3. Espacios Topológicos II
(Conjuntos asociados, continuidad y propiedades)

La frontera cierra el interior

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, hay conjuntos naturales *asociados* a A que están recogidos en las definiciones siguientes.

DEFINICIÓN: Se llama interior de A, y se denota con $\text{Int}(A)$, a la unión de todos los abiertos contenidos en A.

DEFINICIÓN: Se llama cierre o clausura o adherencia de A, y se denota con $\overline{A}$, a la intersección de todos los cerrados que contienen a A.

DEFINICIÓN: Se llama frontera de A, y se denota con $\text{Fr}(A)$, al conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente al cierre de A y de su complementario. Esto es, $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$.

DEFINICIÓN: Se llama conjunto de puntos límite o de acumulación (o también conjunto derivado) de A, y se denota con A', al conjunto de puntos tales que cualquier entorno suyo interseca a A en algún punto distinto de él mismo. Esto es

$$A' = \{x \in X \;:\; \forall \mathcal{U} \text{ abierto}, \; x \in \mathcal{U} \Rightarrow (\mathcal{U} - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

A veces se define también el *exterior* de A como $X - \overline{A}$, pero no nos referiremos a él en este curso.

Seguramente es difícil imaginar, incluso para alguien que ha llegado hasta este capítulo, *todos* los cerrados que contienen a A o *todos* los abiertos contenidos en A; por ello veremos primero una caracterización más práctica del interior y el cierre.

Proposición 3.1: *Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio topológico X y sea $A \subset X$. Entonces*

$$1)\; x \in \text{Int}(A) \;\Leftrightarrow\; \exists B \in \mathcal{B} \;:\; x \in B \subset A$$

$$2)\; x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \forall B \in \mathcal{B}, \;\textit{con}\; x \in B, \;\; B \cap A \neq \emptyset.$$

Dem.: 1) Si $x \in \text{Int}(A)$, como $\text{Int}(A)$ es abierto, existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset \text{Int}(A) \subset A$. Recíprocamente, si $B(x) \subset A$ con $B(x) \in \mathcal{B}$ entonces, como $B(x)$ es abierto, $B(x) \subset \text{Int}(A)$.

2) Vamos a probar $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists B(x) \in \mathcal{B} \;:\; B \cap A = \emptyset$. Si $x \notin \overline{A}$, existe un cerrado $F \supset A$ tal que $x \notin F$, por consiguiente x pertenece al abierto $X - F$ y debe existir $B(x)$ en la base con $B(x) \subset X - F \subset X - A$ de donde se deduce $B(x) \cap A = \emptyset$. Recíprocamente, si $B(x) \in \mathcal{B}$ con $B(x) \cap A = \emptyset$, tomando $F = X - B(x)$ se tienen $F \supset A$ y $x \notin F$, por tanto $x \notin \overline{A}$. ∎

Ejemplo: Calculemos $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\text{Fr}(A)$ y A' donde $A = (1, 2] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual en $\mathbb{R}$.

Si $x \in (1, 2)$, como $x \in (1, 2) \subset A$, se tiene $x \in \text{Int}(A)$. Por otra parte, no existen a, b tales que $2 \in (a, b) \subset A$, así pues $2 \notin \text{Int}(A)$ y se tiene $\text{Int}(A) = (1, 2)$.

Si $x > 2$ entonces $(2, x) \cap A = \emptyset$ y $x \notin \overline{A}$. Lo mismo ocurre para $x < 1$. Además si $x \in [1, 2]$ cualquier intervalo (a, b) conteniendo a x corta a A en infinitos puntos, así que $\overline{A} = A' = [1, 2]$. Un argumento similar prueba que $\overline{X - A} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$, en consecuencia $\mathrm{Fr}(A) = \{1\} \cup \{2\}$.

<u>Ejemplo</u>: Con la topología usual en $\mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ porque no existe $a < b$ con $(a, b) \subset \mathbb{Q}$ ya que cualquier intervalo contiene infinitos puntos racionales e irracionales, a su vez esto implica $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Finalmente, como $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ se deduce $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

La idea de interior y cierre es fácilmente comprensible: el interior es el abierto *más grande* dentro del conjunto y el el cierre es el cerrado *más pequeño* que contiene al conjunto. Obviamente, $A = \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow A$ es abierto y $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ es cerrado. (Ejercicio: reemplazar "obviamente" por una demostración). También la definición de frontera es intuitiva, es algo así como los puntos "adyacentes" al conjunto y a su complementario. Pero seguramente los ejemplos anteriores no dan una idea clara de lo que son los puntos límite. Al menos en el caso métrico, es como el conjunto de posibles límites (de ahí el nombre) de sucesiones no constantes contenidas en el conjunto. A este respecto merece la pena recordar la definición dada por G. Cantor allá por 1883 para $\mathbb{R}$ con la usual: "Por punto límite de un conjunto A quiero decir un punto de la recta tal que en cualquier entorno suyo se encuentran infinitos puntos de A, entendiendo que puede ocurrir que el punto (límite) mismo también pertenezca al conjunto".

<u>Ejemplo</u>: Si $A = [1, 2] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$ (con la topología usual) entonces $3 \notin A'$ porque $\big((2'5, 3'5) - \{3\}\big) \cap A = \emptyset$. De hecho es fácil comprobar como antes (ejercicio) que $A' = [1, 2]$ mientras que $\overline{A} = A$ porque A es cerrado.

A los elementos de $\overline{A} - A'$ se les llama <u>puntos aislados</u>. Como en el resto de conjuntos asociados antes introducidos, el nombre no siempre corresponde a nuestra intuición geométrica habitual. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología discreta, 1 es un punto aislado de $A = [0, 2]$, pero no lo es de $A = \{0, 1, 2\}$ si usamos la topología trivial. Es fácil probar en general que

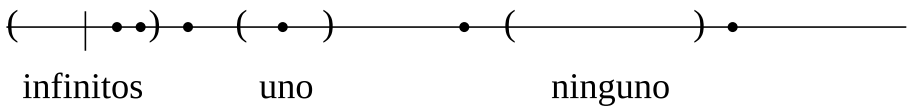
$$x \in \overline{A} - A' \;\Leftrightarrow\; \exists\, \mathcal{U}(x) \,:\, \mathcal{U}(x) \cap A = \{x\}.$$

Por tanto, cuando usemos topologías distintas de la usual, más que imaginar los elementos de $\overline{A} - A'$ como *aislados* con nuestra intuición euclídea, debemos pensarlos como no *relacionados* con otros puntos de A mediante entornos de la topología.

