Problemas de TOPOLOGÍA I Hoja 5 Curso 2003/2004

1. Usando la definición, estudiar si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican

(i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.
(ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.
(iii) $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior.
(iv) $[0, 1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

2. Si $A \subset X$ es un conjunto finito de puntos, ¿es compacto cualquiera que sea la topología en X?

3. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina? ¿y con una más fina?

4. Sea $A \subset X$ y supongamos que la topología heredada por A es la discreta. Dar una condición necesaria y suficiente sencilla para la compacidad de A.

5. Definir una topología, diferente de la trivial, en $\mathbb{R}^2$ de forma que sea un espacio topológico compacto.

6. Probar las siguientes afirmaciones o bien dar un contraejemplo.

(i) La unión finita de compactos es compacta.
(ii) La unión de una familia cualquiera de compactos es compacta.
(iii) La intersección de una familia cualquiera de compactos es compacta.
Sugerencia: considerar en $[0, 1]$ la topología cuya base es $\mathcal{B} = \{(a, b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(0, 1]\} \cup \{[0, 1)\}$.
(iv) La intersección de una familia cualquiera de compactos en un espacio de Hausdorff es compacto.

7. Dar un ejemplo de una topología en la que exista un conjunto compacto que no sea cerrado.

8. Probar que si X es compacto y x es el único punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ entonces x_n converge a x. ¿Es cierto que toda sucesión y sus puntos de acumulación forman un conjunto compacto? Probar, por último, que todo espacio compacto infinito contiene un subconjunto numerable no cerrado.

9. Probar que existe un recubrimiento de $[0,1]$ por intervalos cerrados que no admite ningún subrecubrimiento finito.

10. Decir cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

11. Probar que si X es un espacio compacto y $A \subset X$ entonces $\overline{A}$ es compacto. Demuéstrese también que $\mathcal{B} = \{\{0,n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $A = \{0\}$ es compacto pero $\overline{A}$ no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?

12. Sea X un espacio compacto y $\mathcal{C}$ una familia de funciones continuas de X en $[0,1]$ tales que $f, g \in \mathcal{C} \Rightarrow fg \in \mathcal{C}$ y para cada $x \in X$ existe $f \in \mathcal{C}$ y un entorno $\mathcal{U}(x)$ con $f(\mathcal{U}(x)) = 0$. Probar que $\mathcal{C}$ contiene a la función nula.

12+1. Demostrar que si $f : X \to Y$ es continua, Y es Hausdorff y X es compacto, entonces f es cerrada (aplica cerrados en cerrados). Deducir que si f es además una biyección entonces es un homeomorfismo.

14. En $\mathbb{R}$ se considera la topología $\mathcal{T}$ generada por $\{(a,b) : a < b\} \cup \{(a,b) \cap \mathbb{Q} : a < b\}$. Probar que el intervalo $[0,1]$ no es compacto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

15. Demostrar que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ son necesariamente numerables. *Sugerencia*: Usar el hecho de que en un conjunto no numerable hay siempre una sucesión estrictamente creciente.

16. Sea X un espacio de Hausdorff y sean $K_1, K_2 \subset X$ dos compactos disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ con $K_1 \subset \mathcal{U}_1$ y $K_2 \subset \mathcal{U}_2$.

17. Si (X,d) es un espacio métrico compacto, probar que la función distancia está acotada.. *Sugerencia*: Es continua por el problema 9 de la Hoja 1.

18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio compacto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que $\mathcal{F}$ verifica

(i) Si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces existe $h \in \mathcal{F}$ con $h \leq \min(f,g)$.
(ii) Para todo $x \in X$, $\inf\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} = 0$.

Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

19. Sean $X_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$, $X_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que X_1 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que X_1 y X_2 no son homeomorfos.

20. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Demostrar que la función $d(x, K) = \inf \{d(x, y) : y \in K\}$ es continua y que para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$.

