Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA **Hoja 7** **Curso 2001/2002**

1. Sea X un espacio conexo por caminos. Demostrar que X es simplemente conexo si y sólo si toda función continua $f : S^1 \to X$ se puede extender a una función continua $g : \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \to X$.

2. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y sea f_* el homomorfismo inducido entre los grupos fundamentales. Si f es inyectiva ¿es f_* inyectiva?, y si es sobreyectiva, ¿lo es f_*?

3. Encontrar dos espacios que tengan el mismo grupo fundamental pero que no sean homeomorfos.

4. ¿Es la union de subespacios simplemente conexos un subespacio simplemente conexo?

5. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ lazos en X con punto base en x_0. Definimos la yuxtaposición como

$$\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n(t) = \gamma_i(nt - i + 1), \quad t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right].$$

Demostrar que $\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ es homótopo a $\gamma_1 * (\gamma_2 * (\gamma_3 * \cdots * \gamma_n))))$.

6. Demostrar que la relación "ser un retracto de deformación" es transitiva, esto es, si A lo es de B y B de C, entonces A lo es de C.

7. Hallar el grupo fundamental del toro sólido.

8. Estudiar si los siguientes espacios son homeomorfos:

$$\mathbb{R} \times S^1 \times (S^2 - \{(0,0,1)\}) \qquad \mathbb{R}^2 \times (S^2 - \{(0,0,1)\}) \qquad \mathbb{R}^4$$

9. Sea $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que un homeomorfismo $f : D \to D$ envía la frontera en la frontera y el interior en el interior *(Sugerencia: considérense los grupos fundamentales de* $D - \{p\}$ *y* $D - \{f(p)\}$*).*

10. La *banda de Moebius* B es el espacio cociente que resulta de identificar en $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \leq x \leq 10, -1 < y < 1\}$ los puntos $(10, y)$ y $(-10, -y)$ para $-1 < y < 1$. La línea central de la tira rectangular pasa a ser una circunferencia C. Demostrar que C es un retracto de deformación de B y concluir que $\pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

11. Demostrar que S^n (la esfera n-dimensional) es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$. Utilizar esto para demostrar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.

12. Hallar el grupo fundamental de $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y de $\{x^2 + y^2 \geq 4\}$.

13. Consideremos el círculo S^1 y un entero no nulo k. Demostrar que $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos k\theta, \sin k\theta)$ es un recubrimiento y que la preimagen de cada punto son $|k|$ puntos.

14. Sea S la superficie helicoidal de $\mathbb{R}^3$ dada por $\{(r\cos t, r\sin t, t) | r > 0, t \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que la proyección $p : S \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, $p(x, y, z) = (x, y)$, es un recubrimiento.

15. Sea X un espacio conexo por caminos y sean U y V dos abiertos de X conexos por caminos tales que $U \cap V$ es conexo por caminos y $X = U \cup V$. Demostrar que si V es simplemente conexo entonces hay un epimorfismo $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$. Como aplicación calcular el grupo fundamental de $\{(x, y, 0) : (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

16. Utilizar el teorema de la bola de pelo para probar que para cualquier función continua $f : S^2 \to S^2$ existe un punto $x \in S^2$ tal que o bien $f(x) = x$ o bien $f(x) = -x$.

17. Sea $f : Y \to X$ un recubrimiento. Definimos la relación de equivalencia en Y dada por $y_1 \simeq y_2$ si y sólo si $f(y_1) = f(y_2)$. Demostrar que $Y/\simeq$, con la topología cociente es homeomorfo a X.

18. Sea $f : \tilde{X} \to X$ un recubrimiento con X conexo por caminos. Demostrar que el número de puntos de cada fibra $f^{-1}(x)$ es constante *(Sugerencia: dados $x, y \in X$, fijar un camino de x a y y levantarlo para cada $p \in f^{-1}(x)$).*

19. Se dice que el espacio X es contractible si la función identidad $i : X \to X$ es homótopa a una constante. Dar algunos ejemplos de espacios contractibles y demostrar que todo espacio contractible es simplemente conexo ¿Es cierto el recíproco?

20. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que existe $m > 0$ con $f(x, y) \geq m$ y $g(x, y) \geq m$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\begin{cases} x\, f(x, y) &= \lambda \\ y\, g(x, y) &= \mu \end{cases}$$

tiene solución.