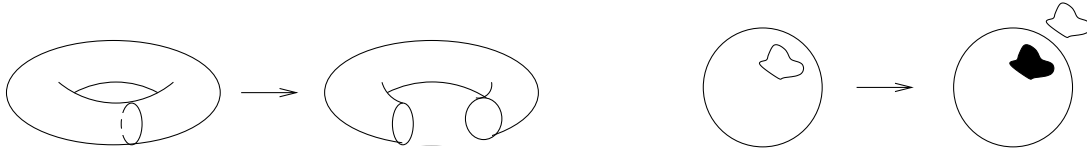


## 5. El Grupo Fundamental

### Topología y grupos: una combinación explosiva

Podríamos pensar en generalizar la manera en la que habíamos probado que algunos espacios no eran homeomorfos suprimiendo ahora curvas de un espacio y estudiando la conexión del resultado. Por ejemplo, para ver que  $T^2$  (la superficie de una rosquilla) y  $S^2$  no son homeomorfos, podríamos suprimir un meridiano en  $T^2$ , con lo cual sigue de una pieza, y sea cual sea su imagen en  $S^2$  seguro que descompone la superficie esférica en dos trozos.



Sobre el papel puede que sea un buen proyecto, pero es difícil de formalizar. Aunque parezca increíble, es muy complicado probar que una curva cerrada sin autointersecciones determina dos regiones en  $S^2$  (éste es el famoso *Teorema de separación de Jordan*, enunciado por C. Jordan en 1893 y probado completamente por O. Veblen en 1905). De todos modos esta idea tiene gran importancia porque dio lugar, en manos de E. Betti y sobre todo de H. Poincaré, al nacimiento de los llamados grupos de homología (nada que ver con las homología de la Geometría Proyectiva) y a la reducción de problemas topológicos a otros combinatorios.

Resulta que una idea aparentemente equivalente es mucho más asequible: estudiar los “lazos” que se pueden hacer con curvas dentro del espacio considerado. Por ejemplo, en  $T^2$  un meridiano y un paralelo parecen esencialmente diferentes, esto es, uno no se puede deformar en el otro, sin embargo en  $S^2$  parece que cualquier par de curvas de goma se podrían transformar la una en la otra (para transformar un meridiano en otro basta un giro). En el desarrollo de esta idea se asignará un grupo de “lazos” a cada espacio topológico, de manera que a veces se podrán traspasar algunos problemas de la Topología a la Teoría de Grupos, originándose una rama de las Matemáticas llamada *Topología Algebraica* (que aquí será más bien *Topología algebraica*).



**DEFINICIÓN:** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Se dice que  $\alpha$  es un lazo con base en  $x_0$  si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  es una función continua con  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ . En este caso al lazo determinado por  $\alpha(1 - t)$  se le llama lazo inverso y se suele escribir  $\bar{\alpha}$ .

**Notación:** Denotaremos mediante  $c_{x_0}$  el lazo constante  $c_{x_0}(t) = x_0$ .

Ejemplo: Considerando el lazo con base en  $(1, 0)$ ,  $\alpha = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$ , se tiene que  $\bar{\alpha} = (\cos(2\pi t), -\text{sen}(2\pi t))$ . Y considerando  $\beta = (\cos(2\pi t^2), \text{sen}(2\pi t^2))$  se deduce  $\bar{\beta} = (\cos(2\pi(t^2 - 2t)), \text{sen}(2\pi(t^2 - 2t)))$ .

Tanto  $\alpha$  como  $\beta$  representan una circunferencia recorrida una vez en sentido antihorario, mientras que  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$  la recorren en sentido horario. Nótese que al representar un lazo por su imagen (su dibujo) no vemos, entre otras cosas, la dirección y la velocidad con que se recorre.

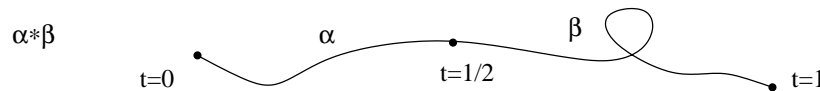
Una propiedad fundamental de los lazos es que se pueden “componer” poniendo uno a continuación de otro. A pesar de que la terminología es la misma, no tiene que ver con la composición de funciones.

DEFINICIÓN: Dados dos lazos  $\alpha, \beta$  con base en  $x_0$ , se define su composición como

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observación: Los caminos, esto es, funciones continuas  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ , también se pueden componer siempre que  $\alpha(1) = \beta(0)$  y se pueden definir sus caminos inversos de la misma forma que en el caso de los lazos. Cada vez que compongamos dos caminos daremos por supuesto, por tanto, que ya hemos verificado que el extremo final del primero coincide con el origen del segundo.

Como ya mencionamos, la continuidad de la composición está asegurada por el *Pasting Lemma*. Nótese que hay que escribir  $2t$  y  $2t - 1$  para que  $\alpha$  y  $\beta$  se recorran el doble de rápido (en el primer medio segundo y en el segundo medio segundo, respectivamente) y así  $\alpha * \beta$  se recorra en el tiempo unidad.



Como cabía esperar, que un lazo sea deformable en otro recibe un nombre raro, y ya están ocupados *isomorfismo*, *homomorfismo* y *homeomorfismo*.

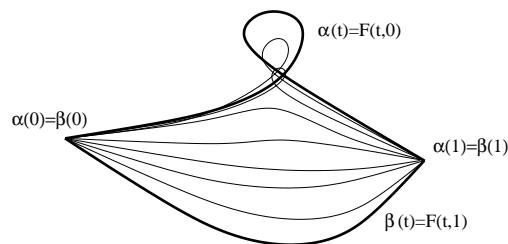
DEFINICIÓN: Sea  $X$  un espacio topológico y  $\alpha$  y  $\beta$  dos lazos con el mismo punto base o dos caminos con  $\alpha(0) = \beta(0)$ ,  $\alpha(1) = \beta(1)$ . Se dice que  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  es una homotopía y que  $\alpha$  es homótopo a  $\beta$  si  $F$  es continua y

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t), & F(t, 1) &= \beta(t) & \text{para todo } t \in [0, 1] \\ F(0, s) &= \alpha(0), & F(1, s) &= \beta(1) & \text{para todo } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ejemplo: En  $\mathbb{R}^n$  cualquier par de lazos o caminos como antes son homótopos por medio de la combinación convexa

$$F(t, s) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t).$$

De alguna forma, una homotopía se comporta con las curvas como esos programas de ordenador que permiten transformar poco a poco una imagen en otra, o elaborar la película de la evolución transformando a la mona Chita en cualquier *top-model* del momento.



Nótese que las homotopías no son únicas: puede haber multitud de maneras de transformar  $\alpha$  en  $\beta$  y para nuestros propósitos será indiferente conocer la fórmula explícita de estas transformaciones. Sólo queremos saber si  $\alpha$  se puede verdaderamente transformar en  $\beta$ , pero no cómo. Esto aparecerá reflejado claramente en la definición de *grupo fundamental*

*No me desagradaba ver algo en movimiento; me apartaba de todas aquellas existencias inmóviles que me miraban como con ojos fijos. Me decía, siguiendo el balanceo de las ramas: los movimientos nunca existen del todo, son pasos intermedios entre dos existencias, tiempos débiles.*

Es importante notar que los lazos pueden tener autointersecciones y que partes de ellos pueden colapsar a un punto por el proceso de homotopía, ya que para cada  $s$  fijo,  $F(\cdot, s)$  es continua pero no necesariamente un homeomorfismo. Por ejemplo, considerando los nudos en  $\mathbb{R}^3$ , que son los lazos homeomorfos a  $S^1$ , con el mismo punto base; todos ellos son homótopos según el ejemplo anterior y sin embargo, como mencionamos en el tercer capítulo acerca de  $S^1$  y el nudo trébol, típicamente no es posible en  $\mathbb{R}^3$  deshacer un nudo en otro sin romperlo. La homotopía correspondiente deberá crear autointersecciones y colapsar lazadas. El estudio de los nudos esencialmente diferentes que se pueden construir en  $\mathbb{R}^3$  constituye una bella parte de la Topología Algebraica llamada Teoría de Nudos (no confundir con la Teoría di Nudi al contárselo a nuestros amigos italianos).

Después de leerlo algunas veces, el siguiente resultado debiera ser evidente o al menos natural para todos. La demostración se incluye para practicar con estos conceptos.

**Lema 5.1:** *La relación de homotopía entre lazos, o caminos con los mismos extremos, es una relación de equivalencia.*

Dem.: 1)  $\alpha$  es homótopo a sí mismo por la homotopía  $F(t, s) = \alpha(t)$ .

2) Si  $F(t, s)$  es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $F(t, 1 - s)$  lo es entre  $\beta$  y  $\alpha$ .

3) Si  $F(t, s)$  es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$  y  $G(t, s)$  es otra entre  $\beta$  y  $\gamma$ , entonces

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(t, 2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\gamma$ . ■

Notación: Normalmente escribiremos  $[\alpha]$  para denotar la clase de equivalencia de  $\alpha$ . Nótese que si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son homótopos entre sí y  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son homótopos entre sí, entonces  $\alpha_1 * \beta_1$  y  $\alpha_2 * \beta_2$  también lo son (para cada  $s$  fijo las homotopías definen sendos caminos, basta componerlos). Así pues podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Apelando a un ejemplo conocido, esto es lo mismo que se hacía en las clases de restos módulo  $n$  en que  $\bar{x} \cdot \bar{y}$  se definía como  $\overline{x \cdot y}$  y no dependía de los representantes elegidos: módulo 5 se tiene  $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{7} \cdot \bar{8} = \bar{56} = \dots$

Vamos por fin a la definición estrella de este capítulo (que se debe a H. Poincaré en las postrimerías del siglo XIX).

