Problemas de TOPOLOGÍA I **Hoja 3** **Curso 2003/2004**

1. Sean X_1 y X_2 los espacios topológicos obtenidos al dotar al conjunto X con las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, respectivamente. Demostrar que la función identidad $id : X_1 \to X_2$, $id(x) = x$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$. ¿Cuándo es un homeomorfismo?

2. Dar una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$ que no sea la discreta de forma que la función de Dirichlet ($f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) sea continua como función de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

3. Estudiar si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homoeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

4. Usando un resultado de Cálculo I probar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} - \{0\}$ no son homeomorfos con la topología usual.

5. Demostrar, sabiendo que toda sucesión en $[0, 1]$ tiene un punto de acumulación, que no existe ninguna función continua y sobre de $[0, 1]$ en $(0, 1)$. Encontrar una función continua y sobre de $(0, 1)$ en $[0, 1]$.

6. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ y la bola unidad abierta B correspondiente a la norma euclídea $\|\cdot\|_2$ son homeomorfos. *Indicación*: Estudiar la función $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|_2}$ que va de $\mathbb{R}^n$ en B.

7. Hallar una función continua y biyectiva del intervalo $(-1, 1)$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$, ambos con la topología usual. *Nota*: Más adelante sabremos demostrar que estos espacios no son homeomorfos.

8. Hallar una función abierta (esto es, que transforme abiertos en abiertos) que sea biyectiva pero no un homeomorfismo.

9. Dar un homeomorfismo lo más explícito que sea posible, entre el cuadrado unidad y su círculo circunscrito, ambos con la topología usual.

10. Sean X e Y dos espacios con la topología del orden. Demostrar que si $f : X \to Y$ es biyectiva y conserva el orden, esto es, $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$, entonces f es un homeomorfismo.

11. Demostrar que $[0,2) \cup [4,5]$ y $[0,3]$ son homeomorfos con la topología del orden.

12. Demostrar que si $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \leq (g(x))^2\}$ es cerrado.

$\mathbf{2}^2 + \mathbf{3}^2$. Demostrar que:

a) $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es homemorfo a $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey.

b) $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es homemorfo a ningún espacio T_2.

c) Las propiedades T_1 y T_2 son topológicas, esto es, se conservan por homeomorfismos.

d) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ es continua, $\mathbb{R}$ tiene la cofinita y X tiene una topología T_2, entonces f es constante.

14. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, ¿se cumple siempre $f(\text{Int}(A)) = \text{Int}(f(A))$?

15. Sea $X = [0,1]$ con la topología usual e $Y = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudiar si las funciones $f_i : X \longrightarrow Y$ son continuas, donde: $f_1(t) = (t,t)$, $f_2(t) = (1/2, (2t+1)/4)$ y $f_3(t) = (t,1)$.

16. Sean X e Y espacios topológicos y $\mathcal{U} \subset X \times Y$ un conjunto abierto. Demostrar que $\mathcal{U}_x = \{y \in Y : (x,y) \in \mathcal{U}\}$ y $\mathcal{U}_y = \{x \in X : (x,y) \in \mathcal{U}\}$ son abiertos en Y y en X respectivamente. Por otro lado, si $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_y$ son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es $\mathcal{U}$ abierto en $X \times Y$?

17. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

18. Demostrar que cualquier intervalo (a,b) es homeomorfo al intervalo $(0,1)$, a la recta $\mathbb{R}$ y al rayo $(0, +\infty)$.

19. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ describir la topología inducida en los subconjuntos $X = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

20. Probar que, con la topología usual, $[0,\infty)\times[0,\infty)$ es homeomorfo a $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2<1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

21. Utilizar coordenadas polares y la función $r\mapsto(r^2+1)^{-1}$ para demostrar que el semiplano derecho $\{(x,y):x>0\}$ es homeomorfo a $(0,1)\times(-\pi/2,\pi/2)$.

22. Probar que existen funciones de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades. *Indicación*: La imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a,b)$ contiene siempre un número racional.

23. Explicar geométricamente, con algunos dibujos, por qué $[0,1)\times[0,1)$ es homeomorfo a $[0,1]\times[0,1)$ (consideramos la distancia euclídea en ambos casos).

24. Sean $f,g:X\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas. Probar que son continuas las siguientes funciones:

(1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

(2) $(fg)(x)=f(x)g(x)$

(3) $h(x)=|g(x)|$

(4) $h(x)=f(x)/g(x)$ si $g(x)\neq 0$ para todo $x\in X$.

(5) $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$

(6) $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$

Indicación: Las funciones $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ que eran continuas en Cálculo I y II lo siguen siendo este año. Así se puede dar por supuesto que funciones como $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x,y)=x+y$, son continuas.

25. Demostrar que la función compleja $f(z)=(z-i)/(z+i)$ establece un homeomorfismo entre el semiplano superior $\{x+iy\ :\ y>0\}$ y el círculo unidad abierto.

26. Sea $f:X\to Y$ continua y sobreyectiva, donde Y es un espacio T_1 y X tiene la topología cofinita. Probar que si f no es constante entonces Y tiene la topología cofinita.

27. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ que tiene como base la familia de todos los conjuntos que son de la forma

$$B^{\varepsilon}_{(x,y)}=\{(x,y)\}\cup\{(s,t):x<s<x+\varepsilon,y<t<y+\varepsilon\}$$

Estudiar si existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}$.

28. Para cada punto P de $\mathbb{R}^2$ y cada $r > 0$ se considera el cuadrado abierto centrado en P y de lado $2r$, menos los puntos de las dos diagonales del cuadrado, exceptuando al punto P. La familia de los conjuntos así obtenidos forman una base de entornos abiertos de P para una topología $\mathcal{T}$. ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}$? *Indicación*: Probar que ambas topologías deben ser menos finas que la usual.

29. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Probar que si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la "base producto") entonces $\pi_1(\mathcal{B}) = \{\pi_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $\pi_2(\mathcal{B}) = \{\pi_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver los dos problemas anteriores?

30. Demostrar que X es un espacio topológico T_2 si y sólo si $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ es un cerrado en el espacio producto $X \times X$.

31. Dar un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea. *Indicación*: Pensar en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.