real impone no evaluar en cero.

Cuando  $f'(0) = 0$  la imagen podría ser un disco arbitrariamente pequeño como muestra  $f(z) = (z/2)^n$  con  $n$  grande mientras que el caso  $|f'(0)| = 1$  está cubierto por el Lema de Schwarz, Lema 3.1. Como  $x \mapsto x/\sinh x$  define un homeomorfismo de  $(0, \infty)$  en  $(0, 1)$ , en el resto de los casos es posible siempre hallar el  $t_0$  del que habla el enunciado.

*Demostración.* Sea  $w \in \mathbb{D} - f(\mathbb{D})$ , tenemos que probar que  $|w| \geq e^{-t_0}$ .

Definimos  $g = S_w \circ f$  con  $S_w$  como en (2), claramente  $g$  es holomorfa y verifica  $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ,  $g(0) = -w$  y  $0 \notin g(\mathbb{D})$  ya que  $w \notin f(\mathbb{D})$ . Por el Corolario 3.5,  $|S'_w(0)f'(0)| \leq -2|w| \log |w|$ . Sustituyendo  $|S'_w(0)| = 1 - |w|^2$  y el valor de  $|f'(0)|$ , se tiene

$$(10) \quad \frac{t_0}{\sinh t_0} \leq \frac{\log |w|}{(|w| - |w|^{-1})/2}.$$

Para  $|w| = e^{-t_0}$  se da la igualdad y como el segundo miembro es creciente en  $0 < |w| < 1$ , cualquier  $w$  que satisfaga la desigualdad debe cumplir  $|w| \leq e^{-t_0}$ .  $\square$

## 4. La prueba del teorema de Bloch

Para un abierto  $\Omega$ , llamaremos  $R(\Omega)$  al supremo de los radio de los discos contenidos en  $\Omega$ . En una fórmula,

$$(11) \quad R(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} d(z, \partial\Omega)$$

con  $d$  la distancia usual. Como  $\Omega$  no es compacto, es posible que el supremo no se alcance para ningún  $z \in \Omega$ . En cualquier caso, si  $d(z_0, \partial\Omega) = R(\Omega) - \epsilon$ , está claro que el disco abierto centrado en  $z_0$  de radio  $R(\Omega) - \epsilon$  está dentro de  $\Omega$  porque no contiene ningún punto de la frontera.

Derivaremos el teorema de Bloch del siguiente resultado que en cierto modo es equivalente a él [5, §4.5]:

**Teorema 4.1.** *Existe una constante  $c < 4$  tal que para cualquier  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa.*

$$(12) \quad (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq cR(\Omega)$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$  y cualquier abierto  $\Omega$  que contenga a  $f(\mathbb{D})$ .

Hay un corolario que mejora el teorema de Liouville y que anticipa cómo hacer el paso del teorema local (de Bloch) al global (de Picard).

**Corolario 4.2.** *Si  $g$  es una función entera tal que su imagen está contenida en un abierto  $\Omega$  con  $R(\Omega) \neq \infty$  entonces  $g$  es constante.*

*Demostración.* Si  $g$  no es constante, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $g'(z_0) \neq 0$ . Aplicando (12) en  $z = 0$  a  $f(z) = g(z_0 + \delta z)$  con  $\delta = 4R(\Omega)/|g'(z_0)|$  se llega a una contradicción.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.1.* Antes de comenzar la demostración en sí, haremos unas cuantas reducciones iniciales.

La función  $f(z/(1+\epsilon))$  con  $\epsilon > 0$  es holomorfa en el disco de radio  $1+\epsilon$  y la desigualdad del enunciado para ella implica la desigualdad para  $f$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  por tanto basta probar el resultado para  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. En particular, por la continuidad de  $f$  y la compacidad de  $\mathbb{D}$ ,  $(1-|z|^2)|f'(z)|$  alcanza un máximo en cierto  $z = z_0 \in \mathbb{D}$ . Como  $f$  y  $f - f(z_0)$  tienen la misma derivada y  $R(\Omega)$  es invariante por una traslación de  $\Omega$ , siempre podemos suponer  $f(z_0) = 0$ . Por otro lado, el Lema 2.1 asegura que el máximo de  $(1-|z|^2)|f'(z)|$  en  $\mathbb{D}$  no varía si sustituimos  $f$  por  $f \circ S_{-z_0}$  y al usar esta última función el máximo se alcanzaría en 0 y sería  $|f'(0)|$  porque  $S_{-z_0}(0) = z_0$ .

En definitiva, tras estas reducciones, basta probar la desigualdad

$$(13) \quad |f'(0)| \leq cR(\Omega)$$

para toda función holomorfa  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  no idénticamente nula que verifica  $f(0) = 0$  y  $(1-|z|^2)|f'(z)| \leq |f'(0)|$ .