> –[...] *No sabía qué hacer, languidecía. Donde veía hombres reunidos, allí me metía. Hasta he llegado –agrega sonriendo– a seguir el cortejo fúnebre de un desconocido. Un día, desesperado, arrojé al fuego la colección de sellos... Pero encontré mi camino.*[...]
> *Se yergue, infla los carrillos.*
> *–Ya no estoy solo, señor. Nunca.*
> *–Ah, ¿conoce usted a mucha gente? –digo.*
> *Sonríe y en seguida me doy cuenta de mi ingenuidad.*
> *–Quiero decir que ya no me 'siento' solo. Pero naturalmente, señor, no es necesario que esté con alguien.*

<u>Ejemplo</u>: Sea $A = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ (A no contiene ningún intervalo), $\overline{A} = A \cup \{0\}$ y $A' = \{0\}$. Las dos últimas igualdades

responden a la misma idea: los únicos puntos, x, tales que $(x-\epsilon, x+\epsilon)\cap A \neq \emptyset$, son $x=0$ y $x=1/n$ por pequeño que sea ϵ. Para $x=0$ la intersección cuenta con más de un punto (de hecho infinitos) y para $x=1/n$ no, por ello $A' = \{0\}$ y todos los puntos de A son puntos aislados.



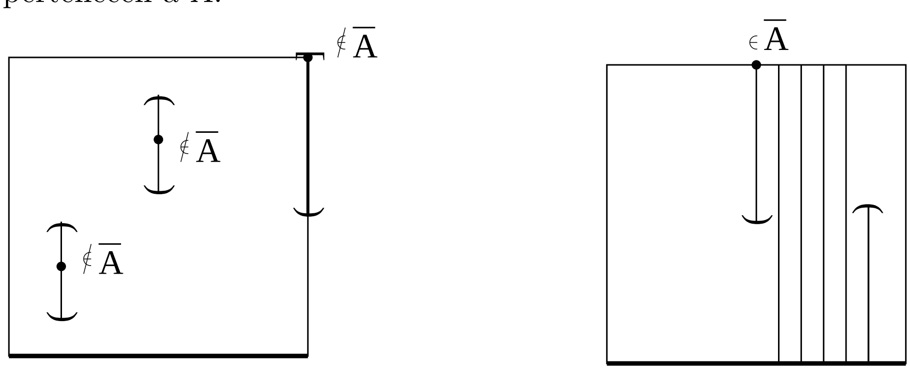
Si la topología que usamos es muy extraña, es muy probable que $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\text{Fr}(A)$ y A' sean conjuntos difíciles de intuir.

<u>Ejemplo</u>: Considerando $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, vamos a hallar $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, A' y $\text{Fr}(A)$ para $A=[0,1]$. Sabíamos que todos los abiertos (excepto el vacío y el total) son de la forma $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{N}\{x_n\}$, por tanto nunca se cumple $\mathcal{U}\subset A$ y siempre se cumple que $\mathcal{U}\cap A$ contiene infinitos puntos, y lo mismo sucede con $(\mathbb{R}-A)\cap\mathcal{U}$, así pues

$$\text{Int}(A)=\emptyset, \qquad \overline{A} = A' = \text{Fr}(A) = \mathbb{R}.$$

<u>Ejemplo</u>: Si consideramos $X=[0,1]\times[0,1]$ con la topología del orden lexicográfico, entonces la clausura de la línea horizontal $A=\{(x,y)\in X\ :\ 0\le x\le 1,\ y=0\}$ es $\overline{A} = A\cup\{(x,y)\in X\ :\ 0\le x<1,\ y=1\}$. Veámoslo con detalle:

Si un punto no está en el borde superior ni en el borde inferior, no pertenece a $\overline{A}$ ya que existe algún elemento B de la base de la topología del orden lexicográfico (un intervalo vertical) conteniendo al punto y con $A\cap B=\emptyset$. También es claro que $(1,1)\notin\overline{A}$, para verlo basta tomar $B=\big((1,0'5),(1,1)\big]$ que es de la base. Finalmente, los otros puntos del borde superior están siempre contenidos en elementos de la base que necesariamente cortan a A y por tanto pertenecen a $\overline{A}$.



Como es fácil sospechar, los conjuntos $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, A' y $\text{Fr}(A)$ no son del todo independientes. Dos de las relaciones más sencillas se incluyen en el siguiente resultado. La segunda da título a esta sección.

Proposición 3.2: *Sea X un espacio topológico y A uno de sus subconjuntos, entonces*

$$1)\ \overline{A} = A\cup A', \qquad 2)\ \overline{A} = \text{Int}(A)\cup\text{Fr}(A).$$

Dem.: 1) La inclusión $\overline{A} \supset A \cup A'$ es obvia. Por otro lado, si $x \in \overline{A}$, para todo abierto $\mathcal{U}$ con $x \in \mathcal{U}$ se tiene $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ y si $x \notin A$ entonces $(\mathcal{U} - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ y $x \in A'$.

2) El segundo miembro se puede escribir como $\big(\text{Int}(A) \cup \overline{(X-A)}\big) \cap \overline{A}$, con lo que basta probar $\text{Int}(A) = X - \overline{(X-A)}$. Como $\overline{(X-A)}$ es cerrado, $x \in X - \overline{(X-A)}$ si y sólo si existe $\mathcal{U}(x) \subset X - (X-A) = A$, esto es, si y sólo si $x \in \text{Int}(A)$. ■

Ejemplo: Comprobar la segunda propiedad para el conjunto

$$A = \big\{ -\frac{1}{n} - 1 \,:\, n \in \mathbb{Z}^+ \big\} \cup [0,1) \cup \big\{ 2 + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{Z}^+ \big\}$$

incluido en $\mathbb{R}$ con la topología de límite inferior.

Sólo repasaremos los puntos conflictivos mientras que los detalles se dejan como ejercicio por ser análogos a ejemplos anteriores.

Tomando el abierto de la base $B = [1, 1'5)$ se tiene $A \cap B = \emptyset$ así que $1 \notin \overline{A}$. De la misma forma $-1 \notin \overline{A}$. Sin embargo $2 \in \overline{A}$ porque $[2, 2+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. En definitiva, se obtiene $\overline{A} = A \cup \{2\}$. Como $[0,1)$ es abierto y en las otras partes del conjunto no "cabe" ningún abierto, $\text{Int}(A) = [0,1)$. Finalmente, se tiene $\overline{\mathbb{R} - A} = \mathbb{R} - [0,1)$ (nótese que cada punto de las sucesiones está "rodeado" por infinitos puntos que no pertenecen a ellas) y en consecuencia $\text{Fr}(A) = \big(A - [0,1)\big) \cup \{2\}$, y la relación se cumple.

Hay muchas "propiedades" que se cumplen en ejemplos sencillos de $\mathbb{R}^n$ pero que son falsas en general. Por ejemplo, $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cup B)$ o $\text{Int}\big(\text{Fr}(A)\big) = \emptyset$ parecen evidentes con unos cuantos dibujos en $\mathbb{R}^2$, pero no son ciertas. Como regla (por supuesto falsa), la dificultad en demostrar una cosa suele ser directamente proporcional a la cercanía del contraejemplo. Por ello, si nos cuesta mucho probar alguna de estas posibles identidades, antes y después de creernos ignorantes, tendríamos que buscar un contraejemplo que invalide el paso que no sabemos dar. Pues bien, anímese el lector a encontrar sendos contraejemplos que prueben la falsedad de las igualdades del comienzo del párrafo.

Recogemos aquí una de esas pocas propiedades que son universalmente ciertas.

