Problemas de TOPOLOGÍA I **Hoja 2** **Curso 2003/2004**

1. Sea X un conjunto, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una aplicación. Probar que $\mathcal{T} = \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{T}_Y\}$ es una topología sobre X. Esta topología se llama *topología inicial de f*.

2. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una aplicación. Probar que $\mathcal{T} = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_X\}$ es una topología sobre Y. Esta topología se llama *topología final de f*.

3. Demostrar que la familia numerable $\mathcal{F}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base que genera en $\mathbb{R}$ la topología usual. Probar que, sin embargo, la familia $\mathcal{F}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es base para una topología que no es la de Sorgenfrey (recuérdese que la topología de Sorgenfrey $\mathcal{T}_{[)}$ en $\mathbb{R}$ es la generada por la base $\mathcal{F}_3 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$).

4. Encontrar un ejemplo de una topología que no sea ni la discreta ni la trivial en la que los conjuntos abiertos coincidan con los conjuntos cerrados.

5. Demostrar que la clase de los intervalos cerrados $[a, b]$, donde a y b son racionales y $a < b$ no es base de una topología en $\mathbb{R}$. Probar que, sin embargo, la clase de los intervalos cerrados $[a, b]$ donde a es racional, b es irracional y $a < b$ sí es base de una topología en $\mathbb{R}$.

6. Se dice que un conjunto es $\mathcal{F}_\sigma$ si es unión numerable de conjuntos cerrados; y que es $\mathcal{G}_\delta$, si es intersección numerable de conjuntos abiertos. Demostrar que la unión numerable de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$, que la intersección numerable de conjuntos $\mathcal{G}_\delta$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ y que el complementario de un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$.

7. Probar que, en un espacio métrico, todo conjunto cerrado es un $\mathcal{G}_\delta$ y todo conjunto abierto es un $\mathcal{F}_\sigma$.

8. Demostrar que, si X es un espacio topológico, (S, d) un espacio métrico y $f : X \to S$, el conjunto de puntos de continuidad de f es un $\mathcal{G}_\delta$. *Sugerencia:* para cada $n \in \mathbb{N}$, definir C_n como el conjunto de los $x \in X$ tales que existe un entorno V

de x que satisface $d(f(y), f(z)) < 1/n$ para cada $y, z \in V$. Probar que C_n es abierto y que f es continua en $x \in X$ si y sólo si $x \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

9. Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$, denotamos por $B((x, y), \varepsilon)$ la bola en la distancia usual que tiene centro (x, y) y radio ε. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ definimos $B_\varepsilon^x = \{(u, v) : (u - x)^2 + v^2 < \varepsilon^2, v > 0\} \cup \{(x, 0)\}$. En $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ consideramos las siguientes familias de subconjuntos

(I) $\mathcal{B}_1 = \{B((x, y), \varepsilon) : y > 0, \varepsilon \leq y\} \quad \cup \quad \{(x, 0)\}$
(II) $\mathcal{B}_2 = \{B((x, y), \varepsilon) : y > 0, \varepsilon \leq y\} \quad \cup \quad \{B_\varepsilon^x : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$

Probar que ambas familias son base para sendas topologías en X y comparar dichas topologías.

10. Sean X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ su conjunto de partes y $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una aplicación que satisface

(I) $A \subset f(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$
(II) $f(f(A)) = f(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$
(III) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$
(IV) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Probar que $\mathcal{T}_f = \{A \in \mathcal{P}(X) : f(X \setminus A) = X \setminus A\}$ es una topología en X que satisface $\overline{A} = f(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$. En otras palabras, se puede definir una topología en un conjunto X por el método de asociar a cada subconjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ la que va a ser su adherencia, siempre que esta asociación satisfaga las propiedades que satisfacen las adherencias en cualquier topología.

11. Sea X un conjunto infinito y $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida como

$$f(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ X & \text{si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

para cada $A \subset X$. Se pide intentar identificar la topología $\mathcal{T}_f$.

12. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_u$ la base usual y $\mathcal{I}$ la familia de todos los subconjuntos de números irracionales. Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{B}_u \cup \mathcal{I}$ (que es una subbase para $\mathcal{T}$). En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, encontrar la adherencia del conjunto $(0, \sqrt{2})$ y el interior del conjunto $[0, \sqrt{2}]$.