Definamos la función auxiliar

$$(14) \quad g(z) = \delta^{-1}f(r_0z) \quad \text{con} \quad \delta = \frac{1}{2}|f'(0)|\rho(r_0, 0)$$

donde  $\rho$  es la distancia hiperbólica y  $0 < r_0 < 1$  es cierta constante que elegiremos en breve. Se tiene  $g(0) = 0$  y el Lema 2.3 con  $w = 0$ ,  $r_0z$  en lugar de  $z$  y  $C = |f'(0)|$  asegura  $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . En estas condiciones el Teorema 3.6 implica que  $g(\mathbb{D})$  contiene un disco de radio  $e^{-t_0}$  cuando  $|g'(0)| = t_0/\sinh t_0$ . En términos de  $f$  esto significa que  $f(\mathbb{D})$  contiene un disco de radio  $\delta e^{-t_0}$  donde  $t_0$  viene dado por

$$(15) \quad \frac{2r_0}{\rho(r_0, 0)} = \frac{t_0}{\sinh t_0}.$$

Escogiendo  $r_0 = 0.7$  se sigue  $t_0 = 1.158\dots$  y entonces  $\delta e^{-t_0} \geq 0.272|f'(0)|$ , lo cual prueba (13) con  $c = 0.272^{-1} < 3.677$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 1.1 (Teorema de Bloch).* Tomando  $z = 0$  en (12) se tiene la desigualdad  $|f'(0)|/c \leq R(\Omega)$ , esto es, para cada  $c' > c$ , existe un disco de radio  $|f'(0)|/c'$  contenido en  $\Omega$ . Como  $c < 4$  siempre podemos escoger  $c' = 4$ .  $\square$

Un comentario final es que la prueba anterior muestra que en el enunciado del Teorema 1.1 el denominador 4 se puede sustituir por un número algo menor. Es un problema abierto hallar la constante óptima. Parece que el primer valor para el que hay contraejemplos, ligeramente mayor que 1.84, no ha sido mejorado desde [8], basado en el método del antiguo trabajo [2].

## 5. La prueba del teorema pequeño de Picard

Existe una prueba “natural” [1, §8.3.1] del Teorema 1.2 utilizando formas modulares<sup>2</sup> que, como vimos, están relacionadas con las funciones elípticas (ese es el argumento original de Picard). Eso nos llevaría a profundizar más en la teoría de funciones elípticas solo con ese propósito. Para atajar, derivaremos el teorema pequeño de Picard del Teorema 4.1 que esencialmente equivale al teorema de Bloch. En este esquema emplearemos el siguiente un resultado auxiliar:

**Lema 5.1.** *Si  $f$  es una función entera tal que ni 0 ni 1 están en la imagen de  $f$ , entonces existe una función entera  $g$  tal que  $f(z) = \exp(2\pi i \cosh g(z))$ .*

Para un enunciado más simétrico y algún comentario histórico, véase [9].

*Demostración.* Como  $f$  no toma el valor 0 y está definida en  $\mathbb{C}$  (que es simplemente conexo) su logaritmo está bien definido (especificando una rama adecuada) por tanto existe una función entera  $h$  tal que  $f = \exp(2\pi i h)$ .

La función  $1 - h^2$  no se anula, ya que en otro caso  $f$  tomaría el valor 1, por tanto se tiene una raíz cuadrada  $r$ , un logaritmo de  $e^{r/2}$ , que es una función entera. De  $1 = (h + ir)(h - ir)$  se sigue que  $h + ir$  es una función entera que no se anula y  $h - ir$  es su inversa, entonces  $h + ir = e^g$ ,  $h - ir = e^{-g}$  para cierta función entera  $g$  y despejando se tiene  $h = \cosh g$ .  $\square$

*Demostración del teorema pequeño de Picard, Teorema 1.2.* Si  $z_1 \neq z_2$  no estuvieran en la imagen de  $f$  entonces 0 y 1 no estarían en la imagen de  $(f - z_1)/(z_2 - z_1)$ , por tanto cambiando  $f$  por esta función podemos suponer  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ .

Usando  $f(z) \neq 1$  se tiene  $\cosh g(z) \notin \mathbb{Z}$  en el Lema 5.1. Para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  las soluciones de  $\cosh w = \pm n$  son las de  $(e^w)^2 \mp 2ne^w + 1 = 0$  y resolviendo la ecuación cuadrática se tiene  $\pm e^{\pm w} = n + \sqrt{n^2 - 1}$  con todas las combinaciones de signos. Esto significa que la imagen de la función  $g$  no contiene ninguno de los elementos del conjunto

$$(16) \quad C = \{ \pm \log(n + \sqrt{n^2 - 1}) + \pi i m : n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z} \}.$$

La máxima separación horizontal de puntos consecutivos de  $C$  es  $\log(2 + \sqrt{3})$ , correspondiente a  $n = 1$  y  $n = 2$ . De esta forma, en cualquier rectángulo cerrado de base  $\log(2 + \sqrt{3})$  y altura  $\pi$  hay un punto de  $C$ . El máximo diámetro de un disco abierto que no contiene a un rectángulo de este tipo es  $\delta = (\pi^2 + \log^2(2 + \sqrt{3}))^{1/2}$ .