**DEFINICIÓN:** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $x_0 \in X$ . Se llama grupo fundamental de  $X$  relativo al punto base  $x_0$  y se denota con  $\pi_1(X, x_0)$  al conjunto de clases de equivalencia de lazos con base en  $x_0$  bajo la relación de homotopía, dotado con la operación composición.

Quitando *rollo*: el grupo fundamental está formado por todos los posibles lazos no homótopos con base en  $x_0$ .

Parece claro que si añadimos  $\gamma$  después de  $\alpha * \beta$  es lo mismo que (homótopo a) añadir  $\beta * \gamma$  después de  $\alpha$ , y que  $c_{x_0} * \alpha$  es lo mismo que  $\alpha$  y que  $\alpha * \bar{\alpha}$  es lo mismo que  $c_{x_0}$ . En definitiva que  $\pi_1(X, x_0)$  es realmente un grupo. Todo esto parece muy fácil pero cuando uno mira la demostración es realmente impenetrable e imposible de recordar, por ello merece la pena complementarla o sustituirla por la idea general que subyace.

*Cuando queremos comprender una cosa, nos situamos frente a ella. Solos, sin ayuda, de nada podría servir todo el pasado del mundo. Y después la cosa desaparece y lo que hemos comprendido desaparece con ella.*

*Las ideas generales son algo más halagador. Y además, los profesionales y los mismos aficionados acaban siempre por tener razón.*

Esencialmente lo que ocurre es que al componer caminos se introducen “cambios de velocidad” y necesitamos una homotopía correctora para controlarlos. Por ejemplo, en  $(\alpha * \beta) * \gamma$ ,  $\gamma$  ocupa la mitad del tiempo y  $\alpha$  la mitad de la mitad, mientras que en  $\alpha * (\beta * \gamma)$  es a la inversa, con lo cual la homotopía correspondiente debe acelerar gradualmente  $\gamma$  y lentificar  $\alpha$ . Lo alambicado de las homotopías involucradas complica la demostración, la cual sugerimos saltar en una primera lectura (y no aconsejamos más).

**Proposición 5.2:** *El grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  es realmente un grupo, esto es*

- 1)  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$
- 2)  $[\alpha] * [c_{x_0}] = [c_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha]$
- 3)  $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [\bar{\alpha}] * [\alpha] = [c_{x_0}]$ .

Nota: Para recordar la definición de grupo, véase el final de la sección.

Dem.: 1) Tenemos que probar que  $\alpha * (\beta * \gamma)$  es homótopo a  $(\alpha * \beta) * \gamma$ , para ello basta definir la homotopía llovida del cielo

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t - s - 1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t - s - 2}{2 - s}\right) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y comprobar (ejercicio mecánico) que

$$F(\cdot, 0) = \alpha * (\beta * \gamma), \quad F(\cdot, 1) = (\alpha * \beta) * \gamma.$$

2) Considerando

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{2-s}\right) & 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ x_0 & \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

se tiene que  $\alpha$  (tómese  $s = 0$ ) y  $\alpha * c_{x_0}$  (tómese  $s = 1$ ) son homótopos. Un razonamiento simétrico cambiando en la fórmula anterior  $t$  por  $1 - t$  y  $\alpha$  por  $\bar{\alpha}$  prueba que  $\alpha$  y  $c_{x_0} * \alpha$  también lo son.

3) Definiendo

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2ts) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2s(1-t)) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

se tiene  $F(t, 0) = c_{x_0}(t)$  y  $F(t, 1) = (\alpha * \bar{\alpha})(t)$ , de donde  $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [c_{x_0}]$ . Cambiando  $t$  por  $1 - t$  se tiene  $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [c_{x_0}]$ . ■

Ejemplo: Como en  $\mathbb{R}^n$  todos los lazos son homótopos entre sí, para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ . Es decir, es el grupo trivial, el que sólo tiene un elemento. Podemos escribir  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{e\}$ ,  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{0\}$ .

Como sólo lo hemos escrito de tres formas diferentes veamos una más.

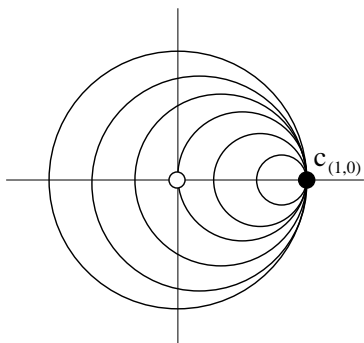
DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico,  $X$ , es simplemente conexo si es conexo por arcos y  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial.

Observación: Más adelante veremos que esta definición no depende de  $x_0$ .

Ejemplo:  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo. Además la homotopía “universal”

$$F(t, s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$$

sirve para demostrar que, en general, cualquier subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo.



Un error típico es usar demasiado la homotopía anterior. Nótese que una homotopía no puede salirse del espacio que estemos considerando y si un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  no es convexo no podemos usar  $F(t, s)$  como antes. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  al intentar pasar el lazo  $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  a  $c_{(1,0)}$  parece que, cualquiera que sea la homotopía, tenemos que pasar obligatoriamente por  $(0, 0)$  y salirnos del espacio. Si esto es cierto,  $\alpha$  y  $c_{(1,0)}$  no son homótopos y  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  no es simplemente conexo.

Ejemplo (otra vez lo mismo): Si  $q \in S^n$ ,  $S^n - \{q\}$  es simplemente conexo. Tomando como  $q$  el polo norte (si no lo es hacemos que lo sea con un giro) como la proyección

estereográfica  $p : S^n - \{q\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo, podemos pasar un lazo en  $S^n - \{q\}$  a uno en  $\mathbb{R}^n$ , contraerlo a  $c_{x_0}$  y después volver a  $S^n - \{q\}$ .

Del ejemplo anterior se tiene que todo lazo  $\alpha$  en  $S^n$  tal que  $\text{Im } \alpha \neq S^n$  es homótopo al lazo constante. Parece obvio que para  $n > 1$  no hay lazos con  $\text{Im } \alpha = S^n$ . Parece obvio pero no lo es, de hecho existen y por culpa de esos dichos lazos la demostración de que  $S^n$ ,  $n > 1$ , es simplemente conexo se complica bastante de manera que no entran muchas ganas de escribirla y dejaremos algún sencillo detalle al lector.

*Te quejas porque las cosas no se disponen a tu alrededor como un ramillete de flores, sin tomarte la molestia de hacer nada.*

Esencialmente probaremos que cualquiera de los lazos “malos” es homótopo a uno “bueno”.

**Proposición 5.3:** *Si  $n > 1$ ,  $S^n$  es simplemente conexo.*

Dem.: Recuérdate que

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Los abiertos  $\mathcal{U}_1 = S^n \cap \{x_{n+1} > -1/2\}$  y  $\mathcal{U}_2 = S^n \cap \{x_{n+1} < 1/2\}$  son subconjuntos de  $S^n$  simplemente conexos (ejercicio, utilícese la estereográfica).

Sea  $\alpha$  un lazo con  $\alpha(0) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  (siempre podemos suponer que éste es el caso por simetría). Para empezar (que nadie se asuste) aplicamos el lema del número de Lebesgue al recubrimiento  $\alpha^{-1}(\mathcal{U}_1) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{U}_2)$  para encontrar  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$  con  $t_{j+1} - t_j < \delta$  tales que  $\alpha(t) \in \mathcal{U}_1$  o  $\alpha(t) \in \mathcal{U}_2$  si  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ . Quizá eliminando y reenumerando algunos de los  $t_j$  conseguimos que la imagen de  $[t_j, t_{j+1}]$  por  $\alpha$  esté alternativamente en  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2$  (Ejercicio: escribir todo esto con detalle). Así que definiendo

$$\alpha_j(t) = \alpha((1-t)t_j + t t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

se tiene  $\text{Im } \alpha_0 \subset \mathcal{U}_1$ ,  $\text{Im } \alpha_1 \subset \mathcal{U}_2$ ,  $\text{Im } \alpha_2 \subset \mathcal{U}_1, \dots$  etc. Sean  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \dots$  caminos en  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  conectando  $\alpha_1(0)$  con  $\alpha_1(1)$ ,  $\alpha_3(0)$  con  $\alpha_3(1)$ ,  $\alpha_5(0)$  con  $\alpha_5(1), \dots$  (su existencia está asegurada por la conexión por caminos de  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ). Como los caminos  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$  y  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \dots$  están incluidos en  $\mathcal{U}_2$  y tienen los mismos extremos es fácil ver que existen homotopías  $F_1, F_3, F_5, \dots$  entre ellos (ejercicio, de hecho en cualquier simplemente conexo todos los caminos con los mismos extremos son siempre homótopos). Consideremos finalmente

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [t_{2j}, t_{2j+1}] \\ F_{2j-1}\left(\frac{t - t_{2j-1}}{t_{2j} - t_{2j-1}}, s\right) & \text{si } t \in [t_{2j-1}, t_{2j}]. \end{cases}$$

Entonces  $F$  es una homotopía entre  $\alpha$  y un camino  $\beta$  con  $\text{Im } \beta \subset \mathcal{U}_1$ . Como  $\mathcal{U}_1$  es simplemente conexo, se tiene  $[\alpha] = [c_{x_0}]$ . ■

Observación: Nótese que en la demostración anterior no se utilizan propiedades muy específicas de  $S^n$ , lo cual sugiere alguna generalización que mencionaremos en una sección posterior.