Lema 3.3: *Sea X un espacio topológico. Para cualquier par de subconjuntos A_1, A_2, se cumple*

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Dem.: Como $A_1 \cup A_2 \supset A_1, A_2$ se cumple $\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1}, \overline{A_2}$ y por tanto $\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Sólo resta demostrar que $x \notin \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \Rightarrow x \notin \overline{A_1 \cup A_2}$. Si $x \notin \overline{A_1}$ y $x \notin \overline{A_2}$, entonces $\mathcal{U}_1 = X - \overline{A_1}$ y $\mathcal{U}_2 = X - \overline{A_2}$ son dos abiertos conteniendo a x tales que $\mathcal{U}_1 \cap A_1 = \mathcal{U}_2 \cap A_2 = \emptyset$, por tanto $x \in \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{V} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. Así pues $x \notin \overline{A_1 \cup A_2}$. ■

Es difícil reproducir el proceso dialéctico a seguir, antes descrito, frente a una propiedad que no sabemos si es cierta o no. Quizá ayude el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Estudiar si la propiedad

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$$

es o no cierta en general.

Primero tanteamos con algunos ejemplos; si tenemos suerte y hallamos un contraejemplo habremos terminado. Digamos que hemos probado en $\mathbb{R}$ con $A_n = \{n\}$, $A_n = (n, n+1)$ o $A_n = (-1/n, 1/n)$ para los que la propiedad funciona y no se nos ocurren más ejemplos.

Todo sugiere, por ahora, que es cierta y debemos buscar una demostración. Lo primero que a uno se le ocurre es copiar la anterior, con lo cual obtenemos inmediatamente de la primera parte

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

Pero la segunda parte no es válida porque $\mathcal{V}$ sería la intersección de infinitos abiertos y, por tanto, no necesariamente abierto.

Por consiguiente, tras la última observación, tratamos de fabricar un contraejemplo en que $\mathcal{V}$ no sea abierto. En $\mathbb{R}$ con la usual, si $x \notin \bigcup \overline{A}_n$ pero los A_n están cada vez "más cerca" de $x = 0$ entonces no existirá ningún $\mathcal{V}(x)$ abierto con $\mathcal{V}(x) \cap \bigcup A_n = \emptyset$. Tomemos, por ejemplo, $A_n = \{1/n\}$ y habremos conseguido el contraejemplo.

Naturalmente si tuviéramos que escribir esto en un libro daríamos el contraejemplo y suprimiríamos el proceso mental que nos ha llevado a considerarlo, en la línea de la afirmación de C. F. Gauss de que un arquitecto no deja los andamios al terminar el edificio, redarguyendo así al matemático que lo acusaba de borrar sus huellas como un zorro con su cola.

Aquí hemos tenido la guía de la demostración del lema pero ante una propiedad totalmente desconocida se pueden recorrer los vericuetos más dispares y disparatados. Se deja como ejercicio encontrar el error en las siguientes pruebas $\boxed{\text{falsas}}$ de la propiedad $\boxed{\text{falsa}}$ del ejemplo anterior.

<u>a)</u> Por inducción completa(mente mal): Definiendo

$$\mathrm{Izq}(N) = \overline{\bigcup_{1\le n\le N} A_n}, \qquad \mathrm{Der}(N) = \bigcup_{1\le n\le N} \overline{A}_n,$$

la igualdad $\mathrm{Izq}(N) = \mathrm{Der}(N)$ se cumple para $N = 2$ (por el lema) y si se cumple para N también se cumple para $N+1$ porque el lema implica

$$\mathrm{Izq}(N+1) = \mathrm{Izq}(N) \cup \overline{A}_{N+1} = \mathrm{Der}(N) \cup \overline{A}_{N+1} = \mathrm{Der}(N+1).$$

Por inducción se deduce $\mathrm{Izq}(\infty) = \mathrm{Der}(\infty)$.

<u>b)</u> Por deducción a lo absurdo: Sabemos que $\overline{\bigcup A_n} \supset \bigcup \overline{A}_n$. Supongamos que existiera $x \in \overline{\bigcup A_n}$ tal que $x \notin \bigcup \overline{A}_n$. Por definición de cierre, para todo $\mathcal{U}(x)$ se tiene que cumplir

$\mathcal{U}(x) \cap \bigcup A_n \neq \emptyset$, por consiguiente debe existir algún A_{n_0} tal que $\mathcal{U}(x) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$ y en consecuencia $x \in \overline{A}_{n_0} \subset \bigcup \overline{A}_n$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Recuérdese que tanto a) como b) son demostraciones $\boxed{\text{falsas}}$.

Para terminar esta sección, veremos que en espacios métricos $\overline{A}$ y A' están relacionados con los posibles límites de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Proposición 3.4: *Sea X un espacio métrico y A uno de sus subconjuntos, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de elementos de A, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, convergiendo a x. Además, se puede reemplazar $\overline{A}$ por A' si se impone que $x_n \neq x$.*

Dem.: $\Rightarrow$) Si $x \in \overline{A}$ entonces $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Tomando $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ se tiene $x_n \to x$.

$\Leftarrow$) Si $x_n \to x$ entonces por la definición de convergencia, cualquier bola $B(x, \epsilon)$ contiene infinitos términos de la sucesión, y como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, se tiene $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, lo que implica $x \in \overline{A}$.

La demostración de la segunda parte es similar reemplazando $B(x, \epsilon)$ por $B(x, \epsilon) - \{x\}$ (ejercicio). $\blacksquare$

Aplastar, encoger, estirar

Hace muchas, muchas páginas habíamos demostrado que la continuidad en espacios métricos se podía caracterizar diciendo que la imagen inversa de un abierto es un abierto y de este modo nos podíamos liberar de la tiranía ϵ-δ. En espacios topológicos generales, como no tenemos una distancia, no podemos ni siquiera enunciar la definición ϵ-δ, así que sólo nos queda una posibilidad.

DEFINICIÓN: Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Dada $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es continua si para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_X$. Esto es, si la imagen inversa de un abierto es siempre un abierto.

Observación: Una vez más se recuerda que f^{-1} indica la imagen inversa conjuntista, $f^{-1}(A) = \{x \in X \, : \, f(x) \in A\}$. No se requiere que la función sea inyectiva ni sobreyectiva.

Ya hemos visto que como las bases generan los abiertos, todo lo que funciona bien con ellas funciona bien siempre. La continuidad no es una excepción.

