Solución de la segunda parte del problema especial 2

2) Sean y_n y α tales que $x_n = \tan y_n$ y $a = \tan\alpha$. Se tiene

$$\tan y_{n+1} = x_{n+1} = \frac{x_n - a}{1 + a x_n} = \frac{\tan y_n - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \tan y_n} = \tan(y_n + \alpha).$$

Entonces $y_{n+1} = y_n + \alpha + k\pi$ y de aquí $y_n = n\alpha + k\pi$ (el k puede depender de n). Para que x_n sea m-periódica, $x_{n+m} = x_n$, es necesario y suficiente que $m\alpha = k\pi$, es decir, $\alpha = q\pi$ con $q \in \mathbb{Q}$. En otro caso, $\alpha/\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y el teorema de Weyl aplicado a $f(x) = \cos\big(\tan(\pi x)\big)$ da

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \cos(x_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha/\pi) = \int_0^1 f = \int_{-1/2}^{1/2} f.$$

La última igualdad es por la periodicidad. Aunque f no es continua en $\pi/2 + \pi k$, está acotada y eso justifica la aplicación del teorema modificando f en intervalos pequeños alrededor de estos puntos. Finalmente, con el cambio $\tan(\pi x) \mapsto x$, se tiene para $g(z) = e^{iz}/(1+z^2)$

$$\int_{-1/2}^{1/2} f = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\Re\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\Re\Big(2\pi i\,\mathrm{Res}(g,i)\Big) = \frac{1}{\pi}\Re\big(2\pi i \frac{e^{-1}}{2i}\big) = \frac{1}{e},$$

donde se ha empleado el teorema de los residuos en el semiplano superior.