Problemas de TOPOLOGÍA I **Hoja 4** **Curso 2003/2004**

1. Si X es un espacio conexo cuando usamos cierta topología, ¿debe seguir siéndolo si utilizamos otra menos fina? ¿y si es más fina? Ilustrarlo con ejemplos.

2. Dar un ejemplo de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que ni A ni su complementario sean conexos (con la topología usual).

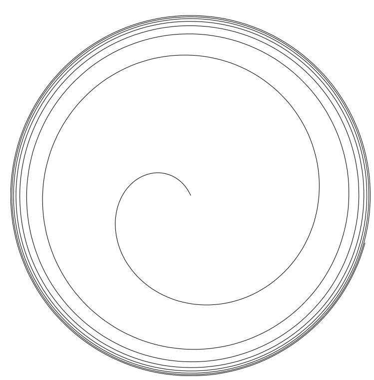
3. Si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico, ¿puede asegurarse que el interior y la frontera de A son también conexos?

4. (a) Probar que un espacio X es conexo si y sólo si no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$ donde $Y = \{0, 1\}$ con la topología discreta.

(b) Usar el apartado anterior para probar que si S es un subconjunto conexo de un espacio X y K satisface $S \subset K \subset \overline{S}$ entonces K es conexo.

5. Dar un ejemplo de un subespacio X de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual que sea conexo por arcos pero tal que para cualquier $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \epsilon < 1$, el conjunto $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X$ no sea conexo. *Indicación*: Un haz de rectas con pendientes racionales tiene esta propiedad en muchos puntos.

6. En el plano con la topología usual, sean $S = \{(r\cos t, r\sin t) : r = 1 - \frac{1}{t}, t \geq 1\}$ y $C = \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$. Probar que $X = S \cup C$ es conexo pero no es conexo por caminos.



7. Caracterizar todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.

8. Probar que los puntos de $\mathbb{R}^3$ que distan del origen una cantidad $1 < r < 2$, forman un conjunto conexo por caminos (con la topología usual).

9. Probar que las componentes conexas de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey son los puntos.

10. Estudiar si $X = [0,1]\times[0,1]$ es conexo y conexo por caminos cuando utilizamos

1. La topología del orden lexicográfico en X.
2. La topología heredada de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

11. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conexos y $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k < n$, probar que $\bigcup A_n$ es conexo. Tratar de generalizar el resultado para una colección numerable de conexos.

$*$**12.** Sean A y B dos subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico X. Demostrar que si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos entonces A y B también lo son. ¿Es válido el resultado si A o B no son cerrados?

$\mathbf{5+8}$. Demostrar que X es conexo si y sólo si todos sus subconjuntos propios tienen frontera no vacía. *Indicación*: Ver la Hoja 2.

14. Demostrar que si $A \times B$ es conexo entonces A y B también lo son.

15. Demostrar que si A y B son conexos por caminos y $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ también lo es.

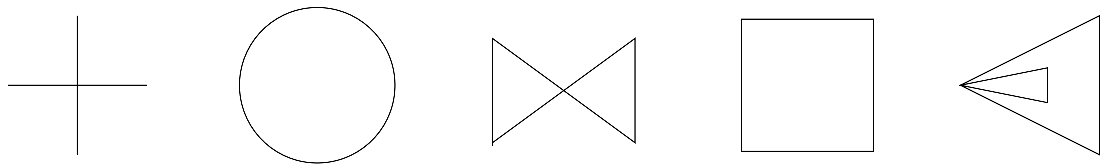
16. Demostrar que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo por caminos. (*Indicación*: el conjunto de rectas que pasan por un punto es no numerable)

17. Demostrar que si X e Y son conexos y A, B son subconjuntos propios no vacíos de X e Y respectivamente entonces $X \times Y \setminus A \times B$ es conexo. En la situación anterior, ¿es cierto que si X e Y son conexos por caminos entonces $X \times Y \setminus A \times B$ también lo es?

18. Probar que si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entre dos espacios topológicos y $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ entonces $X \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ e $Y \setminus \{f(x_1), ..., f(x_n)\}$ también son homeomorfos. Como aplicación, demostrar que $(1,2)$, $[1,2]$ y $[1,2)$ no son homeomorfos.

19. Demostrar que $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ (los ejes) no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

20. Decidir cuáles de los siguientes subespacios conexos (formados únicamente por líneas) de $\mathbb{R}^2$, con la topología usual, son homoeomorfos y cuáles no.



21. De las cinco vocales escritas en mayúscula, ¿cuáles son homeomorfas y cuáles no?

$*$**22.** Sean A y B subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ tales que A es abierto y B es cerrado. Demostrar que A y B no pueden ser homeomorfos.

23. Sabiendo que las componentes conexas son siempre cerradas, demostrar que si hay un número finito de ellas entonces son también abiertas.

24. Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2+y^2 = 1\}$, $Y = S^1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en Y? ¿Y de Y en X? ¿Y si pedimos además que sea biyectiva?

25. Describir las componentes conexas del subconjunto I de los números irracionales de $\mathbb{R}$ con la topología habitual. Hacer lo mismo con el subconjunto $I \times I \subset \mathbb{R}^2$.

26. Probar cada una de las siguientes afirmaciones o dar un contraejemplo:

i) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y sobreyectiva y X no es conexo, entonces Y no es conexo.

ii) Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene gráfica conexa es continua.

$*$**27.** ¿Existe una función creciente y acotada $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f([a,b])$ no sea conexo para ningún $[a,b] \subset [0,1]$? *Indicación*: Tratar de provocar discontinuidades de salto por ejemplo en todos los racionales. Para ello puede ser conveniente escribir f como la suma de una serie de funciones.

28. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y que tiene n componentes. Probar que X tiene como mínimo también n componentes.

29. Sea S^1 la circunferencia unidad $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología usual heredada del plano y sea Y el intervalo $[a, b]$ también con la topología usual. Supongamos que $f : S^1 \longrightarrow Y$ es continua y sobreyectiva. Probar que, para cada $c \in (a, b)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ contiene más de un punto.

30. ¿Son $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$ homeomorfos? Explicarlo.

31. Sea X el conjunto de los números reales con la topología usual y sea Y el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por los dos ejes de coordenadas. Probar que si $f : X \longrightarrow f(\mathbb{R}^2) = Y$ es una función continua entonces $f^{-1}(\{(0, 0)\})$ contiene al menos tres puntos.

32. Si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en cualquier intervalo, ¿es necesariamente continua? *Nota*: En el curso de Análisis Funcional se verá que en espacios muy generales, incluso de dimensión infinita, las funciones lineales con gráfica cerrada son continuas.

33. Sea $X = [0, 1)$ con la topología métrica dada por la distancia $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Demostrar que X es homeomorfo a la circunferencia unidad y que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y existen $x_0, x_1 \in X$ con $f(x_0) < 0 < f(x_1)$, entonces siempre hay al menos dos valores en los que $f(x)$ se anula.

34. Probar cada una de las siguientes afirmaciones en caso de que sean ciertas o encontrar un contraejemplo en caso contrario.

1. Si X es conexo por caminos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es también conexo por caminos
2. Si S es un subconjunto conexo por caminos de un espacio topológico X y $S \subset K \subset \overline{S}$ entonces K es conexo por caminos.
3. Si $C = \{C_i : i \in I\}$ es una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio y existe $C_0 \in C$ que interseca a cada elemento de C, entonces $\cup_{i \in I} C_i$ es conexo por caminos.

35. Demostrar que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto es no numerable.

$*$**36.** Demostrar que toda función continua e inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es abierta.