Proposición 3.5: *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $\mathcal{B}$ una base que genera $\mathcal{T}_Y$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.*

Dem.: Cada abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$ y

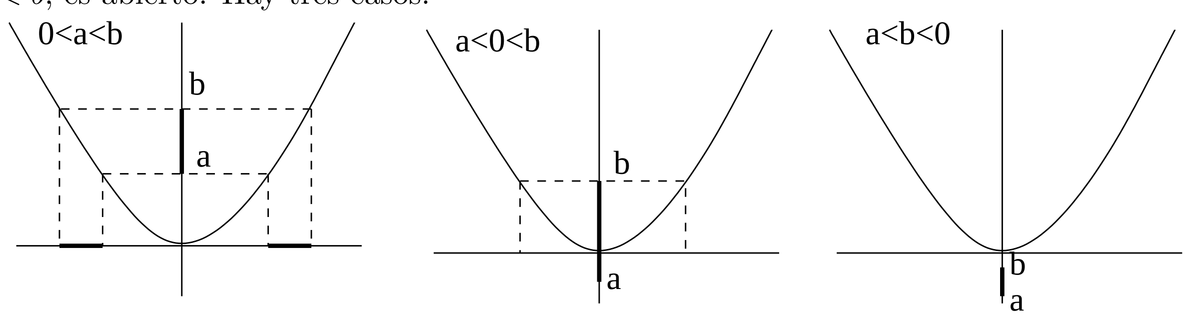
$$\mathcal{U} = \bigcup_\alpha B_\alpha \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

Por consiguiente, si los $f^{-1}(B_\alpha)$ son abiertos, $f^{-1}(\mathcal{U})$ también lo es. ■

Observación: Como la imagen inversa también funciona correctamente con respecto a las intersecciones, el resultado anterior sigue cumpliéndose exigiendo que $\mathcal{B}$ sea subbase en lugar de base.

Ejemplo: Vamos a demostrar la continuidad de $f(x) = x^2$ sin usar ϵ ni δ. Desde luego que suponemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la topología usual.

Según la proposición basta demostrar que $f^{-1}\big((a,b)\big) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < f(x) < b\}$, con $a < b$, es abierto. Hay tres casos:



$f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$ $\quad f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$ $\quad f^{-1}\big((a,b)\big) = \emptyset$

En cualquier caso $f^{-1}\big((a,b)\big)$ es abierto.

Nótese que $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \not\Rightarrow f(\text{abierto}) = \text{abierto}$ porque, $f\big(f^{-1}(A)\big) \neq A$, en general.

Definición: Se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ es abierta si para todo abierto $\mathcal{U} \subset X$, $f(\mathcal{U})$ es abierto en Y. Análogamente, se dice que es cerrada si para todo cerrrado $F \subset X$, $f(F)$ es cerrado en Y.

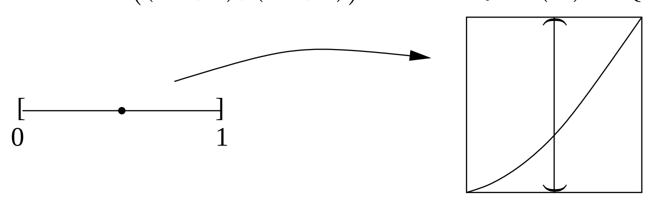
Ejemplo: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$, no es abierta (con la topología usual) porque $f\big((-1,1)\big) = (0,1]$. Por otra parte, se puede comprobar que f es cerrada, pero no lo haremos aquí.

Ejemplo: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, no es cerrada porque $\mathbb{R}$ es cerrado (ya que $\emptyset$ es abierto) pero $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ no es cerrado. Además f es abierta, porque todo abierto es unión de intervalos abiertos y $f\big((a,b)\big) = (e^a, e^b)$.

Si las topologías o los conjuntos se complican, nuestra intuición acerca de la continuidad se pierde.

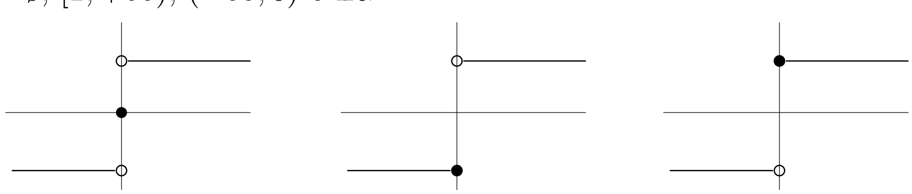
Ejemplo 1: Sea $X = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces con la topología usual, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(1/n) = (-1)^n n$, es continua. Basta recordar que la topología (inducida por la) usual en X es la discreta, así que sea cual sea $f^{-1}(\mathcal{U})$ será abierto, porque cualquier subconjunto de X lo es.

Ejemplo 2: Si $Y = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y $X = [0,1]$ con la topología usual, $f : X \longrightarrow Y$, definida por $f(t) = (t, t^2)$, no es continua. Tomando por ejemplo, la "vertical" $\mathcal{U} = \big((0'5, 0), (0'5, 1)\big)$ se tiene $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{0'5\}$ que no es abierto.



Ejemplo 3: La función $f(x) = x$ no es continua cuando la consideramos como $f : X \longrightarrow Y$ donde $X = (1,3] \cup (5,7)$ tiene la topología del orden e $Y = \mathbb{R}$ la usual, porque $f^{-1}\big((2,4)\big) = (2,3]$ que no es abierto en la del orden. Si diéramos a X la topología inducida por la usual, sí sería continua, y el intervalo $(2,3]$ sería abierto porque $(2,3] = (2,4) \cap X$.

Ejemplo 4: Consideramos $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$, con $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -1$ y $f_3(0) = 1$. Si $f_i : X \longrightarrow Y$, $i = 1,2,3$, donde $Y = \mathbb{R}$ con la topología usual y $X = \mathbb{R}$ con la topología de límite inferior, entonces f_1 y f_2 no son continuas pero f_3 sí lo es; porque $f_1^{-1}\big([-0'5, 0'5)\big) = \{1\}$, $f_2^{-1}\big([-2, 0)\big) = (-\infty, 0]$ no son abiertos mientras que $f_3^{-1}\big([a,b)\big) = \emptyset$, $[1, +\infty)$, $(-\infty, 0)$ ó $\mathbb{R}$.



Como los abiertos de la base de la topología de límite inferior son $[a,b)$ con $a<b$, sólo vemos lo que ocurre *hacia adelante*. Como ayuda a nuestra intuición podemos pensar que el eje X representa el tiempo, de manera que los únicos acontecimientos alcanzables son los del futuro inmediato y no podemos volver a lo que ya ha sucedido. Así, un observador que viajase por la gráfica de f_1 o de f_2 partiendo del punto $(0, f_1(0))$ o $(0, f_2(0))$, respectivamente, se vería obligado a saltar en el siguiente instante, pero no así el situado en $(0, f_3(0))$ viajando por la gráfica de f_3. Por ello, ni f_1 ni f_2 son continuas mientras que f_3 sí lo es ya que su aparente discontinuidad sólo es detectable yendo *hacia atrás*, hacia el pasado. De hecho se puede probar que, con estas topologías, una función f es continua si y sólo si $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, con el sentido usual del límite. Por otra parte, ni f_1 ni f_2 ni f_3 son continuas con la topología usual porque con ella sí nos podemos mover hacia adelante y hacia atrás dentro de cada abierto.

> *¿Acaso no será siempre irreversible el tiempo? Hay momentos en que uno tiene la impresión de que puede hacer lo que quiere, adelantarse o retroceder, que esto no tiene importancia; y otros en que se diría que las mallas se han apretado, y en esos casos se trata de no errar el golpe, porque sería imposible empezar de nuevo.*

Aunque sólo estamos interesados en la *continuidad global* podemos copiar la definición de continuidad en $x=a$ en espacios métricos ($\forall\epsilon\ \exists\delta\ :\ B(a,\delta)\subset f^{-1}\big(B(f(a),\epsilon)\big)$).

