Problemas de TOPOLOGÍA I Hoja 6 Curso 2003/2004

1. Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *estrellado* si existe $x_0 \in A$ tal que para todo $x \in A$, el segmento que une x_0 y x esta contenido en A. Demostrar que A es simplemente conexo. Deducir en particular que cualquier subconjunto convexo (esto es, conteniendo a los segmentos que unen cualquier par de puntos) de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

2. Encontrar dos espacios que tengan el mismo grupo fundamental pero que no sean homeomorfos.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si A y B son subespacios simplemente conexos con $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ también lo es.

ii) Si X es homeomorfo a la frontera de $[0,1] \times [0,1]$, el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Si el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y X es conexo por arcos, entonces X es homeomorfo a S^1.

iv) Si A y B son retractos de deformación fuerte de espacios homeomorfos, entonces A y B son homeomorfos.

4. Hallar el grupo fundamental de $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y de $\{x^2 + y^2 \geq 4\}$.

5. Demostrar que la relación "ser un retracto de deformación fuerte" es transitiva, esto es, si A lo es de B y B de C, entonces A lo es de C.

6. Hallar el grupo fundamental del toro sólido.

7. Probar que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ y $A \cup \{(1,0)\}$ no son homeomorfos.

8. Estudiar si los siguientes espacios son homeomorfos:

$$\mathbb{R} \times S^1 \times (S^2 \setminus \{(0,0,1)\}) \qquad \mathbb{R}^2 \times (S^2 \setminus \{(0,0,1)\}) \qquad \mathbb{R}^4$$

9. Sea $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que un homeomorfismo $f : D \longrightarrow D$ envía la frontera en la frontera y el interior en el interior (*Indicación*: considérense los grupos fundamentales de $D \setminus \{p\}$ y $D \setminus \{f(p)\}$).

10. La *banda de Moebius* B es el espacio cociente que resulta de identificar en $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \leq x \leq 10, \quad -1 < y < 1\}$ los puntos $(10, y)$ y $(-10, -y)$ para $-1 < y < 1$. La línea central de la tira rectangular pasa a ser una circunferencia C. Demostrar que C es un retracto de deformación fuerte de B y concluir que $\pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

11. Demostrar que S^n (la esfera n-dimensional) es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$. Utilizar este hecho para demostrar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.

$*$**12.** Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$ y establezcamos la relación de equivalencia en D dada por $p \sim q \Leftrightarrow p = q$ ó $p = -q$ con $p \in \text{Fr}(D)$. El espacio $X = D/\sim$ con la topología cociente es el llamado *plano proyectivo*. Demostrar que $\alpha(t) = (1 - 2t, 0)$ define un lazo en X con base en $x_0 = (1,0)$, tal que $[\alpha * \alpha]$ es el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$. *Nota*: Se puede probar que, sin embargo, α no es homótopo al lazo trivial. En palabras, aunque parezca increíble, en algunos espacios hay lazos que al ser recorridos dos veces se deshacen.

$\mathbf{2}^2 + \mathbf{3}^2$. Utilizar el teorema de la bola de pelo para probar que para cualquier función continua $f : S^2 \to S^2$ existe un punto $x \in S^2$ tal que o bien $f(x) = x$ o bien $f(x) = -x$.

14. Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x\,(x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2) & = 10 \\ y\,e^{x^2+y^2+y^4} & = \lambda \end{cases}$$

tiene solución $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para cada λ y estimar cuánto vale $a^2 + b^2$ (basta con encontrar una cota superior).

15. Consideremos lazos diferenciables $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Se puede probar que

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2} dt$$

es siempre un entero. Suponiendo esto conocido, demostrar que si α y β son homótopos (con una homotopía diferenciable) entonces $I(\alpha) = I(\beta)$. Calcular $I(\alpha)$ para $\alpha(t) = (\cos(2\pi kt), \operatorname{sen}(2\pi kt))$ y explicar el significado de $I(\alpha)$.