

# 1. Espacios Métricos

## ¿Cuál es la diferencia entre cerca y lejos?

“Ahora estoy cerca”, “Ahora estoy lejos”. Así nos lo explicaba *Coco* en *Barrio Sésamo* al tiempo que se situaba a menor o mayor distancia de la cámara. Desde luego que nosotros, para hacer Matemáticas, tenemos que concretar nuestra intuición en números, letras y funciones, así que como primera aproximación convendremos que la distancia es una función que a cada par de objetos distintos (por ejemplo, la cámara y *Coco*) le asigna un número real positivo (su “separación”). Sin embargo basta considerar unos ejemplos para concluir que esta función no puede ser arbitraria. Por ejemplo, si pudiéramos definir la distancia  $d(x, y) = |x - 2y|$  en el conjunto de números reales, ocurrirían cosas demasiado raras para que las permitamos: La distancia entre 100 y 50 sería cero pero la de 50 a 100 sería 150, es decir, 100 estaría muy cerca, infinitamente cerca, de 50, pero 50 estaría lejos de 100. Y si pudiéramos tomar  $d(x, y) = (x - y)^2$  resulta que para ir de 0 a 2 tendríamos que caminar 4 unidades pero si vamos de 0 a 1 y después de 1 a 2 caminamos menos, ya que  $d(0, 1) + d(1, 2) = 2$  pero ¿cómo puede tardar menos el autobús cuantas más paradas haga? Estas dificultades sugirieron a los matemáticos de principios del siglo XX, especialmente a M. Fréchet, la siguiente definición general y rigurosa que se ajusta a las necesidades intuitivas y matemáticas y evita casos extraños como los anteriores.

**DEFINICIÓN:** Sea  $X$  un conjunto. Se dice que  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  define una distancia (o métrica) en  $X$  si se cumplen las propiedades

- 1)  $d(x, y) \geq 0$  con igualdad si y sólo si  $x = y$
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Desigualdad triangular).

En estas condiciones, se dice que el par  $(X, d)$  es un espacio métrico.

**Notación:** Con el abuso de notación obvio, muchas veces se dice que  $X$ , en vez de  $(X, d)$ , es un espacio métrico si se da por supuesto cuál es la distancia  $d$ . Por otra parte, cuando se habla de una función definida en el espacio métrico  $(X, d)$  uno se refiere a una función definida en  $X$ , pero queriendo hacer énfasis en que se va a utilizar la distancia  $d$  (por ejemplo para estudiar la continuidad).

**Ejemplo-definición:** La distancia más común en  $\mathbb{R}$  es la definida por  $d(x, y) = |x - y|$  y se llama distancia usual.

Es fácil comprobar todas las propiedades. La desigualdad triangular se vuelve tan obvia como  $|a + b| \leq |a| + |b|$  tomando  $a = x - y$ ,  $b = y - z$ .

**Ejemplo-definición:** En  $\mathbb{R}$  hay infinidad de distancias posibles. Aunque pudiera extrañar a Cervantes, la más tonta es la distancia discreta, llamada así porque separa igualmente cada par de puntos, y está definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Ejemplo: La distancia usual se generaliza a  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente forma:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Si uno prefiere ser menos sintético,

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Comprobar las propiedades 1) y 2) es trivial, pero probar 3) es realmente difícil sin conocer la llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz(-Buniakowski)

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad \text{esto es,} \quad (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2.$$

Dándola por supuesto, demostrar la desigualdad triangular para esta distancia se reduce al truco anterior de escribir  $a_i = x_i - y_i$ ,  $b_i = y_i - z_i$ . Tras elevar al cuadrado y efectuar algunas simplificaciones, la triangular es equivalente a Cauchy-Schwarz.

Por razones de completitud damos aquí una demostración de esta última desigualdad. Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y suponiendo  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , se tiene

$$0 \leq \|\vec{a} - x\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2x\vec{a} \cdot \vec{b} + x^2\|\vec{b}\|^2 = \left(\|\vec{b}\|x - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)^2 + \frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2}.$$

Tomando  $x = \vec{a} \cdot \vec{b} / \|\vec{b}\|^2$  se obtiene  $0 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ .

