EXAMEN FINAL DE TOPOLOGÍA, 2º MATEMÁTICAS

Martes, 13 de septiembre de 2005

Apellidos y Nombre:____

D.N.I.:____________________ **Grupo:**__________

---

1) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) En cualquier espacio topológico, un compacto es cerrado.

b) Si $\{I_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una colección de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $\bigcup_{\alpha\in J} I_\alpha = \mathbb{R}$, entonces es una base de cierta topología sobre $\mathbb{R}$.

c) $\mathrm{Int}\big(\mathrm{Int}(A)\big) = \mathrm{Int}(A)$.

d) $\mathbb{Q}$ es conexo en $\mathbb{R}$ con la cofinita.

---

2) Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $A = S^1 \cup \{(x,y) \ : \ x > 0\}$.

a) Obtener $\pi_1(A, a_0)$ con $a_0 \in A$.

b) Decidir justificadamente si A y S^1 son homeomorfos.

---

3) Resolver los siguientes apartados:

a) Demostrar que X es conexo si y sólo si para todo subconjunto no vacío $A \subsetneq X$ se cumple $\overline{A} \neq \mathrm{Int}(A)$.

b) Sea $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que existen $a, b \in S^1$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$. Demostrar que existen al menos dos puntos distintos $p, q \in S^1$ con $f(p) = f(q) = 0$.

c) Decidir razonadamente si es cierto o no que la imagen por una función continua de un espacio topológico conexo por caminos, es también conexa por caminos.

---

4) Sea X un espacio topológico.

a) Probar que si X es Hausdorff, entonces el conjunto $D = \{(x,x) \ : \ x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$ (con la topología producto).

b) Probar que si X es compacto y $f : X \longrightarrow X$ es continua, entonces su grafo $\Gamma = \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\}$ es compacto en $X \times X$ (con la topología producto).