¿Que alguien ha llegado hasta aquí y no sabe nada de grupos? Bueno... puede consultar este brevísimo

## APÉNDICE DE TEORÍA DE GRUPOS:

DEFINICIÓN: Un grupo  $(G, *)$ , es un conjunto  $G$  dotado con una operación (una función)  $*$  :  $G \times G \longrightarrow G$  con las siguientes propiedades:

- 1) Asociativa:  $g_1, g_2, g_3 \in G \Rightarrow (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ .
- 2) Elemento neutro: Existe  $e \in G$  tal que  $g * e = e * g = g$  para todo  $g \in G$ .
- 3) Elemento inverso: Para cada  $g \in G$  existe  $g^{-1} \in G$  tal que  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ .

Además, si se cumple

- 4) Conmutativa:  $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ .

se dice que el grupo es abeliano o conmutativo.

Con las operaciones y conjuntos que solemos manejar, la obstrucción para ser grupo suele radicar en la tercera propiedad, esto es, en que la operación que utilizemos no se pueda *deshacer*.

Ejemplo:  $\mathbb{Z}$  con la suma (es decir,  $*$  = +) es un grupo abeliano. El elemento neutro es cero y el inverso de  $n$  es  $-n$  porque  $n + (-n) = 0$ .

Ejemplo:  $\mathbb{Z}$  con la multiplicación tiene elemento neutro, el 1, pero no es un grupo porque, por ejemplo, 3 no tiene inverso ( $3 \cdot x = 1$  no tiene solución en  $\mathbb{Z}$ ). De otra forma,  $2 \cdot 3 = 6$  pero no podemos *deshacer* la operación pasando el 6 al 3 multiplicando por un entero.

Ejemplo: Las matrices reales cuadradas  $n \times n$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , no forman un grupo con la multiplicación porque hay matrices que no tienen inversa. Sin embargo las matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  con determinante no nulo,  $GL_n(\mathbb{R})$ , sí forman un grupo con la multiplicación. Este grupo no es abeliano, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación: Los grupos  $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$  son muy generales porque contienen como subgrupos (grupos dentro de ellos) copias de todos los grupos finitos (abelianos y no abelianos) y muchos de los infinitos. Por ejemplo, si cambiamos de nombre a los elementos de  $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  de la siguiente forma:

$$\bar{0} \leftrightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{1} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \bar{2} \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

entonces  $(\mathbb{Z}_3, +)$  es lo mismo que  $(G, \cdot)$  donde  $G = \{I, A, B\}$  y cualquier igualdad en el primer grupo se transforma en otra equivalente en el segundo grupo y viceversa. De esta manera  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$ ,  $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$  y  $\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ , corresponden respectivamente a  $A \cdot A = B$ ,  $A \cdot B = I$  y  $A \cdot A \cdot A = I$ .

Este proceso de cambiar los nombres de los elementos (y quizá de la operación de grupo) para obtener otro grupo, se llama isomorfismo.

DEFINICIÓN: Dados dos grupos  $(G, *)$  y  $(G', \cdot)$ , se dice que son isomorfos si existe una función biyectiva  $f : G \rightarrow G'$  tal que  $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$  para todo  $g_1, g_2 \in G$ .

En general se emplea una notación “rococó” para nombrar a las funciones que se comportan bien con respecto a la operación de grupo (que pasan “productos en productos”).

DEFINICIÓN: Sean  $(G, *)$  y  $(G', \cdot)$ , dos grupos. Se dice que  $f : G \rightarrow G'$  es un homomorfismo si satisface  $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$  para todo  $g_1, g_2 \in G$ . Además se dice que es un monomorfismo si es un homomorfismo inyectivo y que es un epimorfismo si es un homomorfismo sobreyectivo.

DEFINICIÓN: Se llama núcleo de un homomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  al conjunto

$$\text{Ker } f = \{g \in G : f(g) \text{ es el elemento neutro de } G'\}.$$

Observación: Esta definición es una generalización de la usada en Álgebra Lineal y, como allí, se cumple que  $f$  es inyectiva (monomorfismo, en nuestro caso) si y sólo si  $\text{Ker } f$  es el elemento neutro (nótese que los homomorfismos siempre envían el neutro en el neutro).

Ejemplo:  $(\mathbb{R}, +)$  y  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  son isomorfos por medio de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida como  $f(x) = e^x$ .

Ejemplo:  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_9$  dada por la suma de las cifras módulo 9, es un homomorfismo pero no es monomorfismo porque, por ejemplo  $f(103) = \bar{4} = f(67)$  o porque  $f(306) = \bar{0}$  implica  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ .

Ejemplo: Consideremos los grupos  $(\mathbb{Z}, +)$  y  $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$  y la función

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{con } f(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces  $f$  es homomorfismo porque  $f(n + m) = f(n) \cdot f(m)$  y evidentemente no es sobreyectiva pero sí inyectiva, es decir, es monomorfismo pero no epimorfismo.

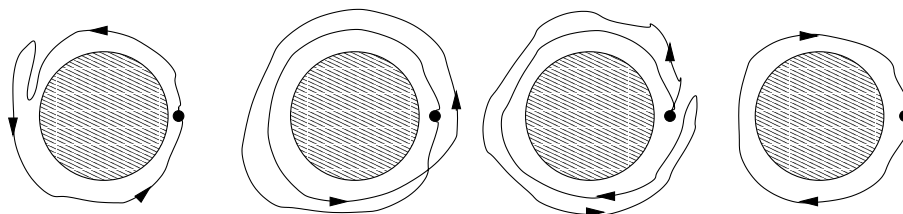


## La recta real se enrolla

Toda esta sección está dedicada a hallar un grupo fundamental no trivial. El espacio a considerar no podía ser otro que el más perfecto, la musa y *miss* de las Matemáticas: la circunferencia.

[...] *el mundo de las explicaciones y razones no es el de la existencia. Un círculo no es absurdo: se explica por la rotación de un segmento de recta en torno a uno de sus extremos. Pero un círculo no existe.*

Antes de nada vamos a tratar de intuir el resultado. Para verlos mejor, dibujemos los lazos en  $S^1$  un poco separados de  $S^1$  o pensemos que son “nudos” alrededor de una barandilla.



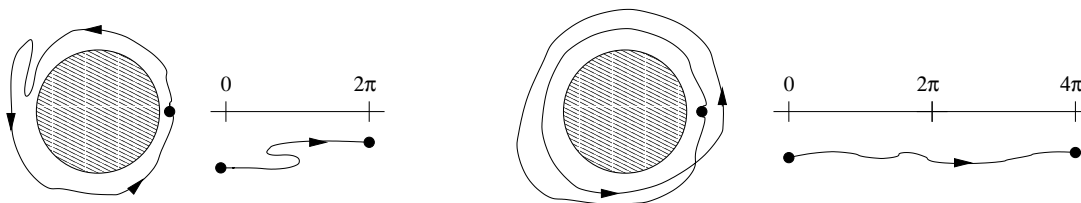
Cada uno de los lazos dibujados parece que no se puede deformar en ninguno de los otros. Si nos mandasen explicar por qué, diríamos que el primero da una vuelta, el segundo dos, el tercero parece que va a dar una pero después se arrepiente y no da ninguna (es homótopo la lazo constante) y el cuarto da menos una vuelta (una vuelta en sentido negativo). Esto sugiere que los lazos en  $S^1$ , salvo homotopías, están caracterizados por el número de vueltas que dan, esto es, tenemos una biyección

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, x_0) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\longmapsto \text{n}^\circ \text{ de vueltas de } \alpha \end{aligned}$$

que de hecho es un isomorfismo, cuando en  $\mathbb{Z}$  se considera la suma, porque al componer un camino que da  $n$  vueltas con otro que da  $m$ , obtenemos un tercero que da  $n + m$  vueltas.

La principal dificultad está en definir rigurosamente el número de vueltas. Un primer intento podría ser contar cuántas veces pasa el lazo por el punto base, pero esto no es adecuado porque siempre podemos, como en el tercer ejemplo, pasar varias veces y después volver para atrás. Habría que tener en cuenta la dirección en la que se pasa por el punto base, pero sin saber si se tiene una derivada no nula, esto es imposible.

La idea que funciona es cortar el lazo por el punto base y *desenrollarlo* sobre  $\mathbb{R}$ .



Si comenzamos a desenrollar en 0, acabaremos en  $2\pi \cdot n^\circ$  de vueltas.

Nuestra primera y principal tarea en esta sección será dar sentido matemático a desenrollar un lazo para llegar a una definición rigurosa del número de vueltas en la demostración

del Teorema 5.6. Con ello probar, por ejemplo que el primer y el tercer lazo de los antes citados no son homótopos es tan complicado como el aserto del maestro peripatético: “Una vez no es ninguna vez”. Llegar al isomorfismo  $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$  sólo requiere ir un poco más allá.

La razón última por la que los lazos en  $S^1$  se pueden desenrollar en  $\mathbb{R}$  es que  $\mathbb{R}$  y  $S^1$  son localmente (en intervalos pequeños) iguales (homeomorfos) y que existe una función,  $p(x) = (\cos x, \sin x)$  que permite *enrollar* todo  $\mathbb{R}$  en  $S^1$ .

**DEFINICIÓN:** Sean  $X$  y  $E$  espacios topológicos y sea  $p : E \rightarrow X$  continua y sobreyectiva. Se dice que  $p$  es una proyección recubridora y que  $E$  es un espacio recubridor de  $X$  si para todo  $x \in X$  existe un entorno  $\mathcal{U}(x)$  con  $p^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \bigcup \mathcal{V}_\alpha$  donde  $\mathcal{V}_\alpha$  son abiertos disjuntos en  $E$  tales que  $p|_{\mathcal{V}_\alpha} : \mathcal{V}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}(x)$  es un homeomorfismo.

