TOPOLOGIA (Matemáticas) , Examen Final , Febrero 1999

Apellidos, nombre Grupo

1. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ las colecciones de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ de longitud menor o igual que 7 y de longitud igual a 7, respectivamente.

(i) Estudiar si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de alguna topología y, en caso afirmativo, decir de cuál.

(ii) Si una topología sobre $\mathbb{R}$ contiene a todos los intervalos cerrados de longitud 7, ¿qué topología es?

2. Sea $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup (-2, -1)$. Hallar $\mathrm{int}(A)$, $\overline{A}$ y A' en las topologías usual, del límite inferior (o de Sorgenfrey) y cofinita.

3. Decir por qué ninguno de los tres siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a otro

4. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso afirmativo, dar una pequeña demostración y, en otro caso, dar un contraejemplo.

(i) Si K es compacto entonces $K \cup \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ es compacto.

(ii) Si X tiene dos componentes conexas $X = C_1 \cup C_2$ entonces $\mathrm{Fr}(C_1) = \mathrm{Fr}(C_2) = \emptyset$ (Nota: $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cup \overline{X \setminus A}$).

(iii) Si la sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ es convergente entonces el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

5. Calcular el grupo fundamental del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:
$X = \{z = 0\} \cup \{(\cos t, 0, \sin t) : t \in [0, \pi]\}$.