$\sqrt{\mathbf{169}}$. Si x es un número real y n un número natural, definimos $B_n^x = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < 1/n \quad \text{ó} \quad y > n\}$. Demostrar que $\mathcal{B} = \{B_n^x : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$ y comparar ésta con la topología usual. Hallar la adherencia de los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

14. Sea $A = \{0\} \cup [1,2] \subset \mathbb{R}$. Indicar tres topologías en $\mathbb{R}$ de forma que el interior de A sea respectivamente $\emptyset$, $(1,2]$ y $\{0\}$.

15. Sea $A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Hallar $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$ y A' en las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

(i) La usual.
(ii) La cofinita.
(iii) $\mathcal{T}_{[)}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).
(iv) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
(v) $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

16. Sea X el conjunto de las aplicaciones de $[0,1]$ en $[0,1]$. Para cada subconjunto S de $[0,1]$ se define $B_S = \{f \in X : f(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad x \in S\}$. Demostrar que la familia formada por los B_S es base para una topología en X.

17. Demostrar que:

(i) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.
(ii) $\operatorname{Fr} A = \emptyset$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.
(iii) Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ entonces $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$.

18. Si en un espacio topológico X se cumple $\operatorname{Int}(A) = A$ para todo $A \subset X$, demostrar que la topología es la discreta.

19. Hallar un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que con la topología usual de $\mathbb{R}$ se tenga $\operatorname{Fr}(A) = [1,2] \cup \{0\} \cup \{1/n \ : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$.

20. Demostrar que si $\operatorname{Fr} A = B$ y $\operatorname{Fr} B = A$ entonces $A = B$.

21. Encontrar dos subconjuntos A, B abiertos de $\mathbb{R}$ tal que los cuatro subconjuntos $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B}$ sean distintos.

22. Demostrar las siguientes afirmaciones cuando sean ciertas para cualquier espacio topológico X y, cuando no lo sean, encontrar un contraejemplo.

(I) Para cada $A \subset X$ se tiene que $\operatorname{int}(\operatorname{Fr} A) = \emptyset$.
(II) Si $A \neq \emptyset$ es cerrado y $\operatorname{int} A = \emptyset$, existe B tal que $A = \operatorname{Fr} B$.
(III) Si $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ entonces $\operatorname{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$.
(IV) Para cada $A \subset X$, $\overline{A} = \overline{\operatorname{int} A}$.

23. Lo mismo que en el problema anterior para:

(I) Si $A \cap \operatorname{Fr}(A) = \emptyset$ entonces A es abierto.
(II) Para cada $A \subset X$, el conjunto A' es cerrado (X puede no ser Hausdorff).
(III) Si $x \notin A'$ entonces $x \notin (\overline{A})'$.

24. Demostrar que si A es abierto entonces $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. ¿Es cierta la inclusión si no lo es?

25. Demostrar que si $A \cup B = X$ entonces $\overline{A} \cup \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A) \cup \overline{B} = X$.

26. Demostrar que $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$.

27. Hallar $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \neq \operatorname{int}(A \cup B)$.

28. Demostrar que $\cup_\alpha \overline{A_\alpha} \subset \overline{\cup_\alpha A_\alpha}$ y que la igualdad se da si la unión tiene un número finito de elementos.

29. Hallar un contraejemplo para demostrar que la inclusión $\overline{\cup_\alpha A_\alpha} \subset \cup_\alpha \overline{A_\alpha}$ no es cierta en general y encontrar el fallo en la siguiente demostración falsa de la citada inclusión: si $x \in \overline{\cup_\alpha A_\alpha}$ entonces, para todo entorno U de x, $U \cap (\cup_\alpha A_\alpha) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset$ para algún α_0 y se tiene $x \in \overline{A_{\alpha_0}}$ y $x \in \cup_\alpha \overline{A_\alpha}$.

30. Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{T}$ la topología generada por el conjunto de todas las líneas rectas que pasan por el origen y el origen mismo. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ encontrar la adherencia de $A = \{(0,0)\}$, $B = \{(1,1)\}$ y $C = \{(x,1) : 0 < x < 1\}$.