Definición: Dados $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$, se dice que f es <u>continua en el punto a</u> si para todo entorno de $f(a)$, $\mathcal{U}(f(a))\in\mathcal{T}_Y$, existe un entorno de a, $V(a)\in\mathcal{T}_X$, tal que $V(a)\subset f^{-1}\big(\mathcal{U}(f(a))\big)$.

Teorema 3.6: *Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es continua*

2) *f es continua en el punto a para todo $a\in X$*

3) *F cerrado en $Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ cerrado en X*

4) *$A\subset X \Rightarrow f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.*

<u>Dem.</u>: 1) $\Leftrightarrow$ 2) La implicación "$\Rightarrow$" es obvia. Para la otra implicación, dado $\mathcal{U}$ abierto de Y, para cada $x\in f^{-1}(\mathcal{U})$ se tiene que $f(x)\in\mathcal{U}$ y por tanto existe $\mathcal{V}(x)\subset f^{-1}(\mathcal{U})$. Tomando $W=\bigcup\mathcal{V}(x)$, donde x recorre $f^{-1}(\mathcal{U})$, se tiene $f^{-1}(\mathcal{U}) = W =$ abierto.

1) $\Leftrightarrow$ 3) Es una consecuencia sencilla de que el complementario de la imagen inversa es la imagen inversa del complementario. (De verdad que es fácil).

3) $\Rightarrow$ 4) Trivialmente se tiene (sin ninguna hipótesis) $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Como $\overline{f(A)}$ es cerrado, tomando clausuras se obtiene $\overline{A}\subset\overline{f^{-1}(f(A))}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ lo que implica el resultado deseado.

4) $\Rightarrow$ 3) Si F es cerrado, tomando $A=f^{-1}(F)$ se tiene $f(\overline{f^{-1}(F)})\subset\overline{f(f^{-1}(F))}\subset\overline{F}=F$, por tanto $\overline{f^{-1}(F)}\subset f^{-1}(F)$ y se concluye que $f^{-1}(F)$ es cerrado. ■

También se puede demostrar que f es continua $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(A))$ (ejercicio) y hay otras muchas equivalencias.

Notación: Dados $A \subset X$ y $f : X \longrightarrow Y$ se suele denotar con $f\big|_A$ a la *restricción* de f a A, esto es, $f\big|_A = f \circ j$ donde $j : A \longrightarrow X$ es la inclusión $j(x) = x$. Dicho de otra forma, $f\big|_A$ es lo mismo que f pero prohibimos evaluarla fuera de A.

Algunas propiedades bastante naturales de las funciones continuas están recogidas en el siguiente resultado.

Teorema 3.7: *Sean X, Y, Z, espacios topológicos.*

1) *Si $A \subset X$, la inclusión $j : A \longrightarrow X$, $j(x) = x$, es continua.*

2) *Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ son continuas, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ también lo es.*

3) *$f : X \longrightarrow Y \times Z$ es continua $\Leftrightarrow \pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.*

4) *(Pasting Lemma ¿Lema del pegado?) Si $X = A \cup B$ con A, B cerrados en X, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua $\Leftrightarrow f\big|_A$ y $f\big|_B$ lo son.*

Observación: Naturalmente, en los apartados 1) y 4) en los que aparecen subespacios de X, se sobreentiende que la topología que se toma es la relativa.

Dem.: 1) $\mathcal{U} \subset X$ abierto $\Rightarrow j^{-1}(\mathcal{U}) = j^{-1}(\mathcal{U} \cap A) = \mathcal{U} \cap A$ abierto (en la topología relativa).

2) $\mathcal{U} \subset Z$ abierto $\Rightarrow g^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\subset Y \Rightarrow f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{U})\big) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\subset X$.

3) $\pi_1 : Y \times Z \longrightarrow Y$ y $\pi_2 : Y \times Z \longrightarrow Z$ son funciones continuas porque para cada abierto $\mathcal{U} \subset Y$ ó $\mathcal{V} \subset Z$, $\pi_1^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \times Z$, $\pi_2^{-1}(\mathcal{V}) = Y \times \mathcal{V}$, por tanto la implicación "$\Rightarrow$" se deduce de 2). Por otra parte, si $B_X \times B_Y$ es un abierto de la base, $x \in f^{-1}(B_X \times B_Y)$ si y sólo si $(\pi_1 \circ f)(x) \in B_X$ y $(\pi_2 \circ f)(x) \in B_Y$ (tras pensarlo un poco, es obvio) de donde

$$f^{-1}(B_X \times B_Y) = (\pi_1 \circ f)^{-1}(B_X) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(B_Y)$$

y se deduce la otra implicación.

4) Por 1), la implicación "$\Rightarrow$" es inmediata. Para la otra, vemos que para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-1}(F) = \big(f\big|_A\big)^{-1}(F) \cup \big(f\big|_B\big)^{-1}(F)$ (trivial si uno entiende la notación), pero como $f\big|_A$ y $f\big|_B$ son continuas, $\big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ y $\big(f\big|_B\big)^{-1}(F)$ serán cerrados en A y en B, respectivamente. De ahí se deduce que también lo son en X porque A y B son cerrados. (A cámara lenta: $\big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ cerrado en $A \Rightarrow \big(f\big|_A\big)^{-1}(F) = C \cap A$ con C cerrado en X $\Rightarrow \big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ cerrado en X). ■

El nombre del cuarto apartado viene de que f es el resultado de *pegar* las funciones $f\big|_A$ y $f\big|_B$. De hecho en otras formulaciones se parte de $f_1 : A \longrightarrow Y$, $f_2 : B \longrightarrow Y$ que coinciden en $A \cap B$ y se construye f tal que $f\big|_A = f_1$, $f\big|_B = f_2$.

Ejemplo: En el último capítulo, dadas dos funciones continuas $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$, $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ con $\alpha(1) = \beta(0)$, consideraremos

$$\gamma(t) = \alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

(nótese que $\alpha(1) = \beta(0)$ implica que γ está bien definida). El cuarto apartado nos dice que como $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ son cerrados en $[0,1]$ y cada parte de la definición es continua, entonces γ también lo es. Para los lectores perdidos, con la notación anterior

$$X = [0,1], \qquad A = [0,1/2], \qquad B = [1/2,1], \qquad \gamma\big|_A(t) = \alpha(2t), \qquad \gamma\big|_B(t) = \beta(2t-1).$$

Ahora vamos a una de las definiciones centrales del curso, una de esas que hay que marcar con el rotulador verde *fosforito*.

DEFINICIÓN: Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es un homeomorfismo y que X e Y son homeomorfos si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.

Antes de seguir, es obvio que decir que una función biyectiva, $f : X \longrightarrow Y$, es un homeomorfismo es equivalente a cualquiera de las afirmaciones citadas a continuación. Y es tan obvio, que quien necesite una demostración debería ser castigado a volver, al menos, al comienzo de la sección.

- $\mathcal{U} \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow f(\mathcal{U}) \subset Y$ es abierto.
- f es continua y abierta.
- $F \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow f(F) \subset Y$ es cerrado.
- f es continua y cerrada.

