Topología. 2^0 **curso de C.C. Matemáticas. U.A.M.** **27/06/2001**

NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS; LAS NOTAS SALEN EL DÍA 29 DE JUNIO; LA REVISIÓN DE EXAMENES ES EL DÍA 9 DE JULIO A LAS 12H EN C-XV-102

TIEMPO: 3 horas.

1.– Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se pide:

a) Considérese $x \in X$, $D = \{x\}$. Probar que D es denso en X (es decir, $\overline{D} = X$) si y sólo si x pertenece a la intersección de todos los abiertos no vacíos de X.

b) Si X es Hausdorff, $A \subset X$ y $x \in A$, demostrar que $A' = (A \setminus \{x\})'$.

2.– Responder a las siguientes cuestiones:

a) Explicar con precisión los conceptos de **espacio conexo** y **espacio localmente conexo**.

b) Sea

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q}, -1 \leq y \leq 0\}.$$

Demostrar que X (con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$) es conexo pero no es localmente conexo.

3.– Sean la circunferencia y el ocho dados por

$$\begin{aligned} X &= \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}, \\ Y &= \{(-1 + \cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\} \cup \{(1 + \cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Considérese la relación de equivalencia en X dada por $(1, 0) \sim (-1, 0)$. Demostrar que

$$\begin{aligned} f : \quad & X \rightarrow Y \\ (\cos t, \sin t) & \mapsto \begin{cases} (-1 + \cos 2t, \sin 2t), & t \in [0, \pi] \\ (1 + \cos(2t - \pi), \sin(2t - \pi)), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

induce un homeomorfismo de $X/\sim$, con la topología cociente, en Y.

4.– Se consideran los siguientes subconjuntos del plano:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Se pide:

a) Determinar los grupos de homotopía de los siguientes subespacios del plano con su topología usual: A, B, $C \setminus \overset{\circ}{A}$.

b) Estudiar si algunos de los espacios de la lista del apartado a) son homeomorfos.