Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOTA

Topología.
Segundo Curso de CC. Matemáticas. 6 de junio de 2003

Apellidos.. Nombre.........................
D.N.I. .... Grupo ....

1. Sean (X,d) un espacio métrico, $\mathcal{T}_d$ la topología asociada y $B(x,r)$ la bola abierta de centro x y radio r.
a) Probar que si $y \in X$ satisface $x \in B(y,r/2)$ entonces $B(y,r/2) \subset B(x,r)$.
b) Si B_n es la familia de todas las bolas de radio $1/n$ y $\mathbf{B} = \bigcup_n B_n$, probar que $\mathbf{B}$ es base de la topología $\mathcal{T}_d$.
c) Si X es compacto, entonces $(X,\mathcal{T}_d)$ es segundo axioma.

---

2. a) Dado $X = \{a,b,c,d\}$, analizar si es posible construir, en cada caso, una topología no trivial en X que verifique:

(i) Existe una sucesión en X que tiene varios límites.

(ii) El espacio topológico X es T_2 y la topología no es la discreta.

Las respuestas deben justificarse con una demostración, ejemplo o contraejemplo, según convenga.

b) Analizar las afirmaciones anteriores cuando $X = \mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ (del límite inferior o de Sorgenfrey) y con la topología cofinita.

---

3. Decidir si $\mathbb{R}$ es homeomorfo a alguno de los dos siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$G = \{(0,0)\} \cup \left\{ (x, x \text{ sen} \frac{1}{x}) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

$$F = \{(0,0)\} \cup \left\{ (x, \text{sen} \frac{1}{x}) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

---

4. a) Demostrar que los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ son homeomorfos y que todo homeomorfismo $h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ verifica $h(\{a,b\}) = \{c,d\}$.

b) Demostrar que el disco unidad $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ es homeomorfo al disco $D_1 = \{(x-1)^2+y^2 \leq 1\}$ pero que no existe ningún homeomorfismo h entre ambos discos que tenga al origen como punto fijo.