Soluciones del examen de Topología. Septiembre 2004

1) a) Hay que comprobar las tres propiedades de la distancia:

$a.1)$ $d(x,y) \geq 0,\ d(x,y)=0 \ \Leftrightarrow\ x=y.$

Es evidente, porque $|x|+|y| \geq 0$ y $|x|+|y|=0$ no puede cumplirse si x e y no son iguales y nulos.

$a.2)$ $d(x,y)=d(y,x)$.

Se sigue de la simetría de la función $f(x,y)=|x|+|y|$.

$a.3)$ $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

Si $x=y$ ó $y=z$, se reduce a $d(x,z) \leq d(x,z)$, mientras que si $x=z$ se sigue de $a.1$. Podemos por tanto suponer que x,y,z son distintos y, en ese caso, $a.3$ equivale a la desigualdad $|x|+|z| \leq |x|+|y|+|y|+|z|$, que se cumple siempre.

b) La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a l si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,l)=0. \tag{1}$$

Distingamos dos casos dependiendo del valor del posible límite:

Si $l\neq 0$ entonces sólo puede haber un número finito de términos de la sucesión distintos de l, ya que si hubiera infinitos, digamos $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, entonces

$$d(x_{n_k},l)=|x_{n_k}|+|l| \geq |l|$$

lo que contradice (1). Así pues las únicas sucesiones que convergen a $l\neq 0$ son las que son constantes a partir de cierto término.

Si $l=0$ entonces entonces $d(x_n,0)=|x_n|$ (incluso si $x_n=0$) y por tanto (1) se cumple con $l=0$ si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a cero en el sentido habitual.

2)

$a)$ Falso.

Por ejemplo, $[0,1]$ no es cerrado en la cofinita de $\mathbb{R}$ (su complementario no es abierto) pero sí es compacto (porque un abierto $\neq \emptyset$ recubre a $[0,1]$ salvo un número finito de puntos y basta elegir otros abiertos del recubrimiento que contengan a estos puntos).

$b)$ Verdadero.

Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un recubrimiento abierto de $A\cup B$, entonces también lo es de A y, por la compacidad, se pueden escoger $\mathcal{U}_{\alpha_j}$ con $A\subset \bigcup_{j=1}^{N}\mathcal{U}_{\alpha_j}$. De la misma forma, $B\subset \bigcup_{k=1}^{M}\mathcal{U}_{\beta_k}$, por tanto $\{\mathcal{U}_{\alpha_j}\}_{j=1}^{N}\cup\{\mathcal{U}_{\beta_k}\}_{k=1}^{M}$ es un subrecubrimiento finito de $A\cup B$.

$c)$ Falso.

Por ejemplo, con $X=Y=Z=\mathbb{R}$ (con la usual) se puede escoger $f(x)=1/x$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$; y $g=f$. Entonces $g\circ f(x)=x$ que es continua a pesar de que f y g no lo son.

$d)$ Falso.

La topología cofinita no tiene la propiedad de Hausdorff y todo espacio métrico sí la tiene: Si $x\neq y$, las bolas $B_\epsilon(x)$, $B_\epsilon(y)$ son disjuntas para $0<\epsilon<d(x,y)/2$ por la propiedad triangular ($z\in B_\epsilon(x)\cap B_\epsilon(y) \Rightarrow d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)<2\epsilon$).

3)

• A y B son homemorfos considerando $F : A \longrightarrow B$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in S^1 \\ (2-x,y) & \text{si } y=0,\ x \geq 0 \end{cases}$$

por el *Pasting Lemma* es continua (el único punto de A común a S^1 y a $y=0$ es $(1,0)$, por lo que ambas definiciones coinciden). Además F^{-1} tiene la misma fórmula que F, por tanto es continua igualmente. Geométricamente corresponde a dar media vuelta a la "manilla" de A alrededor de $(1,0)$.

• A (ó B) y C no son homeomorfos porque A es compacto (cerrado y acotado) mientras que C no lo es (no es cerrado).

• A (ó B) y D no son homeomorfos. Si existiera $H : D \longrightarrow A$ homemorfismo, $H^* : D - \{(0,0)\} \longrightarrow A - \{H(0,0)\}$, dado por la restricción de H, también lo sería. Pero esto es imposible porque $D - \{(0,0)\}$ tiene tres componentes conexas, y sea cual sea $H(0,0) \in A$, $A - \{H(0,0)\}$ tiene a lo más dos.

• C y D no son homeomorfos porque, como antes, D es compacto y C no lo es.

4) Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Como los cuadrados abiertos forman una base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$, para cada $\{x\} \times \{0\} \in [0,1] \times \{0\}$ existe un cuadrado $C_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \times (-\delta_x, \delta_x) \subset \mathcal{U}$. Evidentemente $\{C_x\}_{x \in [0,1]}$ es un recubrimiento de $[0,1] \times \{0\}$. Por la compacidad de este segmento, tiene un subrecubrimiento finito, digamos

$$[0,1] \times \{0\} \subset \bigcup_{j=1}^{N} C_{x_j} = \bigcup_{j=1}^{N} \big((x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}) \times (-\delta_{x_j}, \delta_{x_j}) \big) \subset \mathcal{U}.$$

Si $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$, se tiene $[0,1] \times (-\delta, \delta) \subset \mathcal{U}$, y basta escoger $\epsilon = \delta/2$ para deducir la conclusión deseada.

<u>Nota</u>: Sin usar la compacidad no se puede llegar al resultado. Por ejemplo, en el segmento no compacto $(0,1] \times \{0\}$ se podrían tomar $\mathcal{U}_i = B_{i/2}(i)$, $i \in (0,1]$, que no cumplen la conclusión del problema.