Ejemplo (En realidad, El Ejemplo):  $\mathbb{R}$  es un espacio recubridor de  $S^1$  con proyección recubridora  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = (\cos x, \sin x)$ .

Es obvio que  $p$  es continua y sobreyectiva. Comprobemos la definición para  $x = (1, 0) \in S^1$ . Los otros casos son similares. Tomemos en  $S^1$  el abierto  $\mathcal{U} = S^1 \cap \{x > 0\}$ , entonces

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_n.$$

Cada uno de estos intervalos es abierto en  $\mathbb{R}$  y homeomorfo por  $p$  a  $\mathcal{U}$  porque  $\mathcal{U}$  se puede escribir en polares como  $(-\pi/2, \pi/2)$  y  $p|_{\mathcal{V}_n}$  es simplemente  $t \mapsto t - 2\pi n$ .

Ejemplo:  $\mathbb{R}^+$  no es un espacio recubridor de  $S^1$  con  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow S^1, p(x) = (\cos x, \sin x)$ .

Tomando como antes  $\mathcal{U} = S^1 \cap \{x > 0\}$ , se tiene

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = [0, \frac{\pi}{2}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \mathcal{V}_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n.$$

Pero  $\mathcal{V}_0 = [0, \pi/2)$  no puede ser homeomorfo por  $p$  a  $\mathcal{U}$ . Una manera rápida de probarlo sin mirar a  $p$  es decir que  $\mathcal{V}_0 - \{0\}$  es conexo pero  $\mathcal{U} - \{\text{cualquier punto}\}$  no lo es.

Ahora vamos a hacer un *lifting* a los caminos en  $S^1$  para estirarlos sobre  $\mathbb{R}$ . Esto tiene su gracia, aunque sea poca, porque el término *elevación* en la siguiente definición es la traducción de *lifting* en la terminología anglosajona.

**DEFINICIÓN:** Sea  $E$  un espacio recubridor de  $X$  y  $p$  su proyección recubridora. Dada  $f : A \rightarrow X$ , se dice que  $\tilde{f}$  es una elevación de  $f$  si  $p(\tilde{f}(x)) = f(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

El diagrama sugiere el nombre de elevación si acordamos que  $E$  está “por encima” de  $X$ . La expresión *el diagrama es conmutativo* se utiliza para indicar que da lo mismo ir de  $A$  a  $X$  directamente que a través de  $E$  y es la consigna mil veces repetida en muchos libros de Álgebra y de Topología cuyos personajes diagramas adquieren, como las nubes, caprichosas formas intangibles materializadas en nombres como *lema de la serpiente*, *lema del hexágono*, *lema de la mariposa*...

Ahora probaremos que todos los caminos, en particular los lazos, se pueden desenrollar en el espacio recubridor. Éste es el principal lema auxiliar para calcular el grupo fundamental de  $S^1$ .

**Lema 5.4:** (*Lifting lemma*. Lema de la elevación) Sean  $E$ ,  $X$  y  $p$  como antes. Fijado  $x_0 \in X$  y  $e_0 \in E$  con  $p(e_0) = x_0$ , todo camino,  $\alpha$ , en  $X$  con  $\alpha(0) = x_0$  admite una única elevación,  $\tilde{\alpha}$ , en  $E$  con  $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ .

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \nearrow \tilde{\alpha} & & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Dem.: La idea es sencilla: aunque no podamos escribir  $\tilde{\alpha} = p^{-1} \circ \alpha$  porque  $p$  no tiene por qué ser inyectiva, si lo podemos hacer en “intervalos pequeños” donde  $p$  es homeomorfismo.

Consideremos el recubrimiento,  $\mathcal{C}$  de  $X$  por los  $\mathcal{U}(x)$  que aparecen en la definición de espacio recubridor cuando  $x$  varía en  $X$ , entonces  $\alpha^{-1}(\mathcal{U}(x))$  da lugar a un recubrimiento de  $[0, 1]$ . Tomando  $N$  con  $1/N$  menor que el número de Lebesgue del recubrimiento (véase el capítulo anterior) tenemos que cada intervalo  $[j/N, (j+1)/N]$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , cumple  $\alpha([j/N, (j+1)/N]) \subset \mathcal{U}_j$  con  $\mathcal{U}_j \in \mathcal{C}$ .

Por definición,  $p^{-1}(\mathcal{U}_0)$  contiene a un abierto  $\mathcal{W}_0$  con  $e_0 \in \mathcal{W}_0$  tal que  $p|_{\mathcal{W}_0} : \mathcal{W}_0 \rightarrow \mathcal{U}_0$  es un homeomorfismo, así pues, esto implica

$$\tilde{\alpha}(t) = (p|_{\mathcal{W}_0})^{-1} \circ \alpha(t) \quad \text{para } t \in [0, 1/N].$$

De la misma forma,  $p^{-1}(\mathcal{U}_1)$  contiene a un abierto  $\mathcal{W}_1$  con  $(p|_{\mathcal{W}_0})^{-1}(\alpha(1/N)) \in \mathcal{W}_1$  tal que  $p|_{\mathcal{W}_1} : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{U}_0$  es un homeomorfismo y por tanto

$$\tilde{\alpha}(t) = (p|_{\mathcal{W}_1})^{-1} \circ \alpha(t) \quad \text{para } t \in [1/N, 2/N].$$

Procediendo inductivamente de la misma forma, tras  $N$  pasos se completa la prueba. ■

También las homotopías se pueden elevar.

**Lema 5.5:** Sean  $E$ ,  $X$ ,  $p$ ,  $x_0$  y  $e_0$  como antes, entonces cada homotopía de caminos  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  con  $F(0, 0) = x_0$  admite una única elevación,  $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $\tilde{F}$  es una homotopía de caminos con  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ .

Dem.: La construcción de la elevación  $\tilde{F}$  es análoga a la hecha en la demostración anterior para caminos. Ahora hay que considerar  $[j/N, (j+1)/N] \times [k/N, (k+1)/N]$

y notar que dos cuadrados adyacentes no comparte un punto sino todo un “intervalo” cerrado. Los detalles se dejan al lector. Lo que falta por probar es que esta elevación,  $\tilde{F}$ , es realmente una homotopía entre los caminos  $\tilde{F}(t, 0)$  y  $\tilde{F}(t, 1)$ , esto es, que  $\tilde{F}(0, s)$  y  $\tilde{F}(1, s)$  son constantes cuando  $s \in [0, 1]$ .

Como  $F$  es homotopía de caminos,  $F(0, s)$  es constante, de hecho  $F(0, s) = x_0$ . Consideremos  $\mathcal{U}(x_0)$  y  $\mathcal{V}_\alpha$  como en la definición de espacio recubridor. Cada uno de los  $\mathcal{V}_\alpha$  debe contener exactamente un elemento de  $p^{-1}(\{x_0\})$  ya que  $p|_{\mathcal{V}_\alpha} : \mathcal{V}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}(x_0)$  es un homeomorfismo. Sea

$$A = \{\tilde{F}(0, s) : s \in [0, 1]\}.$$

Por definición de elevación  $p(A) = \{F(0, s) : s \in [0, 1]\} = \{x_0\}$  y se tiene  $A \subset p^{-1}(\{x_0\})$ . Por otra parte

$$A = \bigcup_{\alpha} A \cap \mathcal{V}_\alpha$$

y si  $A$  contuviera más de un punto, esta igualdad daría lugar a una separación de  $A$ . lo cual es una contradicción porque  $[0, 1]$  es conexo y  $\tilde{F}$  es continua. Un argumento idéntico prueba que  $\tilde{F}(1, s)$  también es constante. ■

Con estos dos resultados podemos llegar por fin al objetivo de esta sección.

**Teorema 5.6:**  $\pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$ .

Dem.: Como ya dijimos, el isomorfismo viene dado por el *número de vueltas*, el cual, multiplicado por  $2\pi$  coincide con el punto al que se llega al *desenrollar* sobre  $\mathbb{R}$ . Escribiendo todo esto con rigor, tomamos  $X = S^1$ ,  $E = \mathbb{R}$ ,  $p(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $x_0 = (1, 0)$ ,  $e_0 = 0$  y definimos

$$v([\alpha]) = \frac{\tilde{\alpha}(1)}{2\pi} \quad \text{para cada lazo con base en } x_0, \alpha, \text{ en } S^1.$$

Esta definición tiene sentido gracias al lema anterior que asegura que lazos homótopos tienen elevaciones homótopas y, por tanto, con los mismos extremos.

Nótese que  $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0$  implica que  $v([\alpha]) \in \mathbb{Z}$ . Queremos demostrar que

$$v : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo. Para ello basta probar que es una función biyectiva y que es un homomorfismo (no falta la “e”, recuérdese que un homomorfismo es una función entre grupos que preserva las operaciones).

1)  $v$  es sobreyectiva. Tomando  $\alpha_N(t) = (\cos(2\pi Nt), \sin(2\pi Nt))$ , se tiene que  $v([\alpha_N]) = N$  porque  $\tilde{\alpha}_N(t) = 2\pi Nt$ .

2)  $v$  es inyectiva. Si  $v([\alpha]) = v([\beta])$  entonces  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ ,  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$  y  $F(t, s) = p((1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t))$  es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ , esto es  $[\alpha] = [\beta]$ .