Ejemplo: En cualquier conjunto, por raro que sea, se puede definir la distancia discreta, con la misma definición dada en  $\mathbb{R}$ . En  $X = \{\odot, \ominus, \otimes\}$  se tendría

$$\begin{aligned} d(\odot, \odot) &= 0, & d(\ominus, \ominus) &= 0, & d(\otimes, \otimes) &= 0 \\ d(\odot, \ominus) &= 1, & d(\odot, \otimes) &= 1, & d(\ominus, \otimes) &= 1. \end{aligned}$$

Ejemplo: Dados dos mensajes de la misma longitud se define su *distancia de Hamming*,  $d_H$ , como el número de letras correspondientes desiguales (¿por qué es una distancia?). Por ejemplo

$$d_H(\text{No quiero verte más}, \text{Yo quiero verte más}) = 1$$

de modo que distancia pequeña no implica significados parecidos, lo que puede llevar a graves confusiones. Para evitar errores en la transmisión, sobre todo si el canal no es muy fiable, se intenta aumentar la distancia de Hamming de mensajes parecidos. La forma más obvia, empleada por muchas madres y pedigüños, es repetir varias veces el mensaje; otra manera consiste en añadir alguna nueva letra obtenida a partir de las otras con alguna operación sencilla (el *byte* de paridad en informática). Métodos matemáticos mucho más complicados de la Teoría de Códigos, permiten detectar y corregir cientos de miles de errores cuando oímos un disco compacto (véase en la hemeroteca: J.H. van Lint “*Mathematics and the Compact Disc*” Nieuw Archief voor Wiskunde 16 N.3 pp. 183-190, 1998).

Ejemplo: En  $\mathbb{R}$ ,  $d_1(x, y) = \min(|x - y|, 1)$  define una distancia sin embargo  $d_2(x, y) = \max(|x - y|, 1)$  no la define.

Es evidente que  $d_2$  no cumple la primera propiedad porque  $d_2(x, x) \neq 0$ . Por otro lado, la única propiedad que no es obvia para  $d_1$  es la triangular. Si  $|x - y| \geq 1$  ó  $|y - z| \geq 1$  entonces  $d_1(x, z) \leq d_1(x, y)$  o  $d_1(x, z) \leq d_1(y, z)$  con lo cual se satisface. En otro caso, si  $|x - y| < 1$  y  $|y - z| < 1$ , se tiene

$$d_1(x, y) + d_1(y, z) = |x - y| + |y - z| \geq |x - z| \geq d_1(x, z).$$

Veamos un ejemplo muy interesante desde el punto de vista matemático.

Ejemplo: En el conjunto de funciones continuas  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fórmula

$$d(f, g) = \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

define una distancia. Comprobar la propiedad triangular requiere el análogo integral de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left( \int_0^1 f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 (f(x))^2 dx \cdot \int_0^1 (g(x))^2 dx$$

que se prueba de forma similar.

¿Por qué la distancia anterior no define realmente una distancia en el conjunto de *todas* las funciones de cuadrado integrable? (Truco: Considérese una función discontinua igual a una continua en *casi todos* los puntos).

Como anticipo de la teoría que se creará alrededor de esta distancia en cursos superiores, consideremos las funciones

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{con} \quad g_n(x) = \frac{\cos(2\pi nx)}{\pi^2 n^2}.$$

Ambas funciones son continuas en  $[0, 1]$ . Despreocupándonos de cuestiones de convergencia, podemos efectuar  $|f - g|^2$  y reordenar el resultado de la siguiente forma:

$$|f - g|^2 = \sum_n \sum_{m \neq n} (g_n g_m) + 2 \sum_n (g_n^2 - g_n f) + (f^2 - \sum_n g_n^2).$$

Cada uno de los paréntesis tiene integral nula (para los dos primeros bastan métodos de integración elemental y en el tercero se usa además la fórmula  $\sum (\pi n)^{-4} = 1/90$  probada por L. Euler). Por tanto  $d(f, g) = 0$  y hemos demostrado

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{\pi^2 n^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Imitando a Euler, podemos distraernos sustituyendo algunos valores racionales sencillos para obtener la suma de algunas series de aspecto impresionante.

Esta fórmula no es más que la punta de iceberg de un hecho importantísimo en Física y Matemáticas: “*Toda onda (función) se puede obtener como superposición de tonos fundamentales (senos y cosenos)*”.

Por último, veamos un ejemplo anecdótico.

Ejemplo: Sea  $X$  el conjunto de casillas de un tablero de ajedrez que nombraremos con la notación algebraica usada habitualmente por los ajedrecistas, según se muestra en el dibujo. La torre, el caballo, la dama y el rey definen sendas distancias en  $X$  que denotaremos por  $d_T$ ,  $d_C$ ,  $d_D$  y  $d_R$  respectivamente. Éstas vendrán definidas por el número mínimo de movimientos que debe emplear la pieza seleccionada para trasladarse entre dos casillas dadas.

