Universidad Autónoma de Madriduniversidad
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOTA

Topología.
Segundo Curso de CC. Matemáticas. 6 de septiembre de 2003

Apellidos .... Nombre ....
D.N.I. .... Grupo ....

1. Sea $A = \{(x,y): \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\} \cup \{(1+1/n, y), \quad n \in N, \quad 0 < y < 1\} \cup \{(x,0): 1 < x < 2\}$.

a) Encontrar los conjuntos $int(A)$, $\bar{A}$ y ∂A (interior, cierre y frontera, respectivamente).

b) Estudiar si el conjunto A es conexo, si es conexo por caminos y si es compacto.

c) Estudiar las mismas cuestiones del apartado b) para el conjunto $\bar{A}$.

---

2. Sea X compacto y $\mathcal{C} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$ conjunto de funciones continuas tales que

i) Si f y g pertenecen a $\mathcal{C}$, entonces $f \cdot g \in \mathcal{C}$,

ii) Para todo $x \in X$ existe un entorno $U(x)$ y una función $f \in \mathcal{C}$ tal que $f \equiv 0$ en $U(x)$.

Demostrar que la función nula pertenece al conjunto $\mathcal{C}$.

---

3. Determinar, justificando la respuesta, cual de los siguientes espacios es homeomorfo a cual.

$$(0,+\infty), \qquad \mathbb{R}, \qquad S^1, \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad \left\{ \left(\frac{t}{t+1} \operatorname{sen} t, \frac{t}{t+1} \cos t \right) : t \in (0,+\infty) \right\}.$$

---

4. Dado (X,T) espacio topológico, caracterizar los subconjuntos $A \subseteq X$ que verifican que la función característica asociada a A, definida como

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in A, \qquad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in X \setminus A,$$

es continua cuando:

a) $X = \mathbb{R}$ y la topología considerada es la usual.

b) $X = \mathbb{R}$ y la topología considerada es la discreta.