3)  $v$  es homomorfismo. Tenemos que demostrar

$$v([\alpha] * [\beta]) = v([\alpha]) + v([\beta]).$$

Consideremos el camino en  $\mathbb{R}$  definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \tilde{\beta}(2t - 1) + \tilde{\alpha}(1) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Como  $\tilde{\alpha}(1)$  es un múltiplo entero de  $2\pi$ , se tiene que  $p \circ \gamma = \alpha * \beta$  y por tanto  $\gamma = \widetilde{\alpha * \beta}$ . De aquí

$$v([\alpha] * [\beta]) = v([\alpha * \beta]) = \frac{\gamma(1)}{2\pi} = \frac{\tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)}{2\pi} = v([\alpha]) + v([\beta])$$

y el teorema queda demostrado. ■

Observación: Como subproducto de la prueba se deduce que todo lazo con base en  $x_0$  es homótopo a  $\alpha_N(t) = (\cos(2\pi Nt), \sin(2\pi Nt))$  para algún  $N \in \mathbb{Z}$ , es decir, los únicos lazos distintos en la circunferencia, salvo homotopías, consisten en dar cierto número de vueltas.

Sorprendentemente, una cantidad discreta como el número de vueltas, admite representaciones analíticas bajo condiciones de regularidad. Por ejemplo, si  $\alpha(t) = (a(t), b(t))$  es un lazo en  $S^1$  con derivada continua entonces, con la notación de la demostración anterior,

$$v([\alpha]) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (ab' - ba').$$

De hecho la elevación de  $\alpha$  admite la siguiente fórmula integral (véase M.P. do Carmo “*Geometría diferencial de curvas y superficies*” Alianza Universidad Textos 1990)

$$\tilde{\alpha}(t) = \int_0^t (ab' - ba').$$

Estas fórmulas pueden considerarse dentro de la llamada Topología Diferencial y se aplican en varios resultados de “Geometría Global”, entre ellos el Teorema de Gauss-Bonnet. Es difícil resistir la tentación de comentar una joya matemática de tal calibre: Cuanto mayor es una esfera menor es la curvatura en cada punto (por eso la Tierra nos parece plana). Usando las definiciones y unidades adecuadas, se tiene que para toda esfera la integral de la curvatura es  $4\pi$ . El teorema de Gauss-Bonnet afirma, entre otras cosas, que aunque modifiquemos la esfera como si fuera una bola de barro, sin romper ni pegar trozos, la superficie obtenida seguirá cumpliendo que la integral de la curvatura es  $4\pi$ . De hecho, cualquier superficie compacta en  $\mathbb{R}^3$  con esta propiedad debe ser homeomorfa a la superficie esférica. En general hay una inesperada conservación global de la curvatura, preservada por homeomorfismos diferenciables, en las superficies compactas de  $\mathbb{R}^3$  que además las caracteriza. Según se dice, dependiendo del valor de cierta “curvatura global del Universo” éste existirá eternamente o colapsará.

### Pero, ¿hay más ejemplos?

El panorama que se ha presentado hasta ahora no es demasiado halagüeño: Es verdad que fijado un punto hemos conseguido asignar un grupo a cada espacio topológico, pero incluso para un espacio tan sencillo como  $S^1$ , nos ha llevado toda una sección calcularlo y no parece que la técnica usada sea fácilmente generalizable. Seguramente el lector espera algo así como “en esta sección veremos un método para calcular el grupo fundamental de un espacio topológico genérico...”, pero no; los resultados que veremos aquí sólo se aplicarán a espacios que tienen demasiado que ver con  $S^1$ . Aunque nos guardaremos algún as en la manga (especialmente el *Teorema de Seifert-van Kampen*, véase el final de la sección), esto es sólo el reflejo de lo complicados que pueden ser los grupos fundamentales y lo compleja que se hace la Teoría de la Homotopía desde el comienzo. Como ejemplo diremos que todavía nadie sabe si  $S^3$  es la única variedad compacta tridimensional, salvo homeomorfismos, que es simplemente conexa (*Conjetura de Poincaré*, véase el libro de I. Stewart citado al final del último capítulo).

Comencemos con un ejemplo realmente tonto.

Ejemplo: Consideremos el espacio  $N$  (inicial de nota) con la topología usual, definido como

$$N = I \cup S^1 \quad \text{con } I = \{(-2, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Todos los lazos con base en  $x_0 = (1, 0)$  deben permanecer en  $S^1$  y todos los lazos con base en  $y_0 = (-2, -1)$  deben permanecer en  $I$ , porque estas son las componentes conexas de  $N$ . Como  $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$  e  $I$  es simplemente conexo, se tiene

$$\pi_1(N, x_0) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(N, y_0) \cong \{0\}.$$

Esto no tiene nada de sorprendente porque hemos considerado dos espacios conexos en lugar de uno, pero nos puede hacer pensar que quizá se pueda variar el grupo fundamental haciendo variar el punto base.

**Proposición 5.7:** Si  $X$  es conexo por caminos y  $x_0, y_0 \in X$ , entonces

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, y_0).$$

Dem.: Sea  $\gamma$  un camino cualquiera con  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = y_0$ . Vamos a probar que

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Es biyectiva con inversa  $\phi^{-1}([\beta]) = [\gamma * \beta * \bar{\gamma}]$  ya que

$$(\phi^{-1} \circ \phi)([\alpha]) = [\gamma * (\bar{\gamma} * \alpha * \gamma) * \bar{\gamma}] = [\alpha] \Rightarrow \phi^{-1} \circ \phi = \text{Id}$$

y lo mismo con  $\phi \circ \phi^{-1}$ . También se cumple

$$\phi([\alpha_1]) * \phi([\alpha_2]) = [\bar{\gamma} * \alpha_1 * \gamma] * [\bar{\gamma} * \alpha_2 * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha_1 * \alpha_2 * \gamma] = \phi([\alpha_1 * \alpha_2])$$

y por tanto  $\phi$  es homomorfismo. ■

Ejemplo: Para cualquier  $x_0 \in S^1$ , se tiene  $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ , lo cual ya estaba muy claro por la propia simetría de la circunferencia.

Veamos ahora otro resultado que, aunque sencillo, es muy importante.

**Teorema 5.8:** Para cada función continua  $f : X \rightarrow Y$  se define  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  como  $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ , entonces:

- 1)  $f_*$  es un homomorfismo de grupos y si  $f$  es la identidad  $f_*$  también lo es.
- 2) Para  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  continuas,  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .
- 3) Si  $f$  es un homeomorfismo,  $f_*$  es un isomorfismo.

Dem.: 1) Si  $f$  es la identidad,  $f(x) = x$ , entonces  $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [\alpha]$ . Por otra parte, la propiedad de homomorfismo se sigue de la relación

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta),$$

que es trivial recordando la definición de  $\alpha * \beta$ .

2) Es una consecuencia obvia de la propiedad asociativa  $(g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha)$ .

3) Por los apartados anteriores,  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  y  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  implican  $((f^{-1})_* \circ f_*)([\alpha]) = [\alpha]$  y  $(f_* \circ (f^{-1})_*)([\alpha]) = [\alpha]$ , así que  $f_*$  tiene una inversa,  $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$ . ■

En el lenguaje de la *Teoría de Categorías* el resultado anterior, sobre todo 2), expresa la *functorialidad*. El *functor*, en este caso, es la forma de asignar a cada *objeto* de la *categoría* de los espacios topológicos con un punto fijado, un *objeto* de la *categoría* de los grupos, de manera que la composición de *morfismos* (funciones entre ellos) sea respetada. Cuando uno encuentra un *functor* debiera ponerse contento porque ha encontrado una relación entre dos partes de las Matemáticas, en este caso la Topología y la Teoría de Grupos.

Es importante notar que el recíproco de 3) no es cierto en general, por ejemplo  $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) \cong \{0\} \cong \pi_1(S^2, x_0)$  pero  $\mathbb{R}^2$  y  $S^2$  no son homeomorfos. En el lenguaje antes mencionado esto se expresa diciendo que el functor no es *completamente fiel*. Debemos entender el proceso de asignación  $(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  como una “función” (functor) que asigna un grupo a un espacio topológico (fijado un punto) sin llegar a caracterizarlo.

*La función no explicaba nada; permitía comprender en conjunto lo que era una raíz, pero de ningún modo ‘ésta’. Esa raíz, su color, su forma, su movimiento detenido, estaba... por debajo de toda explicación. Cada una de sus cualidades se le escapaba un poco, [...]*

Como contrapunto diremos que se conocen todas las superficies compactas (variedades bidimensionales) y sus grupos fundamentales. Tras comprobar que son distintos, se sigue que el grupo fundamental sí es determinante en el caso de superficies compactas. Sin embargo, recuérdese la Conjetura de Poincaré, queda mucho por hacer en otros casos.

Más cultura matemática: Una idea para distinguir más espacios es introducir grupos de “lazos” de dimensiones mayores: bidimensionales, tridimensionales, etc. En esta línea, W. Hurewicz generalizó  $\pi_1(X, x_0)$  a  $\pi_n(X, x_0)$  en los años 30, pero estos nuevos grupos resultan ser bastante desconocidos incluso en espacios muy sencillos. En contraste, los llamados grupos de homología y cohomología (relacionados con la idea citada al comienzo del capítulo) permiten cálculos sencillos e incluso representaciones geométricas y analíticas.

Su definición excede el contenido del curso pero sus ventajas son patentes sin más que comprobar que en casi cualquier libro titulado “Topología Algebraica”,  $H_n$  y  $H^n$  aparecen innumerablemente más veces que  $\pi_n$ .

Veamos cómo utilizar el teorema anterior para probar que algunos espacios no son simplemente conexos.

