

TOPOLOGIA (Matemáticas) , Examen Final , Septiembre 2004

Apellidos, nombre

Grupo

1. (a) Demostrar que

$$d(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

define una distancia en \mathbb{R} .

(b) Encontrar una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números reales sea convergente con la distancia anterior.

2. Demostrar brevemente o dar un contraejemplo, según convenga:

a) Un conjunto compacto es siempre cerrado.

b) Si A y B son compactos, $A \cup B$ es compacto.

c) Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ no son continuas, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ tampoco es continua.

d) Existe una distancia en \mathbb{R} que induce la topología cofinita.

3. Estudiar si son homeomorfos los siguientes espacios:

$$A = S^1 \cup \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\} \quad B = S^1 \cup \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2\}$$

$$C = S^1 \cup \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t < 2\} \quad D = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$$

4. Supongamos que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ es una colección de abiertos de \mathbb{R}^2 que cubre el segmento $[0, 1] \times \{0\}$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $[0, 1] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.