En definitiva, la imagen de la función entera  $g$  está contenida en  $\Omega = \mathbb{C} - C$  que cumple  $R(\Omega) = \delta/2$  y el Corolario 4.2 asegura que  $g$  es constante.  $\square$

---

<sup>2</sup>En breve: a partir de  $\wp$  se construye una función holomorfa  $\lambda : \{\Im(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\lambda'$  no se anula y 0 y 1 no están en su imagen. Una vez hecho esto, la idea es que si tampoco estuvieran en la imagen de  $f$ , entonces  $\exp(i\lambda^{-1} \circ f)$  sería acotada. Con un poco de esfuerzo, usando que  $\lambda'$  no se anula, se da sentido a  $\lambda^{-1} \circ f$  como función entera y entonces el teorema de Picard se sigue del de Liouville.



## 6. Otros resultados

El hecho de que una función  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  no alcance dos valores ya impone ciertas restricciones locales sobre su tamaño. En cierto modo, que no exploraremos, el siguiente resultado es una versión cuantitativa local del teorema pequeño de Picard y de hecho este se puede derivar como corolario.

**Teorema 6.1** (Teorema de Schottky). *Existe una constante  $A$  tal que para  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $0, 1 \notin f(\mathbb{D})$  se cumple*

$$(17) \quad |\log |f(z)|| \leq A(1 + |\log |f(0)||) \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

La prueba con una potencia cuarta extra se puede consultar en [5, §4.7], así como la relación con la omisión de valores de una función entera.

El teorema pequeño de Picard se extiende al caso en que hay polos permitiendo que la imagen de una función meromorfa omita a lo más dos valores. ¿Qué ocurre cuando hay singularidades esenciales? Entonces se cumple una versión muy fuerte del teorema pequeño de Picard incluso localmente.

**Teorema 6.2** (Teorema grande de Picard). *Sea  $f : \mathcal{U} - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $\mathcal{U}$  un abierto que contiene a  $z_0$ . Si en  $z_0$  hay una singularidad esencial<sup>3</sup> entonces  $f$  toma en  $\mathcal{U} - \{z_0\}$  infinitas veces cada valor de  $\mathbb{C}$  con a lo más una excepción.*

Este resultado extiende el teorema de Casorati-Weierstrass que posiblemente apareciera en un primer curso de variable compleja y que solo afirma que la imagen de  $\mathcal{U} - \{z_0\}$  es densa. La prueba del teorema de Casorati-Weierstrass es sencilla y breve [4, §77], lo que no ocurre con la del Teorema 6.2. En [5, §4.8] hay una demostración a partir del Teorema 6.1.

Como el nombre avanza, es posible obtener el teorema pequeño de Picard como consecuencia del teorema grande de Picard. Esto se debe a que no es difícil ver que si  $f$  es una función entera que no es un polinomio, entonces  $f(1/z)$  tiene una singularidad esencial en el origen. En particular, las funciones enteras que no son polinomios toman cada valor de  $\mathbb{C}$  infinitas veces salvo a lo más una excepción, lo cual va más allá del Teorema 1.2.

## Referencias

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

---

<sup>3</sup>Esto significa que no es evitable ni hay un polo, es decir que no se cumple  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$  para ningún  $n > 0$ .

- [2] L. V. Ahlfors and H. Grunsky. Über die Blochsche Konstante. *Math. Z.*, 42(1):671–673, 1937.
- [3] A. Bloch. Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l’uniformisation. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3)*, 17:1–22, 1925.
- [4] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex variables and applications*. McGraw-Hill Book Co., New York, fourth edition, 1984.
- [5] J. L. Fernández Pérez. *Variable Compleja IIe*. 2018. La versión preliminar de algunos capítulos se pueden descargar de [www.uam.es/fernando.chamizo](http://www.uam.es/fernando.chamizo).
- [6] J. E. Littlewood. *Littlewood’s miscellany*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Edited and with a foreword by Béla Bollobás.
- [7] É. Picard. Mémoire sur les fonctions entières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)*, 9:145–166, 1880.
- [8] H. Rademacher. On the Bloch-Landau constant. *Amer. J. Math.*, 65:387–390, 1943.
- [9] R. Remmert. *Classical topics in complex function theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998. Translated from the German by Leslie Kay.