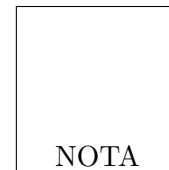


Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



Topología.

Segundo Curso de CC. Matemáticas. 6 de junio de 2003

Apellidos..... Nombre.....
D.N.I. Grupo

1. Sean (X, d) un espacio métrico, \mathcal{T}_d la topología asociada y $B(x, r)$ la bola abierta de centro x y radio r .

a) Probar que si $y \in X$ satisface $x \in B(y, r/2)$ entonces $B(y, r/2) \subset B(x, r)$.

b) Si B_n es la familia de todas las bolas de radio $1/n$ y $\mathbf{B} = \bigcup_n B_n$, probar que \mathbf{B} es base de la topología \mathcal{T}_d .

c) Si X es compacto, entonces (X, \mathcal{T}_d) es segundo axioma.

2. a) Dado $X = \{a, b, c, d\}$, analizar si es posible construir, en cada caso, una topología no trivial en X que verifique:

(i) Existe una sucesión en X que tiene varios límites.

(ii) El espacio topológico X es T_2 y la topología no es la discreta.

Las respuestas deben justificarse con una demostración, ejemplo o contraejemplo, según convenga.

b) Analizar las afirmaciones anteriores cuando $X = \mathbb{R}$ con la topología \mathcal{T}_l (del límite inferior o de Sorgenfrey) y con la topología cofinita.

3. Decidir si \mathbb{R} es homeomorfo a alguno de los dos siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

$$G = \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(x, x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

$$F = \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

4. a) Demostrar que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ son homeomorfos y que todo homeomorfismo $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ verifica $h(\{a, b\}) = \{c, d\}$.

b) Demostrar que el disco unidad $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ es homeomorfo al disco $D_1 = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ pero que no existe ningún homeomorfismo h entre ambos discos que tenga al origen como punto fijo.