21. Se define el conjunto de Cantor como $C = \cap_{n=0}^{\infty} T_n$ con $T_0 = [0, 1]$ y $T_n = T_{n-1} \setminus \cup_{k=0}^{\infty} (\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n})$. Demostrar que

(I) Las componentes conexas de C son los puntos.
(II) C es compacto.
(III) C es perfecto (es decir, todos sus puntos son de acumulación).
(IV) C no es numerable.

22. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y^2, \ x, y \in [-1, 1]\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en $\mathbb{R}$? ¿Y de $\mathbb{R}$ en X?

23. Demostrar el siguiente resultado conocido como *teorema de la aplicación contractiva*: si X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una aplicación contractiva (es decir, existe $K < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$ para todo $x, y \in X$) entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. *Sugerencia*: si $a \in X$, considerar la sucesión $x_1 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$.

$**$**24.** Sean X e Y espacios de Hausdorff y sea $f : X \to Y$ continua.

(I) Dada una familia $\{C_i\}_{i \in I}$ de conjuntos compactos de X tal que dados $i, j \in I$ existe $k \in I$ con $C_k \subset C_i \cap C_j$, probar que $f(\cap C_i) = \cap f(C_i)$.
(II) Si $X = Y$, deducir que existe un subconjunto A de X tal que $f(A) = A$. *Sugerencia*: Definir $A = f(X) \cap f^2(X) \cap \cdots \cap f^n(X) \cap \cdots$

25. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ y S^2 no son homeomorfos.

26. Demostrar que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada. (*Sugerencia*: Si A es cerrado y $x \notin \pi_1(A)$, hallamos un "tubo" $T = \mathcal{U}_x \times Y$ tal que $T \cap A = \emptyset$). Dar un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas.

$*$**27.** Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto. Probar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la gráfica de f, Γ_f, es cerrada en $X \times Y$.

Si X es también un espacio de Hausdorff compacto, entonces f es continua si y sólo si Γ_f es compacta. *Sugerencia*: La clave de la demostración está en probar que $f^{-1}(K) = \pi_1\big((X \times K) \cap \Gamma_f\big)$ y luego basta usar el ejercicio anterior.

28. ¿Son $[0,1] \times [0,1]$ y $[0,1) \times [0,1]$ compactos con la topología del orden lexicográfico?

29. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y consideremos el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ siendo $\{\infty\}$ un objeto que no está en X. Probar que la familia

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{U \subset X^* : \infty \in U \quad \text{y} \quad X \setminus U \quad \text{es un compacto de} \quad X\}$$

es una topología y que $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es compacto. Comprobar que si X es Hausdorff, la topología que X hereda como subespacio de X^* es precisamente $\mathcal{T}$ y demostrar que si X es conexo entonces X^* también lo es.

Un poco de cosmología: De dónde venimos y a dónde vamos con la compacidad.

Desde Einstein se cree que el universo está modelizado por una variedad cuatridimensional, esto es un espacio topológico X, el espacio-tiempo, en el que, entre otras cosas, existen ciertas funciones continuas $\phi : X \to \mathbb{R}^4$ que son homeomorfismos al menos en un abierto. Se llama coordenada tiempo (en dicho abierto) a la composición $\pi_1 \circ \phi$ (mientras que $\pi_2 \circ \phi$, $\pi_3 \circ \phi$ y $\pi_4 \circ \phi$ son coordenadas espacio). Para evitar singularidades (por ejemplo en el big-bang), S. Hawking y otros propusieron la hipótesis cuántica de "no frontera"que implica que X es compacto. Sabiendo esto, leer el siguiente fragmento de un artículo de S. Hawking:

Does the universe have a beginning and/or end? If the 'no boudary' proposal for the quantum state is correct, spacetime is compact. On a compact space, any time coordinate will have a minimum and a maximum. Thus, in this sense, the universe will have a beginning and an end.

Sobre la pregunta ingenua de ¿qué ocurrió antes del principio? Hawking aclara:

To ask what happened before the universe began is like asking for a point on the Earth at 91^o north latitude, it just is not defined.