La torre y la dama son piezas de acción a larga distancia

$$d_T(a1, f8) = d_D(a1, f8) = 2.$$

El caballo bastante ágil al esquivar obstáculos pero se cansa en trayectos largos

$$d_C(a1, f8) = 4.$$

Y el rey es demasiado viejo

$$d_R(a1, f8) = 7.$$

El alfil no define una distancia en  $X$  porque sólo puede acceder a la mitad de las casillas ( $d_A(a1, a2) = ?$ ) pero sí la define en  $X_1$  =cuadros blancos o en  $X_2$  =cuadros negros. En  $X_2$  se tendría

$$d_A(a1, f8) = 2.$$

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Los anteriores ejemplos parecen indicar que en todas partes hay definidas distancias. Frases como *Soy tan alto como mi hermano*, *Tu ADN* (¿asociación nacional de disléxicos?) *se parece al de tus padres*, *El ovni pasó a diez metros de mi barco...* se pueden expresar en términos de distancias en espacios de personas, cromosomas u objetos volantes y flotantes. Esto no debiera extrañarnos, porque casi todas las cosas perceptibles, por fantasmagóricas que sean, guardan relaciones de cercanía con el resto de los objetos. Una distancia es una manera relativa de situar los objetos, una forma leve de coordenadas.

*Aunque el mismo San Dionisio entrara con su cabeza en las manos, tendría que entrar por la derecha, marcharía entre los estantes dedicados a la literatura francesa y la mesa reservada a las lectoras. Y si no tocara tierra, si flotara a veinte centímetros del suelo, su cuello ensangrentado estaría exactamente a la altura del tercer estante de libros. De modo que esos objetos sirven por lo menos para fijar los límites de lo verosímil.*

En los sucesivo necesitaremos considerar simultáneamente todos los puntos que están suficientemente cerca, a menos de una distancia dada, de otro punto dado. Con la distancia usual estos puntos definen un intervalo (en  $\mathbb{R}$ ), un círculo (en  $\mathbb{R}^2$ ), una esfera (en  $\mathbb{R}^3$ ),...

DEFINICIÓN: Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, se llama bola abierta centrada en  $x \in X$  y de radio  $\epsilon > 0$  al conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Análogamente, se llama bola cerrada centrada en  $x \in X$  y de radio  $\epsilon > 0$  al conjunto

$$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Observación: Curiosamente, las bolas cerradas tendrán en este curso una importancia secundaria con respecto a las abiertas.

Ejemplo: En  $\mathbb{R}$  se tiene

$$B(0, 1/2) = \overline{B}(0, 1/2) = \{0\} \quad \text{Con la distancia discreta.}$$

$$B(0, 1/2) = (-1/2, 1/2) \quad \text{Con la distancia usual.}$$

$$\overline{B}(0, 1/2) = [-1/2, 1/2] \quad \text{Con la distancia usual.}$$

$$B(0, 1/2) = \overline{B}(0, 1/2) = \mathbb{R} \quad \text{Con la distancia } d(x, y) = \min(|x - y|, 0'2).$$

Para simular que las Matemáticas sirven para algo, veamos una ilustración de estos conceptos aplicable a finales de ajedrez.

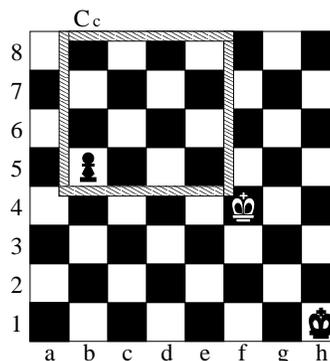
Si un peón está a  $n$  casillas de su casilla de coronación,  $C_c$  y el rey contrario está en la casilla  $C_R$ , en ausencia de otras piezas, ¿cuándo puede evitar la coronación? Obviamente, con el lenguaje anterior, esto ocurrirá cuando en el espacio  $(X, d_R)$  se tenga

$$C_c \in \overline{B}(C_R, n).$$

Estudiando la forma de las bolas cerradas en el espacio  $(X, d_R)$  (lo cual es un ejercicio sencillo) se deduce la siguiente regla, llamada *regla del cuadrado*, bien conocida por los ajedrecistas para ciertos finales rey-peón-rey: “Un peón puede coronar sin la ayuda de su rey si y sólo si el rey opuesto no está incluido en un cuadrado cuya arista está limitada por el peón y la casilla de coronación”.

Si el turno es de las blancas sólo el movimiento  $f4 - e5$  evita la coronación al ingresar el rey en el cuadrado. Si el turno es de las negras llegan a coronar porque el rey no puede entrar en el cuadrado.

Si el rey ayuda al peón la teoría es mucho más compleja. Por ejemplo, con turno de las blancas, rey blanco en  $d4$ , rey negro en  $d6$  y peón blanco en  $c3$  es tablas, pero con el peón en  $c2$  es victoria. ¿es posible exponer elegantemente la teoría de finales rey-peón-rey usando  $d_R$ ? Quizá hasta sea interesante.