Recuérdese que en todos los casos hemos dado por supuesto que f es biyectiva. Una última equivalencia más compleja es

- $\forall A \subset X \quad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

La cual se deduce notando que la continuidad de f y f^{-1} se traduce en que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ y $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ para todo $A, B \subset X$. Tomando $B = f(A)$, se tiene la igualdad.

¿Por qué ese extraño nombre de *homeomorfismo*? Como otras veces, la excusa es la etimología: homeo-morfo = semejante-forma, aunque también es cierto que a la cardiode (= parecida al corazón) se la llama así y cualquiera sabe que no es exactamente de corazón de lo que tiene forma.

¿Por qué son importantes? Un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ transforma en correspondencia uno a uno los abiertos de X en los de Y y viceversa. Así que *dos espacios homeomorfos son indistinguibles desde el punto de vista topológico*, sólo difieren en el "nombre" de los abiertos. De alguna forma, la Topología estudia lo que es invariante bajo homeomorfismos, al igual que la Teoría de Grupos lo que es invariante bajo isomorfismos, la Geometría Proyectiva lo que es invariante por transformaciones proyectivas, etc. (¿alguien está de acuerdo?). Esta manera de estudiar espacios y estructuras a través de las transformaciones que los dejan invariantes es en lo que consiste el llamado *Erlanger Programm* de F. Klein.

Cuando a una función sólo le falta ser sobreyectiva para llegar a ser homeomorfismo recibe el nombre de *inmersión*, lo cual es una notación un poco ambigua en castellano.

DEFINICIÓN: Se dice que $f : X \longrightarrow Y$ es una <u>inmersión</u> si $f : X \longrightarrow \operatorname{Im} f$ es un homeomorfismo.

En los siguientes ejemplos suponemos siempre la topología usual (o la inducida por ella). Como es habitual, S^1 denota la circunferencia unidad $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ que en coordenadas polares también se puede escribir como $\{(r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) : r=1\}$.

<u>Ejemplo 1</u>: $X = [0,1]$ e $Y = [a,b]$, con $a < b$, son homeomorfos. Basta considerar la función $f(x) = (b-a)x + a$ que estira y traslada convenientemente $[0,1]$. Evidentemente f es biyectiva y continua y $f^{-1}(y) = (y-a)/(b-a)$ también lo es (así lo pone en los libros de Cálculo).

<u>Ejemplo 2</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ no es un homeomorfismo ni una inmersión porque f no es inyectiva y por tanto no admite inversa. La continuidad de f se deduce de la de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ porque podemos considerar $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $(\pi_1 \circ f)(x) = \cos x$, $(\pi_2 \circ f)(x) = \operatorname{sen} x$ son continuas (de nuevo apelamos a conocimientos previos de Cálculo).

<u>Ejemplo 3</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ no es un homeomorfismo porque no es sobreyectiva, ya que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$. Sin embargo sí que es inmersión porque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+$ admite la inversa $f^{-1}(y) = \log y$ que es continua, al igual que la función.

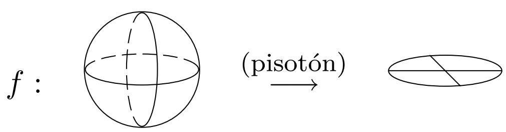
<u>Ejemplo 4 (interesante)</u>: La función $f : X \longrightarrow Y$, con $X = [0,2\pi)$, $Y = S^1$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, es continua y biyectiva pero <u>no</u> es un homeomorfismo ni una inmersión. Este hecho debería extrañarnos porque los libros de introducción al Cálculo Real dicen que en $\mathbb{R}$, f continua y biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ continua. Pero éste es un fenómeno particular de $\mathbb{R}$ que no se extiende a otros espacios aunque sean subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con la usual.

Veamos que la inversa no es una función continua. Dicha función inversa, asigna a cada punto de S^1 el ángulo, en el rango $[0,2\pi)$ que subtiende su radiovector.

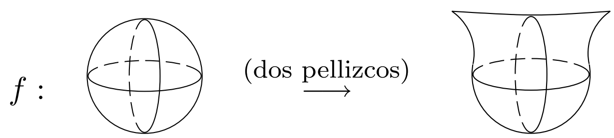
Consideremos $\mathcal{U} = [0,\pi/2)$ que es abierto en X (con la topología inducida) por ser $\mathcal{U} = (-\pi/2,\pi/2) \cap X$. Si f^{-1} fuera continua, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U})$ sería abierto en Y, pero $f(\mathcal{U})$ es, en polares, $\{r=1,\ 0 \le \theta < \pi/2\}$ que no es abierto porque cualquier bola abierta, $B \subset \mathbb{R}^2$, que contenga a $r=1$, $\theta=0$, contendrá también a puntos con $\theta \in (2\pi-\epsilon, 2\pi)$ y por tanto $B \not\subset f(\mathcal{U})$.

Ejemplo 5: Los espacios $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Basta considerar los homeomorfismos $f(x) = \tan(\pi x/2)$ ó $f(x) = x/(1-|x|)$ ó $f(x) = x/(1-x^2)$... Procediendo como en el primer ejemplo, se tiene que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto. El próximo capítulo veremos que no es homeomorfo a ninguno cerrado.

La idea intuitiva, al menos en espacios métricos, es que las funciones continuas aplican puntos muy, muy próximos en puntos muy, muy próximos y pueden pegar los pares de puntos (ejemplo 2) o acercar infinitamente un punto a otros (ejemplo 4). Sin embargo los homeomorfismos se limitan a contraer o expandir distancias sin que lleguen a colapsar; esta es la idea de la definición primera dada por A.F. Möbius en 1858 antes de que el resto de la banda la hiciera totalmente rigurosa.



f es continua (no homeomorfismo)

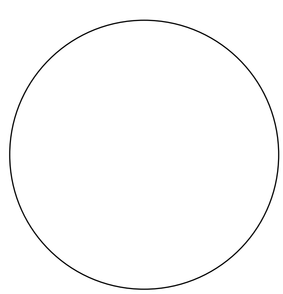


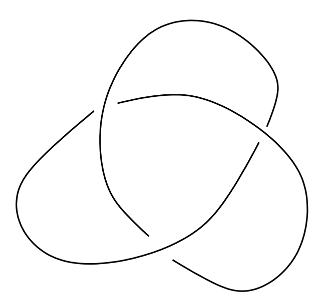
f es homeomorfismo

De modo que, en cierta manera, con las salvedades indicadas más adelante, la idea de función continua está asociada a "aplastar" y la de homeomorfismo a "encoger" o "estirar" (a veces se dice que la Topología es la Geometría de la banda de goma). No hay manera topológica de diferenciar, por ejemplo, $\diamondsuit$, $\bigcirc$, $\bigtriangledown$ y $\heartsuit$. Todos estos objetos corresponden a un mismo tipo topológico y adjetivos como poligonal, circular, triangular, cardiáceo, no tienen un significado intrínseco en Topología.

