Examen final 14/Jun/2018 Variable Compleja II 15:00–18:00 01.12.AU.405

Nombre y apellidos ....

1) Considera la integral $I = \int_0^{2\pi}(5+4\cos t)^{-1}\,dt$.

a) [1 punto] Usando las fórmulas $2\cos t = e^{it}+e^{-it}$ y $dt = d\big(e^{it}\big)/(ie^{it})$, halla una función meromorfa f tal que $I=\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\,dz$.

b) [1 punto] Calcula explícitamente el valor de I.

2) [2 puntos] Estudia si dada una función $\wp$ de Weierstrass existen constantes A y B tales que $\wp''(z) = A\big(\wp(z)\big)^2+B$.

3) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [1 punto] Existe una función no constante meromorfa en $\mathbb{C}$ que no alcanza los valores ni cero ni uno.

b) [1 punto] La función $\Gamma(s)$ tiene residuo $1/2$ en $s=-2$.

4) [2 puntos] Halla el abierto más grande en el que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 e^{n/z}$ converge uniformemente sobre compactos a una función holomorfa.

5) [2 puntos] Halla una biyección conforme de $\{z : \Re(z)>1\}$ en $\mathbb{D}$ que aplique 2 en $i/2018$.

Algunas definiciones y fórmulas: $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Lambda^*}\Big(\frac{1}{(z+\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\Big),\quad (\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3 \quad\text{con}\quad g_2=60\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-4},\ g_3=140\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-6}$$

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2\pi inz}=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-q^{2n}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big)\quad\text{con}\quad q=e^{\pi i\tau},\quad \Im\tau>0$$

$$\theta(z+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z)\qquad\text{y}\qquad \wp(z;1,\tau)=A_\tau\frac{\theta^2(z+1/2)}{e^{2\pi iz}\theta^2(z+\tau^*)}+B_\tau=-\Big(\frac{\theta'(z+\tau^*)}{\theta(z+\tau^*)}\Big)'+C_\tau.$$

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx\quad\text{para } \Re(s)>0\qquad\text{y}\qquad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\quad\text{para } s\notin\mathbb{Z}_{\le 0}.$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad\text{para } \Re(s)>1\qquad\text{y}\qquad \zeta(s)=\frac{i}{2\Gamma(s)\operatorname{sen}(\pi s)}\int_{C_\delta}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz\quad\text{para } s\notin\mathbb{Z}$$

donde C_δ, con $0<\delta<2\pi$ arbitrario, es una curva con forma de "cerradura" que viene desde $+\infty+i\delta$, rodea al origen y se dirige a $+\infty-i\delta$.