Para terminar esta primera sección, un pequeño digestivo para tragar este curso y los venideros:

La variedad de ejemplos sugiere que una gran ventaja de los espacios métricos así como de otras estructuras (grupos, anillos, módulos, espacios vectoriales, cuerpos, topologías, . . .) que se han visto y verán en la Licenciatura de Matemáticas, es la generalidad. Cualquier teorema que hagamos se transforma en infinitos, uno por cada ejemplo. Así la *regla del cuadrado* corresponde a la *regla del círculo* para dos ratones igual de veloces que corren en  $\mathbb{R}^2$  hacia el mismo queso, o una consecuencia del “Teorema de Lagrange” en Teoría de Grupos nos dice que  $(7^{12} - 1)/13 \in \mathbb{Z}$  si lo aplicamos en  $\mathbb{Z}_{13}^*$  mientras que en el cubo de Rubik se traduce en que ninguna serie de movimientos aplicada 13 veces vuelve a la

posición inicial. Paradójicamente, también es la generalidad una desventaja, porque los teoremas deben ser lo suficientemente débiles para que se cumplan en tableros de ajedrez y en  $\mathbb{R}^n$ .

En esta tensión dinámica entre lo particular y lo general burbujan las estructuras matemáticas que se han multiplicado en los últimos 150 años, tratando de no quedarse en el fondo conteniendo un solo átomo ejemplo y de no ascender demasiado hasta evaporarse en nada.

## Muy, muy cerca: Continuidad y convergencia

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $a$  si valores muy, muy cercanos a  $a$  se transforman en valores muy, muy cercanos a  $f(a)$ . Dicho de otro modo, por muy exigentes que seamos con lo pequeña que deba ser la distancia entre  $f(x)$  y  $f(a)$  siempre la podemos reducir imponiendo que  $x$  esté suficientemente cerca de  $a$ . Se recuerda aquí la definición rigurosa:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

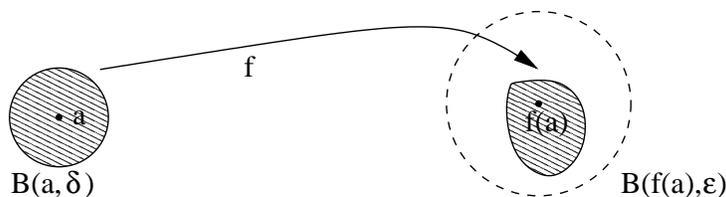
En  $\mathbb{R}$  medimos habitualmente cerca y lejos con  $d(x, y) = |x - y|$ , así cuando cambiamos nuestra forma de medir, parece lógico generalizar esta definición de la forma siguiente:

DEFINICIÓN: Sean  $(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  espacios métricos. Se dice que  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es continua en  $a \in X_1$  si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Un poco más abreviadamente se puede escribir

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon).$$



De la misma forma se puede generalizar el concepto de convergencia, que para sucesiones reales es

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ : n > N \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon.$$

DEFINICIÓN: Se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  converge a  $l \in X$ , si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ : n > N \Rightarrow x_n \in B(l, \epsilon).$$

Notación: Se suele escribir  $x_n \rightarrow l$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  o  $\lim x_n = l$  y se dice que  $l$  es el límite de la sucesión considerada.

A los que se hayan caído de espaldas con el simbolismo fanático usado en esta sección, quizá les ayude a incorporarse la siguiente traducción de la definición anterior: “Se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  converge a  $l \in X$ , si dado  $\epsilon > 0$  existe un número natural,  $N$ , tal que

$$d(x_n, l) < \epsilon$$

para todo  $n > N$ ”. Geométricamente,  $x_n \in B(l, \epsilon)$  para todo  $n > N$ .

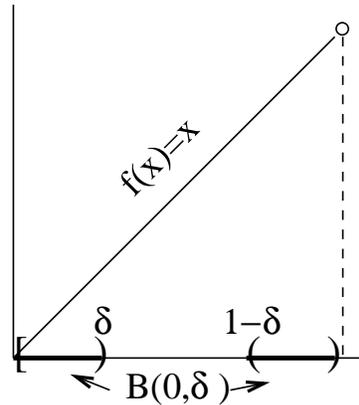
Evidentemente los conceptos de continuidad y convergencia dependen de la distancia escogida.

Ejemplo: Sean  $d(x, y) = |x - y|$  y  $d_*(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$ . Ambas son distancias en  $X = [0, 1)$ . La función inclusión,  $f(x) = x$  es continua considerada como

$f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$  (esto es obvio porque  $d$  es la distancia usual), pero no lo es considerada como  $f : (X, d_*) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ . Concretamente, vamos a ver que  $f$  no es continua en  $a = 0$ . Para ello basta comprobar (pensarlo unos momentos)

$$\forall \delta > 0 \exists x \in X \text{ tal que } d_*(x, 0) < \delta \text{ pero } d(x, 0) \geq 0'1.$$

Volverlo a pensar: queremos elegir  $\epsilon = 0'1$  y ver que para ningún  $\delta$  se cumple  $f(B(0, \delta)) \subset f(B(0, 0'1))$ . Tomando  $x \in (1 - \delta, 1) \cap [0'1, 1)$  se tiene que  $d_*(x, 0) < \delta$  y sin embargo  $d(x, 0) = |x - 0| = |x| \geq 0'1$ . Por tanto  $f$  no es continua. Desde luego que  $0'1$  no tiene poderes mágicos, cualquier otro número pequeño es válido.