Ejemplo: Consideremos el espacio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

y la función

$$f : A \longrightarrow S^1 \qquad f : \text{dos círculos} \xrightarrow{\text{(doblar)}} S^1$$

$$(x, y) \longmapsto (|x| - 1, y)$$

Tomando el lazo en  $A$  con base en  $(2, 0)$ ,  $\beta(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ , se tiene  $f_*([\beta]) = [\alpha]$  con  $\alpha$  el lazo que genera  $\pi_1(S^1, (1, 0))$ ,  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ . Si  $\beta$  fuera homótopo al lazo trivial (esto es, si  $[\beta]$  fuera el elemento neutro), como  $f_*$  es homomorfismo,  $\alpha$  también lo sería, lo cual es una contradicción. Por tanto  $A$  no es simplemente conexo, de hecho, al ser  $\alpha$  generador, se tiene un epimorfismo (homomorfismo sobreyectivo)

$$f_* : \pi_1(A, (2, 0)) \longrightarrow \pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}.$$

Esto nos dice que aun sin calcular  $\pi_1(A, (2, 0))$ , debe “contener” en algún sentido a  $\mathbb{Z}$ . Por curiosidad, diremos que este grupo no es abeliano y está aproximadamente descrito al final de la sección.

Por fin vamos a ver un problema que no sabíamos resolver con las técnicas de capítulos anteriores.

Ejemplo: La corona  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$  no es homeomorfa al rectángulo  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$ .

Si existiera un homeomorfismo  $f : Q \longrightarrow C$ , considerando  $r_0 = f^{-1}((2, 0))$  y definiendo  $g : C \longrightarrow S^1$  como  $g(x, y) = (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ , se llega a una contradicción con el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(Q, r_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(C, (2, 0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(S^1, (1, 0)) \\ \{0\} & \xrightarrow[\text{(isomorfismo)}]{\text{biyectiva}} & \text{¿?} & \xrightarrow[\text{(epimorfismo)}]{\text{sobreyectiva}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

La sobreyectividad de  $g_*$  se sigue como antes observando que  $\beta(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  se aplica en  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ , el generador de  $\pi_1(S^1, (1, 0))$ .

La moraleja de estos ejemplos es que los espacios con agujeros no son simplemente conexos.

El siguiente resultado nos dice que si *aplastamos* poco a poco un espacio en uno de sus subespacios, el grupo fundamental no varía. Primero definimos lo que es *aplastar poco a poco*: una especie de homotopía pero con espacios topológicos en lugar de con caminos.



**DEFINICIÓN:** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Se dice que  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ , si existe una función continua  $R : X \times [0, 1] \longrightarrow X$  tal que para todo  $x \in X$ , todo  $a \in A$  y todo  $s \in [0, 1]$ , se cumple

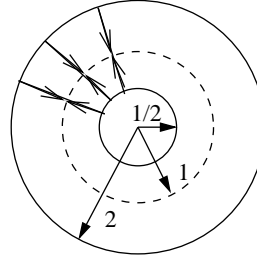
$$1) R(x, 0) = x \quad 2) R(x, 1) \in A \quad 3) R(a, s) = a.$$

**Ejemplo:** La circunferencia  $S^1$  es un retracto por deformación fuerte de la corona

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/4 < x^2 + y^2 < 4\}$$

tomando

$$R(\vec{x}, s) = (1 - s)\vec{x} + s \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$



**Observación:** Es importante notar que la imagen de  $R$  debe estar en  $X$ , esto es, que en los pasos intermedios del *aplastamiento* no nos podemos salir fuera del espacio considerado. Por ejemplo,  $C \cup \{(3, 0)\}$  no sería un retracto por deformación fuerte de  $S^1$  con  $R$  como antes, porque, en general  $R((3, 0), s) \notin C \cup \{(3, 0)\}$ .

**Proposición 5.9:** Si  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ , para cualquier  $a_0 \in A$  se tiene

$$\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0).$$

**Dem.:** Sea  $j : A \longrightarrow X$  la inclusión y  $f : X \longrightarrow A$  la función definida como  $f(x) = R(x, 1)$ . Si probamos que las composiciones indicadas en los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A, a_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, a_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(A, a_0) \\ \pi_1(X, a_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(A, a_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, a_0) \end{array}$$

son la identidad, se deduce que  $f_*$  tiene a  $j_*$  como inversa y que es un isomorfismo.

En el primer diagrama  $j_* \circ f_* = \text{Id}$  es trivial ya que  $f(j(a)) = a$ . En el segundo, consideremos cualquier  $[\alpha] \in \pi_1(X, a_0)$ . La función  $R(\alpha(t), s)$  define una homotopía de  $\alpha$  en el lazo  $\beta(t) = R(\alpha(t), 1)$  con  $\text{Im } \beta \subset A$ , así pues  $f(j(\beta(t))) = \beta(t)$ , es decir  $f_* \circ j_*([\beta]) = [\beta]$  y, como  $[\alpha] = [\beta]$ , se deduce el resultado. ■

**Ejemplo:** Cualquier corona circular,  $C$ , es homeomorfa a la corona circular del último ejemplo (ejercicio: dar una fórmula para tal homeomorfismo) y  $S^1$  es un retracto por deformación fuerte de ella, por tanto

$$\pi_1(C, c_0) \cong \pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}.$$

**Ejemplo:** Considerando  $R$  como antes, esto es,

$$R(\vec{x}, s) = (1 - s)\vec{x} + s \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad \text{con } \vec{x} \in \mathbb{R}^2,$$

se tiene que  $S^1$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ , con lo cual

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \quad \text{con } x_0 = (1, 0).$$

En particular,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$  no son homeomorfos.

Ejemplo: Por medio de

$$R((x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), s) = (x_1, x_2, \dots, x_n, (1-s)x_{n+1}),$$

se tiene que  $\mathbb{R}^n$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , así tenemos una nueva manera de probar que  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo partiendo de que  $\mathbb{R}$  lo es.

Este último ejemplo también es consecuencia del siguiente resultado que afirma que el grupo fundamental respeta los productos cartesianos.

**Proposición 5.10:** Sean  $X, Y$  espacios topológicos con  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ , entonces

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

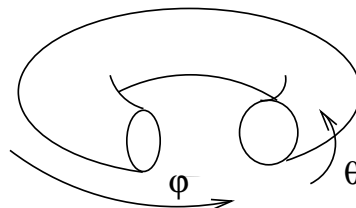
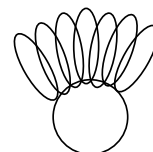
Dem.: Por razones obvias modificaremos la notación para las proyecciones, nombrándolas como  $p^X$  y  $p^Y$  con  $p^X : X \times Y \rightarrow X, p^Y : X \times Y \rightarrow Y$ .

Definamos el siguiente homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto (p_*^X([\alpha]), p_*^Y([\alpha])) \end{aligned}$$

Es obvio que  $\phi$  es sobreyectiva (epimorfismo) porque la antiimagen de  $([\beta_1], [\beta_2])$  contiene al lazo en  $X \times Y$  dado por  $\alpha(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ . Por otra parte, si  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son homótopos al lazo constante por las homotopías  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente, entonces  $\xi\alpha = (\beta_1, \beta_2)$  también lo es por la homotopía  $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$  en  $X \times Y$ . Por consiguiente, el núcleo de  $\phi$  es trivial y  $\phi$  es inyectiva. ■

Notación: Se llama toro (bidimensional) al espacio  $T^2 = S^1 \times S^1$  con la topología usual. Nótese que geoméricamente corresponde (es homeomorfo) a la superficie de una rosquilla porque es lo que se obtiene al poner una circunferencia “sobre” cada punto de una circunferencia. Una forma de verlo analíticamente, es notar que los puntos de  $S^1$  están determinados por un ángulo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  con 0 y  $2\pi$  identificados, mientras que los de un toro están determinados por un par de ángulos, latitud y longitud,  $(\theta, \phi)$  con  $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$  y las mismas identificaciones.



Ejemplo: Para cualquier  $x_0 = (p_1, p_2) \in T^2$

$$\pi_1(T^2, x_0) \cong \pi_1(S^1, p_1) \times \pi_1(S^1, p_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

En particular  $S^2$  y  $T^2$  no son homeomorfos: una rosquilla no es un balón de fútbol.

Ejemplo: El grupo fundamental del cilindro

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 2\} = S^1 \times [-1, 2]$$

es, para cualquier punto  $x_0 \in K$ ,

$$\pi_1(K, x_0) \cong \pi_1(S^1, p_1) \times \pi_1([-1, 2], p_2) \cong \mathbb{Z} \times \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Para terminar esta sección mencionaremos brevemente un importante resultado que no hemos incluido aquí porque se sale del alcance del curso. Nótese primero que en la demostración de que  $S^n$  era simplemente conexo no usamos ninguna propiedad especial de  $S^n$ , solamente que  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  eran abiertos simplemente conexos y  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  conexo por caminos, por lo cual la misma demostración sirve para probar

*Si  $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  con  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  simplemente conexos y  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  conexo por caminos, entonces  $X$  es simplemente conexo.*

El *Teorema de Seifert-van Kampen* va mucho más allá y en una versión muy restringida, que no contiene exactamente al resultado anterior, pero lo complementa, afirma que

*Si  $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  con  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  conexos por caminos y  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  es simplemente conexo, entonces el grupo fundamental de  $X$  es isomorfo al producto libre de los de  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2$ .*

Lo del producto libre de grupos significa el grupo formado por todas las *palabras* cuyas “letras” son alternativamente elementos distintos del neutro, de cada uno de los grupos. Por ejemplo, en el espacio formado por dos circunferencias tangentes, el grupo fundamental es isomorfo al producto libre de  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}$ . Algunos elementos son **26(-1)1**, **1464**, donde los números en negrita (*¿o negrita?*) distinguen el grupo  $\mathbb{Z}$  de una de las circunferencias, digamos la de la izquierda. Así **26(-1)1** corresponde al lazo cuya receta de caja fuerte es: “Da dos vueltas a la circunferencia de la derecha, después seis a la de la izquierda, una en sentido negativo a la de la derecha y termina con una a la de la izquierda”.

