Problemas de TOPOLOGÍA Hoja 1 Curso 2003/2004

1. Estudiar si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibujar la bola $B(x,r)$ de centro x y radio r, siendo $x = 0$ y $r = 1/2$. Ídem si $x = 1/2$ y $x = 1$.

2. Demostrar que si d es una distancia en X entonces $d'(x,y) = \text{mín}(d(x,y), 1)$ también lo es.

3. Si (X,d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $B_\alpha(A) = \{x \in X : d(x,A) < \alpha\}$ siendo $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Probar que $B_\alpha(B_\beta(A)) \subset B_{\alpha+\beta}(A)$ pero que no se tiene necesariamente la igualdad.

4. Comprobar que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

(a) Por $\mathbb{R}^\omega$ denotamos el espacio de todas las sucesiones de números reales $x = (x_n)$. Definimos $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \qquad x \in \mathbb{R}^\omega,\ y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1-2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?.

(b) Sean ℓ_∞ el espacio de todas las sucesiones acotadas y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

(c) Sean ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$ y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \left(\sum_n |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2}$$

Indicación: si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

5. Estudiar si $d(A,B)=\sqrt{tr((A-B)^t\cdot(A-B))}$ define una distancia en el espacio de matrices 2×2. Nota: recuérdese que $tr = traza$ indica la suma de los elementos de la diagonal principal.

6. ¿Qué sucesiones convergen en $(\mathbb{R},d)$ siendo d la métrica discreta? (Recuérdese que $d(x,y)=1 \Leftrightarrow x\neq y$)

7. Sea $c(n)$ la mayor potencia de 5 que divide a $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (p. ej. $c(75)=5^2$, $c(12)=5^0$, etc.). Demostrar que

$$d(n,m)=\begin{cases} 0 & \text{si } n=m\\ \frac{1}{c(n-m)} & \text{si } n\neq m\end{cases}$$

define una distancia en $\mathbb{Z}$. Demostrar que en este espacio métrico la sucesión 10, 1100, 111000, 11110000, ... es convergente. ¿Cuál es su límite?

8. Demostrar que $d(x,y)=\text{mín}(|x-y|,1-|x-y|)$ define una distancia en $[0,1)$. ¿Cuáles son las funciones $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ continuas en este espacio?

9. Si (X,d) es un espacio métrico y consideramos x, y, x' e y' elementos cualesquiera de X, probar que

$$|d(x,y)-d(x',y')|\leq d(x,x')+d(y,y').$$

Deducir de ello que $\text{lím}_n\, d(x_n,y_n)=d(x,y)$ cuando $\text{lím}_n\, d(x_n,x)=0=\text{lím}_n\, d(y_n,y)$.

***10.** Sea X la familia de todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^2$ que son cerrados y acotados. Si $A,B\in X$, definimos $d(A,C)=\inf\{\varepsilon>0 : A\subset B_\varepsilon(C) \;\text{ y }\; C\subset B_\varepsilon(A)\}$, donde $B_\varepsilon(\cdot)$ está definido en el ejercicio 3). Probar que

(I) si $\inf\{\varepsilon>0 : A\subset B_\varepsilon(C)\}=0$ entonces $A\subset C$.
(II) $d(A,C)=\text{máx}\{\inf\{\varepsilon>0 : A\subset B_\varepsilon(C)\},\inf\{\varepsilon>0 : C\subset B_\varepsilon(A)\}\}$.
(III) $d(A,C)=\text{máx}\{\sup_{a\in A} d(a,C),\sup_{c\in C} d(c,A)\}$
(IV) (X,d) es un espacio métrico.

11. Sabiendo que $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = < x_1-x_2 > + < y_1-y_2 >$ (donde $<\cdot>$ indica la distancia al entero más cercano) es una distancia en $X=[0,1)\times[0,1)$, tratar de visualizar la "forma" geométrica que se puede asociar a este espacio métrico. (Indicación: ¿Qué puntos están cerca de $[0,1)\times\{0\}$ o de $\{0\}\times[0,1)$?)

12. Definir dos topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sobre un conjunto X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología. Si $\mathcal{T}_i$ es una familia de topologías sobre X, probar que $\cap_i \mathcal{T}_i$ es también una topología sobre X. Demostrar que existe una topología que contiene a cada $\mathcal{T}_i$ y es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

12+1. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología en X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta en X.

14. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a,b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon)\times\{b\}\big)\cup\big(\{a\}\times(b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U$. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

15. Sea $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$ donde $G_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$.

(I) Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.
(II) ¿Es $\mathcal{T}$ una topología en $\mathbb{R}^2$ si "$k \in \mathbb{R}$"se sustituye por "$k \in \mathbb{N}$"?
(III) ¿y por "$k \in \mathbb{Q}$"?

16. En un conjunto X se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que bien U es vacío o bien U contiene a un punto prefijado $a \in X$. Estudiar si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

17. En un conjunto X se considera la familia $\mathcal{T}_\infty$ de todos los subconjuntos U de X tales que $X \setminus U$ es infinito, vacío o todo el espacio X. Estudiar si $\mathcal{T}_\infty$ es una topología en X.

18. Sea $\{p\}$ un punto que no pertenece a $\mathbb{R}$ y sea $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. Sea $\mathcal{T}$ la clase de los subconjuntos U de X tales que $U \subset \mathbb{R}$ o bien $X \setminus U$ es finito y está contenido en $\mathbb{R}$ o es vacío. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

19. Sean $\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{B}' = \{[a,b) : a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. **(a)** Probar que tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{B}'$ son bases para una topología en $\mathbb{R}$. La topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{B}$ se llama topología usual y $\mathcal{T}'$, la generada por $\mathcal{B}'$ se llama topología de Sorgenfrey (al par $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ se le llama *recta de Sorgenfrey*). **(b)** Probar que $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$.

20. En un conjunto se definen dos distancias d y d' que generan las topologías $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_{d'}$ respectivamente.

(I) Probar que la igualdad $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ es cierta si y sólo si las funciones $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, d')$ e $\mathrm{id} : (X, d') \to (X, d)$ son continuas (denotamos por $\mathrm{id}\,(x) = x$ la función identidad).

(II) Deducir de lo anterior que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ si y sólo si coinciden las sucesiones convergentes en (X, d) y (X, d').

21. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que $d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ es una métrica en X que genera la misma topología que d.

22. Sean (X, d) un espacio métrico y $\alpha > 0$. Probar que $d'(x, y) = \min\{\alpha, d(x, y)\}$ es una distancia que genera la misma topología que d.

23. Sea $\mathcal{B}$ la colección formada por todas las progresiones aritméticas no constantes $\{qn + a : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ y sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los números primos.

(I) Demostrar que $\mathcal{B}$ es base para una topología en $\mathbb{Z}$.

(II) Demostrar que $\{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto cerrado.

(III) Demostrar que, en general, todos los elementos de $\mathcal{B}$ son cerrados.

(IV) Demostrar que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ no es cerrado.

(V) Demostrar que $\cup_{p \in \mathcal{P}} \{pn : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

(VI) Deducir de los apartados anteriores que $\mathcal{P}$ es infinito.

24. Sean $\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ y $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

1. $\mathcal{B}_{-\infty} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$
2. $\mathcal{B}_{\infty} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$
3. $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_u\}$

Se pide:

(I) Demostrar que cada familia es base de una topología.

(II) Comparar esas topologías.

(III) Demostrar que la topología generada por la subbase $\mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{-\infty}$ es la usual.

(IV) Decir cuál de las anteriores topologías es Hausdorff.