Lo que ha sucedido es que  $d_*$  es una distancia muy rara en  $[0, 1)$  para la que los números de la forma  $0'00\dots$  están muy próximos a los de la forma  $0'99\dots$  y por ello, para que una función sea continua tiene que valer casi lo mismo en ellos. Por ejemplo  $f(x) = x(1 - x)$  sí sería continua como función  $f : (X, d_*) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ .

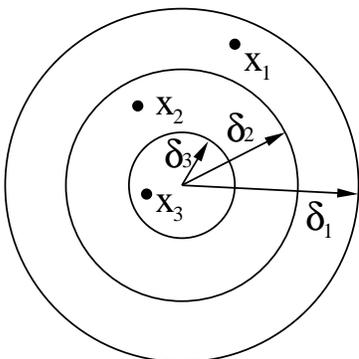
Estos comentarios y lo que sabemos de un primer curso de cálculo nos hacen sospechar nuestro primer resultado de este curso.

**Proposición 1.1:** Sea  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  una función entre espacios métricos. La función  $f$  es continua en  $x \in X_1$  si y sólo si para toda sucesión  $x_n$  convergiendo a  $x$  se cumple que  $f(x_n)$  converge a  $f(x)$ .

Dem.:  $\Rightarrow$ ) Queremos demostrar que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  sabiendo que  $f$  es continua y que  $x_n \rightarrow x$ .

Dado cualquier  $\epsilon > 0$ , por la definición de continuidad sabemos que existe  $B(x, \delta)$  tal que  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ . Como  $x_n$  converge, para  $n > N$  se tiene que  $x_n \in B(x, \delta)$ , y por consiguiente  $f(x_n) \in B(f(x), \epsilon)$ , esto es,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

$\Leftarrow$ ) Suponiendo que  $f$  no es continua en  $x$  queremos hallar una sucesión  $x_n \rightarrow x$  tal que  $f(x_n)$  no converja a  $f(x)$ .



Si  $f$  no es continua en  $x$  entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$   $f(B(x, \delta)) \not\subset B(f(x), \epsilon)$ . Tomemos  $\delta = \delta_1 = 1$  y  $x_1$  tal que  $x_1 \in B(x, \delta_1)$  pero  $f(x_1) \notin B(f(x), \epsilon)$ . Tomemos, en general,  $\delta = \delta_n = \min(d(x, x_{n-1}), 1/n)$  y  $x_n \in B(x, \delta_n)$  con  $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$ . Desde luego que se tiene  $x_n \rightarrow x$  pero como,  $f(x_n)$  no pertenece a la bola  $B(f(x), \epsilon)$ ,  $f(x_n)$  no converge a  $f(x)$ . ■



Quizá el lector se pregunte por qué no hemos escogido simplemente  $\delta_n = 1/n$  en la demostración anterior, si es así, que trate de responderse.

Ejemplo: Una de las funciones “más discontinuas” que conocemos es la función de Dirichlet,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Usando la distancia usual se tiene que  $x_n = \sqrt{2}/n \rightarrow x = 0$  sin embargo  $f(x_n) = 0 \not\rightarrow f(x) = 1$ , por tanto  $f$  no es continua en  $x = 0$ , de hecho no lo es en ningún punto. No obstante, con la distancia

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } x - y \in \mathbb{Q} \\ 1 + |x - y| & \text{si } x - y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

el contraejemplo anterior no vale ya que  $x_n \not\rightarrow 0$ , porque con esta distancia la bola  $B(0, 0'1)$  no contiene a ninguno de los  $x_n$ . Como toda sucesión  $x_n \rightarrow 0$  debe ser racional a partir de cierto término (ejercicio), la proposición asegura que  $f$  es continua en cero. Lo mismo se aplica al resto de los puntos.

¿Pero es la función de Dirichlet continua o no? Aunque hemos visto que no hay respuesta posible, si hubiéramos preguntado al profesor de Cálculo del curso pasado nos habría contestado con un rotundo “no”. Esta paradoja se explica porque habitualmente se supone la hipótesis natural de que se emplea la distancia usual. En otros contextos podemos no considerarla conveniente y refutar o probar la continuidad a nuestro antojo.