## Algunos teoremas bonitos

Lo poco que hemos logrado arañar de la Topología Algebraica es suficientemente poderoso para que podamos resolver algunos problemas que estaban fuera de nuestro alcance con los métodos de capítulos anteriores y además enunciar algunos teoremas que casi todos los matemáticos, licenciados o no, tildarían de bonitos.

*—¿Los retratos del gran salón? Señor —dice con una sonrisa temblorosa—, no entiendo nada de pintura. Claro, no se me escapa que Bordurin es un gran pintor, veo que tiene, ¿cómo se dice?, oficio, paleta. Pero el placer, señor, el placer estético me es ajeno.*

*Le digo con simpatía:*

*—A mí me pasa lo mismo con la escultura.*

*—¡Ah, señor! A mí también. Y con la música, y con la danza. Sin embargo, no carezco de ciertos conocimientos. Bueno, es inconcebible: he visto jóvenes que no sabían ni la mitad de lo que yo sé y, sin embargo, plantados delante de un cuadro, parecían experimentar placer.*

Para abrir boca, comencemos con algunos ejemplos relacionados con homeomorfismos.

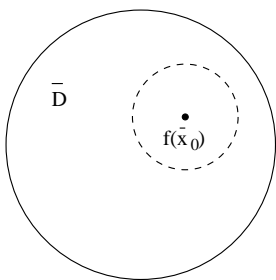
Ejemplo:  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  para  $n > 2$ .

Si existiera un homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  podemos suponer, quizá componiendo con una traslación, que  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ . Por tanto  $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$  sería homeomorfo a  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , pero  $S^1$  y  $S^{n-1}$  son, respectivamente, retracts por deformación fuerte de estos espacios por medio de  $R(\vec{x}, s) = (1-s)\vec{x} + s\vec{x}/\|\vec{x}\|$  y se tiene

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, \vec{x}_0) \cong \pi_1(S^1, \vec{x}_0) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}, \vec{x}_0) \cong \pi_1(S^{n-1}, \vec{x}_0) \cong \{0\} \quad \text{para } n > 2.$$

Ejemplo: Sea  $D$  la bola abierta unidad en  $\mathbb{R}^2$ , entonces cualquier homeomorfismo  $f : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  manda el interior en el interior y la frontera (esto es,  $S^1$ ) en la frontera.

Supongamos que existiera un punto  $\vec{x}_0 \in \text{Fr}(\overline{D}) = S^1$  con  $f(\vec{x}_0) \in \text{Int}(\overline{D}) = D$  entonces  $\overline{D} - \{\vec{x}_0\}$  sería simplemente conexo (por ser convexo) y  $\overline{D} - \{f(\vec{x}_0)\}$  no lo sería por tener un agujero, por tanto no pueden ser homeomorfos.



Para probar rigurosamente que  $\overline{D} - \{f(\vec{x}_0)\}$  no es simplemente conexo podemos hacer varias cosas: 1) Si tenemos suerte y  $f(\vec{x}_0) = (0,0)$  hacemos el retracto de siempre a  $S^1$ . 2) Si sabemos algo de variable compleja, aplicamos una transformación de Möbius y el caso anterior. 3) Tomando  $\epsilon > 0$  tal que  $B(f(\vec{x}_0), \epsilon) \subset \overline{D}$ , tras aplicar  $\vec{y} \mapsto \epsilon^{-1}(\vec{y} - f(\vec{x}_0))$  a  $\overline{D} - \{f(\vec{x}_0)\}$ , podemos usar el retracto de siempre.

Ejemplo: Con la notación anterior  $D \cup \{(1,0)\} \cup \{(-1,0)\}$  y  $D \cup \{(1,0)\}$  no son homeomorfos porque con un razonamiento como el de antes tenemos que las imágenes de  $(1,0)$  y de  $(-1,0)$  sólo pueden ser  $(1,0)$  y se perdería la inyectividad.

Veamos ahora los resultados bonitos. Aunque el primero no lo es tanto, al menos sorprende.

**Proposición 5.11:** Sea  $D$  la bola abierta unidad en  $\mathbb{R}^2$ , entonces no existe ninguna función continua  $f : \overline{D} \rightarrow S^1$  tal que sea la identidad en la frontera (esto es,  $f|_{S^1}(x) = x$ ).

Dem.: Sea  $x_0 = (1, 0)$ , entonces se tiene el homomorfismo

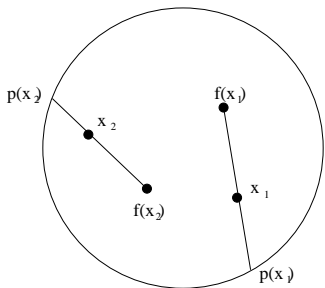
$$f_* : \pi_1(\overline{D}, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_0).$$

Como  $\pi_1(\overline{D}, x_0) \cong \{0\}$ , para todo lazo  $\alpha$  con base en  $x_0$   $f_*([\alpha])$  debe ser homótopo al lazo constante en  $S^1$ , pero si  $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  se tiene  $f_*([\alpha]) = [\alpha]$  que es un generador de  $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ . ■

El siguiente resultado fue anunciado en un capítulo anterior y muestra lo poderosas que son las técnicas algebraicas en Topología (aunque es posible probarlo por métodos elementales menos directos. Véase M. de Guzmán “Mirar y ver” Alhambra 1977).

**Teorema 5.12:** (Teorema de Brouwer  $n = 2$ ) Una función continua de una bola cerrada de  $\mathbb{R}^2$  en sí misma, deja al menos un punto fijo.

Dem.: Obviamente podemos suponer que la bola cerrada es  $\overline{D}$ , la bola unidad.



Supongamos que existiera  $f : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  continua con  $f(x) \neq x, \forall x \in \overline{D}$ . Sea  $p(x) \in S^1$  el punto de intersección con  $S^1$  de la semirrecta que parte de  $f(x)$  y pasa por  $x$ , entonces  $p : \overline{D} \rightarrow S^1$  es una función continua cuya restricción a  $S^1$  es la identidad, lo cual contradice el resultado anterior. ■

Observación: Este teorema, generalizado a  $\mathbb{R}^n$ , fue probado por L.E.J. Brouwer en 1910. Por otro lado, un poderoso teorema de Topología Algebraica debido a S. Lefschetz en 1926, permite “determinar”, en función de ciertas propiedades cualitativas, el número de punto fijos de una función continua definida en una variedad compacta. Por ejemplo, si  $f : S^2 \rightarrow S^2$  es continua y no manda ningún punto a su antípoda entonces “esencialmente” tiene dos puntos fijos. Para perfilar el significado de esta afirmación, diremos que es fácil imaginar una función tal con dos puntos fijos (un giro), es difícil imaginarla con uno (indicación incomprensible: síganse las líneas de fuerza en un dipolo eléctrico) e imposible con ninguno.

Ejemplo: Un folio rectangular es homeomorfo a uno circular, por tanto cuando lo arrugamos y lo superponemos sobre uno idéntico, siempre hay algún punto cuya proyección no ha cambiado de lugar.

Ejemplo: El sistema

$$(x + \sin(|x - y|) + 3)(x^{-1}e^{xy} + x + 3y^4x^{-1}) = 1$$

$$\cos x + \sin(xy^3) + e^x + e^{y^2} + y^{-1} = -5$$

tiene alguna solución  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Resolver el sistema es lo mismo que hallar un punto fijo,  $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ , de

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

con

$$f_1(x, y) = x(e^{xy} + x^2 + 3y^4)^{-1} - \text{sen}(|x - y|) - 3,$$

$$f_2(x, y) = -(5 + \cos x + \text{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2})^{-1}.$$

Está claro que  $f_1$  y  $f_2$  están acotadas, así que para  $R$  suficientemente grande se tiene  $f(\overline{B}((0, 0), R)) \subset \overline{B}((0, 0), R)$  y se puede utilizar el teorema de Brouwer.

Ahora probaremos el teorema de Borsuk-Ulam para  $n = 2$  que también fue anunciado anteriormente. Separaremos primero un resultado auxiliar que contiene casi toda la demostración.

**Proposición 5.13:** *No existe ninguna función continua  $f : S^2 \rightarrow S^1$  satisfaciendo  $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$  para todo  $\vec{x} \in S^2$ .*

Dem.: Sea  $f$  con las propiedades mencionadas, quizá componiendo con un giro podemos suponer  $f(1, 0, 0) = (1, 0)$ .

Sea  $\alpha$  el ecuador de  $S^2$ ,  $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t), 0)$ ; como  $S^2$  es simplemente conexo,  $f_*([\alpha])$  es el elemento neutro de  $\pi_1(S^1, (1, 0))$  y por tanto (véase la demostración del isomorfismo  $\pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$ ) debe ser  $v(f_*([\alpha])) = \widetilde{f \circ \alpha}(1)/(2\pi) = 0$ .

Por otra parte, consideremos el camino en  $\mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \widetilde{\beta}(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \widetilde{\beta}(2t - 1) + \widetilde{\beta}(1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde  $\widetilde{\beta}$  es una elevación (con  $\widetilde{\beta}(0) = 0$ ) del camino en  $S^1$

$$\beta(t) = f(\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t), 0).$$

De  $p \circ \widetilde{\beta} = \beta(1) = f(-1, 0, 0) = -f(1, 0, 0) = (-1, 0)$  se sigue  $\widetilde{\beta}(1) = (2k + 1)\pi$ , recuérdese que  $p(t) = (\cos t, \text{sen} t)$ , y un cálculo directo prueba  $p \circ \gamma = f \circ \alpha$ , así que  $\gamma = \widetilde{f \circ \alpha}$  y  $\gamma(1) = \widetilde{f \circ \alpha}(1) \neq 0$ . ■

**Teorema 5.14:** (Teorema de Borsuk-Ulam  $n = 2$ ) *Si  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua existe algún  $\vec{x} \in S^2$  tal que  $f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$ .*

Observación: En particular, en la superficie terrestre hay al menos un punto en el que la presión y la temperatura coincide con la de sus antípodas.