> *Creía que era posible resplandecer de odio o de muerte. ¡Qué error! Sí, realmente, pensaba que existía "el Odio", que venía a posarse en la gente y a elevarla sobre sí misma. Naturalmente, sólo existo yo, yo que odio, yo que amo. Y entonces soy siempre la misma cosa, una pasta que se estira, se estira... y es siempre tan igual que uno se pregunta cómo se le ha ocurrido a la gente inventar nombres, hacer distinciones.*

La idea intuitiva antes señalada y nuestra visión *erretresiana* muchas veces confunden el concepto de homeomorfismo con el de familia continua de homeomorfismos. Un homeomorfismo no requiere necesariamente una deformación que se vaya haciendo poco a poco. Por ejemplo, S^1 y el nudo trébol son homeomerfos (¿sabría el lector por qué?) y sin embargo si S^1 fuera de goma tendríamos que vivir en $\mathbb{R}^4$ para poder deformarlo continuamente poco a poco hasta obtener el nudo trébol. En $\mathbb{R}^3$ es imposible (pero demostrarlo es bastante difícil).

$S^1 =$ 

Nudo trébol = 

Hausdorff y cosas raras

Cuando F. Hausdorff dio su definición de topología (en 1914 en su libro "*Grundzüge der Mengenlehre*") incluyó una propiedad que no es equivalente a ninguna de las tres que nosotros hemos exigido, y era que cualquier par de puntos pudiera separarse mediante un par de abiertos.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad de Hausdorff o que es un espacio T_2, si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos de ellos. Esto es, $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ tales que $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset$.

A Hausdorff no le parecía muy decente un espacio en el que dos puntos vecinos estuvieran tan próximos que no hubiera forma de construirles casas separadas. El desarrollo ulterior de la Topología y el sadismo de los fanáticos dieron lugar a ejemplos de cierto interés en los que se podría construir cada una de las dos casas pero no las dos al mismo tiempo.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 si para cada pareja de puntos disitntos $x, y \in X$ existen entornos $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ tales que $x \notin \mathcal{V}(y)$, $y \notin \mathcal{U}(x)$.

La historia sigue y al menos existen ya T_0, T_1, T_2, $T_{5/2}$, T_3, $T_{7/2}$, T_4 y T_5 (seguramente haya más). Cuanto mayor es el subíndice más exigente es la propiedad. La "T" es la inicial de *separación* en alemán, de ahí la notación, aunque también puede influir que quien introdujo la palabra en este contexto se apellidaba Tietze. Como orientación diremos que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual las cumple todas y que algunas de ellas reflejan la posibilidad de que cada función continua definida en un cerrado admita una *extensión* continua, con ciertas propiedades, a todo el espacio. (Nota para los muy repetidores: el teorema de Hahn-Banach puede considerarse un resultado en esta dirección para espacios lineales, incluso de dimensión infinita).

Esto es lo que respecta a los axiomas llamados de separación. Veamos ahora los de numerabilidad.

Para estudiar convergencia y continuidad en espacios métricos habíamos usado en las demostraciones sucesiones de bolas abiertas, $B(x, 1/n)$ o $B(x, \epsilon_n)$, que se contraían. Es posible encontrar espacios topológicos muy raros tales que las únicas familias de abiertos que se contraen bien alrededor de un punto no son numerables; esencialmente esto provoca que las sucesiones no representen bien la topología del espacio.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el primer axioma de numerabilidad, si para cualquier $x \in X$ existe una colección numerable de abiertos $\{ \mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \ldots\}$ tales que cualquier entorno de x, $\mathcal{U}(x)$, contiene necesariamente a alguno de ellos.

Muchas veces se dice que $\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \ldots\}$ es una base de entornos de x porque si hacemos variar $x \in X$, la unión de estas familias da lugar a una base de la topología (ejercicio sencillo pero como esto es tan lioso pocos lo completarán).

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, si alguna de sus bases es numerable.

Seguro que el lector se pregunta el porqué de estas definiciones. Como veremos después, los espacios que no cumplen estas propiedades tienen algunas características monstruosas. Dándoles un nombre las trivializamos y podemos evitarlos en nuestros teoremas. Es lo mismo que cuando a uno le dicen que hay una curva continua $\alpha : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que rellena todo el plano ($\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{R}^2$), puede contestar: "¡Bah!, es una curva de Peano". Ahora nos dirán que el límite de una sucesión en un espacio topológico no es único y replicaremos: "¡Bah!, no es Hausdorff".

> *Y otro encontrará que algo le raspa en la boca. Y se acercará al espejo, abrirá la boca; y su lengua se habrá convertido en un enorme ciempiés vivo, que agitará las patas y le arañará el paladar. Querrá escupirlo, pero el ciempiés será una parte de sí mismo y tendrá que arrancárselo con las manos. Y aparecerán multitud de cosas para las cuales habrá que buscar nombres nuevos: el ojo de piedra, el gran brazo tricornio, el pulgar-muleta, la araña-mandíbula.*

Casi todas las monstruosidades tienen que ver con la convergencia. Si copiamos la definición que dimos en el primer capítulo cambiando bolas abiertas por entornos, obtenemos:

DEFINICIÓN: Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ converge a $l \in X$ si

$$\forall \mathcal{U}(l) \in \mathcal{T} \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ : n > N \ \Rightarrow \ x_n \in \mathcal{U}(l).$$

Como en los chistes, veamos primero las buenas noticias y después las malas.

- La Proposición 1.1 y la Proposición 3.4 también se cumplen espacios topológicos que satisfagan el primer axioma de numerabilidad. La demostración es un ejercicio (que nadie va a hacer).

Proposición 3.8: *Si X es Hausdorff, el límite, si existe, es único.*

Dem.: Si $x_n \to l_1$ y $x_n \to l_2$ con $l_1 \neq l_2$, tomando $\mathcal{U}_1(l_1) \cap \mathcal{U}_2(l_2) \neq \emptyset$ se llega a una contradicción con que $x_n \in \mathcal{U}_1(l_1)$, $x_n \in \mathcal{U}_2(l_2)$ a partir de cierto n. ■

Proposición 3.9: *X es T_1 si y sólo si los puntos son conjuntos cerrados.*

Dem.: $\Rightarrow$) Dado $y \neq x$, $\exists \mathcal{V}(y) : x \notin \mathcal{V}(y) \Rightarrow \mathcal{V}(y) \subset X - \{x\} \Rightarrow \{x\}$ es cerrado.

$\Leftarrow$) Basta tomar $\mathcal{U}(x) = X - \{y\}$, $\mathcal{V}(y) = X - \{x\}$ en la definición. ■

DEFINICIÓN: Se dice que un subconjunto A es denso en el espacio topológico X si $\overline{A} = X$.

Proposición 3.10: *Si X cumple el segundo axioma de numerabilidad entonces tiene un subconjunto numerable denso.*

Dem.: Basta elegir un punto arbitrario de cada elemento de la base. El conjunto formado por ellos es el buscado. (Ejercicio: completar los detalles). ■

Esto entra dentro de las buenas noticias porque encontrar subconjuntos densos "sencillos" es muy conveniente en muchos temas de análisis. Por ejemplo, el lema de Riemann-Lebesgue dice que para toda función integrable en $[0,1]$ se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx = 0.$$

Si $f \in C^1([0,1])$ es fácil demostrarlo integrando por partes. Si supiéramos que $C^1([0,1])$ es denso en el espacio de las funciones integrables, con la (semi-)distancia $\int |f-g|$, para probar el lema de Riemann-Lebesgue sería suficiente decir (como hacen algunos libros): "Por densidad, basta considerar $f \in C^1([0,1])$ e integrar por partes. Q.E.D.".

