Topología. 2^0 **curso de C.C. Matemáticas. U.A.M.** **07/09/2001**

Apellidos ____________________ Nombre __________ DNI ________ Grupo _

INSTRUCCIONES: POR FAVOR, NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN LA HOJA DE ENUNCIADOS; DÉJALA VISIBLE SOBRE LA MESA, JUNTO CON UN DOCUMENTO DE IDENTIDAD.

TIEMPO: 3 horas.

1.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos del espacio métrico E, tales que

$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset.$$

Probar que existen dos conjuntos abiertos U y V tales que $U \supset A$, $V \supset B$ y además $U \cap V = \emptyset$. *Sugerencia*: considerar la función

$$x \mapsto d(x, A) - d(x, B).$$

2.– Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de abiertos del plano tales que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - \delta \le x^2 + y^2 \le 1 + \delta\} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

3.– Sea $X = \{(r \operatorname{sen}(1/r), r \cos(1/r) \ : \ r \in]0, 1]\} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Demostrar que X, con la topología heredada de la usual del plano, es homeomorfo a $[0, 1]$.

4.– Contestar a los siguientes apartados:

a) Definición de **espacio recubridor** y **aplicación recubridora**.

b) Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ y sea $\widetilde{X} =]1, 2[\times \mathbb{R}$. Se define la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \to & X \\ (r, \vartheta) & \mapsto & (r \cos\vartheta, r \operatorname{sen}\vartheta) \end{array}$$

Demostrar que se trata de una aplicación recubridora.

c) Utilizar el apartado anterior para calcular el grupo fundamental $\pi_1(X)$.

En cada uno de los problemas se han de enunciar con claridad los principios teóricos o las propiedades utilizadas, explicando porqué son aplicables a la situación concreta de que se trate.