Dem.: Si  $f(\vec{x}) \neq f(-\vec{x})$  para todo  $\vec{x} \in S^2$ , definamos la función  $g : S^2 \rightarrow S^1$

$$g(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) - f(-\vec{x})}{\|f(\vec{x}) - f(-\vec{x})\|}.$$

La relación  $g(\vec{x}) = -g(-\vec{x})$  contradice el resultado anterior. ■

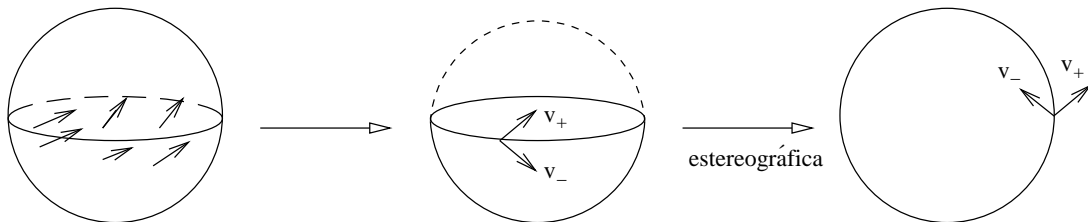
Veamos ahora uno de los teoremas típicos para hacer propaganda de la Topología Algebraica.

**Teorema 5.15:** (Teorema de la bola de pelo) *Sobre una esfera no existe ningún campo de vectores tangentes y no nulos continuo.*

Observación: El nombre viene de que a veces el teorema se enuncia diciendo que no se puede peinar una bola de pelo sin hacer algún remolino. (Los *punks* no son contraejemplo porque sus pelos no son tangentes ni los *pijos* peinados hacia atrás tampoco porque su cabeza no es una bola de pelo, ni la de nadie, por muy *hippie* que sea). Como consecuencia del teorema de Lefschetz al que antes nos hemos referido, hay “esencialmente” dos remolinos. Por otra parte, un toro (la figura geométrica) se puede peinar sin remolinos y, en general, el teorema de Poincaré-Hopf afirma que en una esfera con  $k$  “asas” aparecen “esencialmente”  $2k - 2$  remolinos.

Dem.: Siempre podemos suponer que los vectores de un campo que no se anula son unitarios: basta dividir por su norma.

Con una simetría por el ecuador podemos pasar el campo de vectores del hemisferio norte al sur y así obtenemos dos campos de vectores en el hemisferio sur, ambos simétricos en el ecuador. Aplicando la proyección estereográfica (los vectores del campo se proyectan de la forma lógica: conservando ángulos con respecto a las proyecciones de los meridianos y paralelos), obtenemos dos campos de vectores unitarios,  $v_+$  y  $v_-$ , en una bola cerrada de  $\mathbb{R}^2$ , digamos la bola unidad tras una homotecia, de manera que en la frontera  $v_+$  y  $v_-$  son simétricos a través de (las tangentes a)  $S^1$ .



Sea  $w = w(x, y)$  el campo de vectores unitario que asigna al punto  $(x, y)$  el vector que subtiende un ángulo igual a la suma de los ángulos de  $v_+$  y  $v_-$  (esto es como multiplicarlos considerándolos números complejos). Según la propiedad de simetría

$$w(\cos t, \sin t) = (\cos(\pi + 2t), \sin(\pi + 2t))$$

(nótese que los ángulos de  $v_+$  y  $v_-$  son  $ang_{\pm} = \pi/2 + t \mp \theta$ ), con lo cual, si  $\gamma(t) = w(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ,  $[\gamma] \in \pi_1(S^1, (-1, 0))$  y no es el elemento neutro (da dos vueltas). Pero esto es una contradicción porque

$$F(t, s) = w((1 - s)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) + s(-1, 0))$$

es una homotopía en  $S^1$  entre  $\gamma$  y el lazo constante  $c_{(-1,0)}$ . ■

También es verdad que teoremas como el anterior generan una especie de antipropaganda de las Matemáticas invitando a preguntar “¿y para qué quiero peinar una bola de pelo?” Uno puede ser radical diciendo que seguramente para tan poco como estudiar

el origen del Universo. De hecho es lo mismo: “El Big-Bang ocurrió hace  $n$  años” es la traducción poética para los periódicos y documentales de “Las ‘ecuaciones diferenciales del universo’ tienen una singularidad en  $t = -n$ ” y el teorema anterior sirve para demostrar que en el plano de fases de algunas ecuaciones diferenciales deben aparecer puntos singulares. Realmente el teorema, por serlo, es menos engañoso (¿Y si las ecuaciones de la Física se estropearan fatalmente cuando el tiempo se hace muy negativo? ¿Y si la Teoría General de la Relatividad fuera incorrecta a escala cosmológica? (Una primera versión de las ecuaciones de Einstein implicaba que el Universo es estacionario, no se expande).

No hay finalidades ni justificaciones necesarias, sólo excusas para disfrutar haciendo o viendo cosas bellas y artísticas, aunque ello sea perfectamente criticable por no ser útiles ni acabar con el hambre en el mundo.

*Decir que hay imbéciles que obtienen consuelo con las bellas artes. Como mi tía Bi-geois: “Los ‘Preludios’ de Chopin me ayudaron tanto cuando murió tu pobre tío.” Y las salas de concierto rebosan de humillados, de ofendidos que, con los ojos cerrados, tratan de transformar sus rostros pálidos en antenas receptoras. Se figuran que los sonidos captados corren en ellos, dulces y nutritivos, y que sus padecimientos se convierten en música, como los del joven Werther; creen que la belleza se compadece de ellos.*

El estudio del comportamiento local y global en variedades de los *tipos de peinados* y sus generalizaciones (*fibrados vectoriales* para los amigos) desempeña un papel de importancia en Física y permite resolver problemas que escapan a las técnicas del curso. Como ejemplo de esto último, nótese que una banda cilíndrica (un brazalete),  $C$ , y una banda de Möbius,  $M$ , son compactas conexas y, por poderse retraer a  $S^1$ , tienen el mismo grupo fundamental. Sin embargo, en  $C$  es fácil encontrar dos *peinados* linealmente independientes (por ejemplo todos los pelos hacia el este y todos los pelos hacia el sur) mientras que si existiera en  $M$ , haciendo el producto vectorial de ambos obtendríamos un campo de vectores normales continuo en  $M$ , lo cual es imposible (¿por qué? Nótese que cada vector normal se da la vuelta al moverse por el ecuador. Si todavía existe, véanse las antenas de las hormigas de <http://www.worldofescher.com/gallery/MobiusStripIILg.html>).

Como fin de fiesta, veamos la demostración de un teorema bien conocido que, según se dice, no puede admitir una prueba algebraica (quien quiera opinar lo contrario que espere a cursar Álgebra II, lea el capítulo 18 del libro de I. Stewart “Galois Theory” Chapman and Hall 1991 y no haga caso de las disculpas).

**Teorema 5.16:** (Teorema fundamental del Álgebra) *Cualquier polinomio en  $\mathbb{C}[x]$  de grado  $n > 0$  tiene  $n$  raíces en  $\mathbb{C}$ , contando multiplicidades.*

Dem.: Como es bien sabido, procediendo inductivamente, basta demostrar que tiene una raíz. También podemos suponer que el polinomio es mónico (el coeficiente de mayor grado es uno) y que los coeficientes son reales considerando el producto por el polinomio que tiene sus coeficientes conjugados. (Ejercicio: Poner todo esto en claro).

Sea, por tanto,  $P \in \mathbb{R}[x]$  mónico y digamos que  $P$  no tiene raíces en  $\mathbb{C}$ . En particular no las tendrá en  $\mathbb{R}$  y podemos suponer  $P(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .



Identificando cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $x + iy \in \mathbb{C}$  y con un punto de  $S^1$  cuando  $x^2 + y^2 = 1$ , se tiene que para cualquier  $r$

$$\gamma_r(t) = \frac{P(\alpha_r(t))}{|P(\alpha_r(t))|} \quad \text{donde } \alpha_r(t) = re^{2\pi it} = r \cos(2\pi t) + ir \sin(2\pi t),$$

es un lazo en  $S^1$  con base en  $(1, 0) = 1 + 0i$ . La homotopía  $F(t, s) = \gamma_{(1-s)r}(t)$  prueba que es siempre homótopo al lazo constante  $\gamma_0 = c_{(1,0)}$ . Por ser  $P$  de grado  $n$  y mónico

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{P(\alpha_R(t))}{(\alpha_R(t))^n} = 1,$$

y se tiene que para  $R$  suficientemente grande

$$H(t, s) = \frac{(1-s)P(\alpha_R(t)) + s(\alpha_R(t))^n}{|(1-s)P(\alpha_R(t)) + s(\alpha_R(t))^n|}$$

es una homotopía bien definida entre los lazos  $\gamma_R$  y  $\cos(2\pi nt) + i \sin(2\pi nt)$  (el límite anterior asegura que el denominador no se anula). Pero esto es una contradicción porque este último lazo no es homótopo al lazo constante. ■

FIN

*Un libro. Naturalmente, al principio sólo sería un trabajo aburrido y fatigoso; no me impediría existir ni sentir que existo. Pero llegaría un momento en que el libro estaría escrito, estaría detrás de mí, y pienso que un poco de claridad caería sobre mi pasado.*