31. Si un espacio topológico Hausdorff tiene un número finito de elementos, ¿cuál es su topología? Deducir una caracterización para los espacios métricos con un número finito de elementos que venga expresada en términos de su topología.

32. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{-n\}$ en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (definida en un ejercicio anterior) y concluir que el límite de una sucesión no tiene porqué ser único cuando el espacio no es Hausdorff. Por otro lado, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\leftarrow})$ no es Hausdorff, sí que posee cierta propiedad de separación que el lector puede tratar de descubrir y enunciar.

33. Estudiar la convergencia de las sucesiones en $\mathbb{R}$ con las topologías cofinita, conumerable (de complementario numerable) y de Sorgenfrey $\mathcal{T}_{[)}$.

34. Probar que si en un espacio topológico X, A y su complementario son densos (esto es, $\overline{A} = \overline{X - A} = X$), entonces $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(X - A) = \emptyset$. ¿Es cierto el recíproco?

35. Si (S, d) es un espacio métrico completo (cada sucesión de Cauchy tiene límite), probar:

(I) si $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de abiertos densos, entonces $\cap_n G_n$ es denso.
(II) si $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de cerrados con interior vacío, entonces $\cup_n F_n$ tiene interior vacío.
(III) si $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de cerrados tales que $\cup_n F_n = S$ entonces algún F_n tiene interior no vacío.

Nota y sugerencia: El apartado (I) se conoce como Teorema de Baire, y se suele aplicar muchas veces en la versión (III). Para probar (I), dado cualquier $s \in S$ y cualquier entorno V de s se puede construir una sucesión de entornos encajados $V_n \subset V$ de modo que $\operatorname{diam} V_n < 1/n$ y $V_n \subset G_1 \cap \ldots \cap G_n$. Escoger un punto de cada entorno V_n para formar una sucesión de Cauchy y usar después la completitud de S.

36. Demostrar que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ en $\mathbb{R}$ (véase la definición de conjunto $\mathcal{G}_\delta$ en un ejercicio anterior). En consecuencia, por un problema anterior, no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en los racionales y discontinua en los irracionales. *Sugerencia*: Decir que los racionales son un $\mathcal{G}_\delta$ es lo mismo que decir que los irracionales son un $\mathcal{F}_\sigma$. Si esto fuera verdad, $\mathbb{R}$ podría escribirse como una unión numerable de cerrados, todos ellos con interior vacío.

37. Demostrar que existen funciones que son continuas en los racionales y discontinuas en los irracionales. Por ejemplo: $f(x) = 0$ si x es irracional y $f(p/q) = 1/q$ si p/q es una fracción irreducible.

38. Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ con $\mathcal{U}_n$ abiertos densos de $\mathbb{R}$ (esto es, $\overline{\mathcal{U}_n} = \mathbb{R}$). Demostrar que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\chi_n(x)$ es una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A y discontinua en $\mathbb{R} - A$, donde χ_n es la función que vale 1 en $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n$ y 0 en el resto.

39. Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *separable* si existe un subconjunto numerable denso $A \subset X$ (esto es, tal que $\overline{A} = X$). Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable porque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Se pide probar que

(i) Si X es separable, toda familia de abiertos disjuntos es numerable.
(ii) Si la topología $\mathcal{T}$ tiene una base numerable entonces $(X, \mathcal{T})$ es separable.
(iii) El recíproco de (ii) no es cierto: tómese como contraejemplo cualquier conjunto X no numerable con la topología cofinita.
(iv) Intentar encontrar algún otro contraejemplo al recíproco de (ii) (¿qué tal $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$?).
(v) Demostrar que, sin embargo, dicho recíproco sí es cierto en espacios métricos.

$*$**40.** Probar que si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene una base numerable, entonces cualquier unión de abiertos $\mathcal{U} = \cup_{i\in I} U_i$ se puede expresar como una unión numerable, esto es, $\mathcal{U} = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$ con $i_n \in I$ para cada $n \in \mathbb{N}$ *(la anterior propiedad se llama "de Lindelof").* Usar esto para probar que si X tiene una base numerable entonces cualquier base contiene una base numerable. Esto último puede servir para probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ no tiene ninguna base numerable.