*Bueno, sí, pudo hacer todo esto, pero no está probado; comienzo a creer que nunca se puede probar nada. Son hipótesis honestas que explican los hechos, pero veo tan bien que proceden de mí, que son simplemente una manera de unificar mis conocimientos. [...] Lentos, perezosos, fastidiados, los hechos se acomodan en rigor al orden que yo quiero darles; pero éste sigue siéndoles exterior. Tengo la impresión de hacer un trabajo puramente imaginativo.*

La continuidad y convergencia son conceptos básicos en Análisis Matemático que cuando se extienden a espacios de funciones dan lugar a conceptos tan importantes como la convergencia uniforme.

Para ilustrar la situación supongamos que cierta sucesión de funciones,  $f_n$ , “converge” a  $f$  en el sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

si hubiera justicia en el mundo debiera tenerse, para funciones integrables,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f.$$

Pues bien, esto no es cierto: basta tomar  $f \equiv 0$  y como  $f_n$  la función que vale  $n$  en  $(0, 1/n]$  y cero en el resto. Ni siquiera  $f$  tiene por qué ser continua si las  $f_n$  lo son, como observó por primera vez N.H. Abel en 1826 (si alguien ha conseguido sobreponerse a “Oliver Twist” y a “Corazón” que lo intente con la biografía de este matemático). Los libros afirman que esto

ocurre porque la convergencia no es uniforme, y eso es lo mismo que decir que si usáramos la distancia  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$  para definir la convergencia todo iría bien. Para la integración en intervalos infinitos la situación sigue siendo complicada. ¿Dónde está el error en el siguiente razonamiento?

El cambio  $x = t/n$  con  $n \in \mathbf{Z}^+$  implica

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t/n)}{t} dt,$$

además el valor de la integral es  $\pi/2$  porque lo dice la página 109 de Tsipkin & Tsipkin “*Fórmulas Matemáticas*” Ed. Mir, 1988; entonces

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t/n)}{t} dt = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(t/n)}{t} dt = 0.$$

Como consuelo frente a la difícil relación entre convergencia e integración tenemos que las operaciones habituales: suma, resta, multiplicación y división (con divisor no nulo) conservan la continuidad de las funciones de un espacio métrico en  $\mathbb{R}$  (con la distancia usual). La demostración es idéntica a la vista en un primer curso de Cálculo para funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Otro concepto relativo a la convergencia de importancia en Análisis es la completitud (¿incluirán alguna vez esta palabra en el diccionario?). Esencialmente lo que se quiere exigir es que cualquier sucesión cuyos términos se *amontonen* tengan un límite.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio métrico  $(X, d)$  es completo si toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente, esto es,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Desde el punto de vista topológico, la compacidad, que definiremos y estudiaremos en un próximo capítulo, es una propiedad más fuerte y más natural, así que aquí no comprobaremos la completitud de ningún espacio y nos limitaremos a establecer un conocido resultado, probado en 1922 por S. Banach, y dar un ejemplo sin profundizar en los detalles.

**Teorema 1.2:** (de la aplicación contractiva) *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y sea  $f : X \rightarrow X$  una función contractiva (esto es, tal que existe  $0 < C < 1$  con  $d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$  para  $x, y \in X$ ), entonces para cualquier  $x_0 \in X$  la sucesión*

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(x_3), \quad \dots$$

*converge al único punto de  $X$  que queda fijo por  $f$ .*

Dem.: Si existe un punto fijo debe ser único, porque si hubiera dos, digamos  $x$  e  $y$ ,  $d(x, y) \leq C d(f(x), f(y)) = C d(x, y)$  lleva a que coinciden.

Si  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  converge, entonces  $x = \lim x_n$  debe ser el punto fijo porque

$$d(f(x), x_{n+1}) \leq C d(x, x_n)$$

implica, tomando límites,  $\lim x_{n+1} = f(x)$  (ejercicio) y por tanto  $f(x) = x$ .

Como  $X$  es completo basta demostrar que  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy y la convergencia estará asegurada. Sean  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ , digamos  $n \geq m$  con  $n = m + k$ , entonces

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d((f \circ \dots \circ f)(x_0), (f \circ \dots \circ f)(x_k)) \leq C^m d(x_0, x_k) \\ &\leq C^m (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)) \quad (\text{Desig. triang.}) \\ &\leq C^m d(x_0, x_1) (1 + C + C^2 + C^3 + \dots) \\ &\leq \frac{C^m}{1 - C} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Así pues  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  cuando  $n, m \rightarrow \infty$  y la sucesión es de Cauchy. ■

Ejemplo: Si en una calculadora de bolsillo, en modo Rad, escribimos un número real entre 2 y 4 y pulsamos la secuencia + sin = repetidas veces, el resultado se acercará increíblemente rápido a una constante bien conocida.

Explicación:  $X = [2, 4]$  con la distancia usual es completo ( $[a, b]$  lo es, según resultados del cuarto capítulo). La función  $f : X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = x + \sin x$  es contractiva porque el teorema del valor medio implica

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq f'(2) |x - y| \leq 0.6 |x - y|.$$

Así pues, el teorema anterior asegura que, para  $x_0 \in X$ ,  $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$  converge al único  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$ .