Como la propiedad de la proposición es interesante, recibe un nombre especial.

Definición: Se dice que un espacio topológico es <u>separable</u> si tiene un subconjunto numerable denso.

Un conocido teorema debido a K. Weierstrass afirma que cualquier función continua en $[0,1]$ se puede aproximar uniformemente mediante polinomios. Como todo polinomio se puede aproximar por otro con coeficientes racionales, deducimos que las funciones continuas con la distancia $\sup|f-g|$ forman un espacio separable y que todo teorema acerca de funciones continuas que sea preservado por aproximaciones uniformes basta demostrarlo para polinomios.

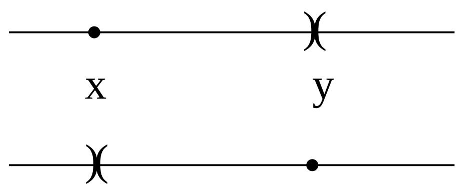
Ahora veamos una galería de los horrores de ejemplos y contraejemplos.

<u>Ejemplo</u>: El espacio $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ con la topología

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset, X, \{\spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit\}\{\spadesuit, \heartsuit\}\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}\big\}$$

no es Hausdorff y ni siquiera T_1, porque, por ejemplo, no existe ningún entorno de $\clubsuit$ que no contenga a $\spadesuit$. La sucesión $\spadesuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit, \dots$ tiene dos límites: $\clubsuit$ y $\diamondsuit$. Y la sucesión $\spadesuit, \spadesuit, \spadesuit, \spadesuit, \dots$ tiene tres límites. Esto está relacionado con que $\overline{\{\spadesuit\}} = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ (en particular, los puntos de X no son siempre cerrados).

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es Hausdorff pero sí T_1.



Para ver que es T_1 basta elegir $\mathcal{U}(x) = X - \{y\}$, $\mathcal{V}(y) = X - \{x\}$. Imaginando la forma de los abiertos es evidente que no es Hausdorff. Una prueba formal es la siguiente: $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset \Rightarrow X = X - \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \big(X - \mathcal{U}(x)\big) \cup \big(X - V(y)\big)$ y esto es imposible porque ambos conjuntos son finitos.

<u>Observación:</u> Es fácil comprobar que todo espacio métrico es T_2 (ejercicio), así que no existen distancias que induzcan las topologías indicadas en los dos ejemplos anteriores.

<u>Ejemplo</u>: La base habitual de $\mathbb{R}$ con la la topología usual no es numerable, sin embargo se satisfacen los dos axiomas de numerabilidad.

Basta comprobar el segundo que es más exigente (¿está claro?). Y para ello es suficiente verificar que la siguiente familia numerable de intervalos racionales

$$\mathcal{B} = \big\{(a,b) \,:\, a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\big\},$$

es una base de la usual (ejercicio). Según sabemos, debe existir un conjunto numerable denso, un ejemplo es $\mathbb{Q}$ ya que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey es un espacio separable que no satisface el segundo axioma de numerabilidad pero sí el primero.

Tomando $\mathcal{U}_n(x) = [x, x + 1/n)$ se sigue inmediatamente el primer axioma. Por otra parte, como antes, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto numerable denso. Viendo el ejemplo anterior, uno estaría tentado a decir que se cumple el segundo axioma tomando la base

$$\mathcal{B}' = \big\{[a, b) \,:\, a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\big\},$$

pero no genera la topología de Sorgenfrey porque no existe $B(\sqrt{2}) \in \mathcal{B}'$ tal que $B(\sqrt{2}) \subset [\sqrt{2}, 2)$. La demostración de que no puede existir una base, $\mathcal{B}$, numerable es ingeniosa pero breve: Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $B_x \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, +\infty)$, ahora si $y \neq x$, digamos $x < y$, se cumple $B_x \neq B_y$ porque $x \notin [y, +\infty)$. Como para números reales distintos hemos encontrado elementos de $\mathcal{B}$ distintos, el cardinal de $\mathcal{B}$ es al menos el de $\mathbb{R}$.

Observación: Se puede demostrar que si la topología de Sorgenfrey estuviera inducida por una distancia, como $\mathbb{Q}$ es denso, las bolas de centro y radio racionales formarían una base numerable (ejercicio). Como no satisface el segundo axioma, se concluye que no existe tal distancia.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no cumple el primer axioma de numerabilidad.

Aplicamos una versión en miniatura de la *prueba diagonal* de Cantor. Sean $\mathcal{U}_1(x)$, $\mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x) \dots$ como en la definición, entonces

$$\mathcal{U}_1(x) = X - A_1, \qquad \mathcal{U}_2(x) = X - A_2, \qquad \mathcal{U}_3(x) = X - A_3, \qquad \dots$$

donde A_n son conjuntos finitos. Eligiendo $y \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, con $y \neq x$, se tiene que $\mathcal{U} = X - \{y\} \Rightarrow \mathcal{U}_1(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_2(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_3(x) \not\subset \mathcal{U}, \dots$ etc.

Ejemplo: Sea en $\mathbb{R}$ la topología en la que $\mathcal{U}$ es abierto si y sólo si $\mathcal{U} = \emptyset$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ó $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ para alguna sucesión real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces no existen conjuntos numerables densos. Si A fuera uno de ellos, entonces $\mathcal{U} = \mathbb{R} - A$ sería abierto y, por tanto, $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \notin \overline{A}$. Se puede probar como antes que esta topología no cumple el primer axioma de numerabilidad.

La aproximación de puntos del cierre por sucesiones tampoco se cumple en este ejemplo. Si $A = [0, 1]$ entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$, en particular $3 \in \overline{A}$, pero no existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ con $x_n \to 3$ porque $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es un abierto que contiene a 3 pero no contiene a ningún término de la sucesión. Parece que para recuperar la Proposición 3.4 debiéramos considerar algo así como "sucesiones no numerables", esto es, indizadas por números reales en vez de por los naturales (x_r en vez de x_n), lo que da lugar a conceptos como las *redes* y otras palabrotas dignas del primer cine de terror (¿qué tal la invasión de los *ultrafiltros*?) que en cursos de Análisis de algunas ingenierías se emplean para evitar la masificación.

Para terminar, diremos a título meramente informativo, como cultura particular, que los axiomas de separación y numerabilidad están relacionados con los *teoremas de* *metrización* que nos dicen cuando un espacio topológico es metrizable (admite una distancia que induce la topología dada). Un ejemplo es un teorema de P. Urysohn de 1925 que afirma que si un espacio es T_4 (espacio en el que se pueden separar mediante abiertos, no sólo puntos, sino también cerrados disjuntos) y verifica el segundo axioma de numerabilidad, entonces es metrizable. Un famoso teorema de J. Nagata e Y. Smirnov, de principios de los 50, da condiciones necesarias y suficientes para la metrizabilidad pero es más difícil de enunciar.