El teorema de la aplicación contractiva es la base de muchos métodos iterativos en Cálculo Numérico. Además se puede emplear en la demostración de importantes resultados teóricos como el “Teorema de la función inversa”. Para apreciar la ya citada ventaja de la generalidad, diremos que aplicado en cierto espacio métrico, cuyos elementos no son puntos sino subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , el teorema anterior se puede usar para aproximar conjuntos de naturaleza fractal con un ordenador. Como ejemplo de uno de ellos, si no hay nada en la *tele* uno puede ocuparse de traducir el siguiente programa en BASIC arcaico a su lenguaje de programación favorito y asombrarse con el resultado.

```

escala=200.0:x=0.0:y=0.0
for j=1 to 6000
  i=INT(3.0*RND)
  if i=1 then x=x+1.0
  if i=2 then x=x+0.5:y=y+0.866
  x=x/2.0:y=y/2.0
  plot escala*x, escala*y
next j
stop

```

(La función RND genera un número aleatorio entre 0 y 1 y el comando plot dibuja un punto en la pantalla dadas sus coordenadas). El “límite” del resultado se llama *Triángulo de Sierpiński* y es más misterioso que el de las Bermudas porque, según se dice, no es ni unidimensional ni bidimensional sino que tiene dimensión  $\log 3 / \log 2 = 1.58496\dots$

## Un mundo abierto hacia la continuidad

La Topología esencialmente estudia transformaciones que son continuas en todos los puntos, esto es, se centra en la *continuidad global*. Sin embargo la definición de continuidad en espacios métricos habla de la *continuidad local* (en cada punto). Nuestro objetivo en esta sección será eliminar los puntos  $a$  y  $f(a)$  en la definición de continuidad, transformándola de la siguiente manera:

$$\forall a \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta : f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$$

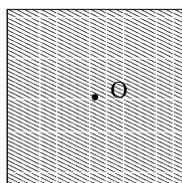
$$\forall a \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta : B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

$$\forall a \in X \forall \epsilon > 0 \quad f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) = \text{conjunto que "rodea" al punto } a$$

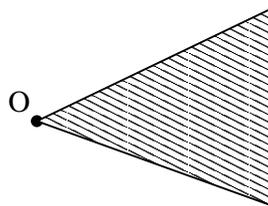
$$\forall a \in X \quad f^{-1}(\text{conjunto que "rodea" a } f(a)) = \text{conjunto que "rodea" al punto } a$$

$$f^{-1}(\text{conjunto que "rodea" todos sus puntos}) = \text{conjunto que "rodea" todos sus puntos.}$$

La última definición no involucra puntos particulares: es *global*. ¿Pero qué queremos decir con "rodear" a un punto? Si se ha seguido el razonamiento anterior, quiere decir que existe una bola (abierta) centrada en ese punto y totalmente contenida en el conjunto. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$



"rodea" al origen



no "rodea" al origen

Se llaman *abiertos* a los conjuntos que "rodean" a todos sus puntos y así la definición global de continuidad es simplemente  $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}$ . (Obviamente aquí  $f^{-1}$  tiene sentido conjuntista: un punto puede tener varias antiimágenes).

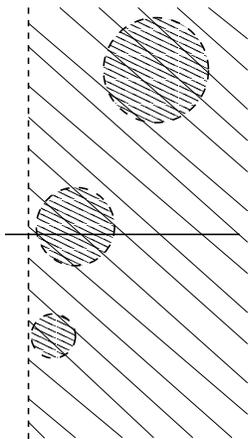
Como siempre, necesitamos aferrarnos al rigor matemático si no queremos caer en el voluble vacío de las opiniones, por lo cual desechamos el término intuitivo "rodear" y escribimos una definición rimbombante de *conjunto abierto* para que no se nos olvide que es lo único que necesitamos.

*La mayor parte del tiempo, al no unirse a palabras, mis pensamientos quedan en la niebla. Dibujan formas vagas y agradables, se disipan; en seguida las olvido.*

**DEFINICIÓN:** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que  $\mathcal{U} \subset X$  es un conjunto abierto si para todo  $x \in \mathcal{U}$  existe una bola abierta  $B(x, \epsilon) \subset \mathcal{U}$ . En este caso, también se dice que  $\mathcal{U}$  es un entorno (o entorno abierto) de cualquiera de los puntos que contiene.

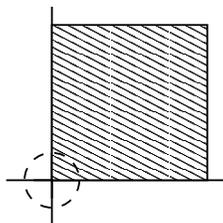
**Notación:** Normalmente se designan los abiertos genéricos mediante  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ , con diferentes subíndices o superíndices. En algunos libros y contextos también se denotan mediante  $G$ , que es la inicial de "región" en alemán. Natürlich, ich spreche nicht Deutsch.

Ejemplo: El conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  con la distancia usual.

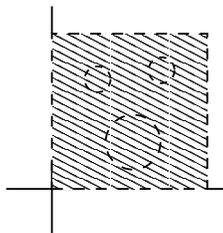


Es fácil demostrarlo. Basta decir que si  $P_0 = (x_0, y_0) \in A$  entonces la bola  $B(P_0, x_0)$  está contenida en  $A$ . Un dibujo es suficiente. Como la Topología es a veces muy poco intuitiva, en general, sólo sustituiremos una prueba rigurosa por un dibujo si estamos seguros de que sabríamos escribirla con detalle. (Mini demostración para pesados de que  $B(P_0, x_0) \subset A$ :  $P = (x, y) \in B(P_0, x_0) \Rightarrow (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 < x_0^2 \Rightarrow (x_0 - x)^2 < x_0^2 \Rightarrow x_0 - x < x_0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow P \in A$ ).

Ejemplo: El conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  no es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  con la distancia usual. Por ejemplo, ninguna bola abierta centrada en el origen, o en cualquier punto de la frontera, está totalmente contenida en  $A$ .



Ejemplo: El conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  con la distancia usual.



Ejemplo:  $A = \mathbb{Q}$  no es un abierto de  $\mathbb{R}$  con la distancia usual, porque cualquier bola centrada en un valor racional contiene necesariamente también valores irracionales.

Cuando trabajamos con la distancia usual, la idea intuitiva de abierto es la de conjunto que no contiene a su frontera, pero con otras distancias nuestra intuición puede desvanecerse. Dejamos al lector las comprobaciones en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: En  $(X, d)$  donde  $d$  es la distancia discreta, todo subconjunto de  $X$  es abierto. Indicación (casi solución): ¿Qué es  $B(x, 1/2)$ ?

Ejemplo 2: En cualquier espacio métrico,  $(X, d)$  las bolas abiertas son conjuntos abiertos. Indicación: No es trivial. Si no se usa la desigualdad triangular está mal.

**Ejemplo 3:** En cualquier espacio métrico,  $(X, d)$  el complementario de una bola cerrada es un abierto.

Para terminar, enunciemos como teorema nuestro hallazgo de esta sección.

**Teorema 1.3:** Sea  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  una función entre espacios métricos, entonces  $f$  es continua en todo punto si y sólo si para todo abierto  $\mathcal{U} \subset X_2$ ,  $f^{-1}(\mathcal{U})$  es también un abierto.

Dem.:

$\Rightarrow$ ) Dado  $\mathcal{U}$  abierto y  $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$  sea  $y_0 = f(x_0)$ , por la definición de continuidad, para  $B(y_0, \epsilon) \subset \mathcal{U}$  existe  $B(x_0, \delta)$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \epsilon)) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$ , por tanto  $f^{-1}(\mathcal{U})$  es abierto.

$\Leftarrow$ ) Sea  $y_0 = f(x_0)$ . Si la antiimagen de todo abierto es un conjunto abierto, en particular  $f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$  es abierto, y contiene a  $x_0$ , por consiguiente existe  $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$  y por tanto  $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \epsilon)$ . ■

La definición de continuidad con abiertos tiene ventajas teóricas con respecto a la  $\epsilon$ - $\delta$ . Al ser más sintética permite simplificar muchas demostraciones y, sobre todo, permite generalizar el concepto de continuidad incluso más allá de los espacios métricos.

Más adelante entraremos en el tema, pero por ahora citaremos que la demostración de que la composición de funciones continuas es continua se reduce a

$$(f \circ g)^{-1}(\text{abierto}) = g^{-1}(f^{-1}(\text{abierto})) = g^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}.$$

La cual comparada con la demostración que aparece en cualquier libro de Cálculo de primer curso sugiere, además de revenderlo, la conveniencia de soportar este pequeño torbellino de abstracción para disfrutar después de la brisa de la sencillez.

*Necesito limpiarme con pensamientos abstractos, transparentes como el agua.*

Como ilustración de la naturalidad del lenguaje de los abiertos, incluso en el contexto de las funciones reales de toda la vida, mencionaremos un teorema debido a R. Baire: “Dado  $A \subset \mathbb{R}$ , existe una función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  continua exactamente en  $A$  si y sólo si  $A$  es una intersección numerable de abiertos”. Por ejemplo

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcup_{a/q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} - \{a/q\})$$

implica que existe una función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  continua en los irracionales y discontinua en los racionales (de hecho podemos verla en el “*Calculus*” de M. Spivak, Ed. Reverté 1987). Se puede probar, pero no es fácil a este nivel, que  $\mathbb{Q}$  no es intersección numerable de abiertos, así que por mucho que busquemos no encontraremos una función real continua sólo en los racionales.