Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA **Hoja 6** **Curso 2001/2002**

1. Demostrar que si $f : X \to Y$ es continua, Y es Hausdorff y X es compacto, entonces f es cerrada (aplica cerrados en cerrados). Deducir que si f es además una biyección, entonces es un homeomorfismo.

2. Demostrar que si se sustituye la topología de un espacio por otra topología menos fina, los subconjuntos que antes eran compactos lo seguirán siendo. Si la nueva topología es más fina, esto no es cierto en general. Dar algunos ejemplos.

3. Demostrar que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\ )})$ son necesariamente numerables. *Sugerencia*: Usar el hecho de que en un conjunto no numerable hay siempre una sucesión estrictamente creciente.

4. Sea X un espacio de Hausdorff y sean $K_1, K_2 \subset X$ dos compactos disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ con $K_1 \subset \mathcal{U}_1$ y $K_2 \subset \mathcal{U}_2$.

5. Si (X, d) es un espacio métrico compacto, probar que existe M tal que $d(x, y) < M$ para cada $x, y \in X$. *Sugerencia*: La función distancia es continua.

6. Sean $X_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$, $X_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que X_1 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que X_1 y X_2 no son homeomorfos.

7. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Demostrar que la función $d(x, K) = \inf \{d(x, y) \,:\, y \in K\}$ es continua y que para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$.

8. Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico (X, d) y sea W un abierto de x tal que $K \subset W$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{x \in X \,:\, d(x, K) < \varepsilon\} \subset W$.

9. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ y S^2 no son homeomorfos.

10. Probar que si X es un espacio compacto y $A \subset X$ entonces $\overline{A}$ es compacto. Demuéstrese también que $\mathcal{B} = \{\{0, n\} \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $A = \{0\}$ es compacto pero $\overline{A}$ no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?

11. Sea X un espacio compacto y $\mathcal{C}$ una familia de funciones continuas de X en $[0,1]$ tales que

(i) Si $f, g \in \mathcal{C}$ entonces $fg \in \mathcal{C}$
(ii) Para cada $x \in X$ existe un entorno U_x de x y $f \in \mathcal{C}$ tal que $f(U_x) = 0$.

Probar que $\mathcal{C}$ contiene a la función nula.

12. Demostrar el siguiente resultado conocido como *teorema de la aplicación contractiva*: si X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una aplicación contractiva (es decir, existe $K < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y)$ para todo $x, y \in X$), entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. *Sugerencia*: si $a \in X$, considerar la sucesion $x_1 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$.

13. Demostrar el siguiente resultado: si X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una aplicación "*menguante*"(es decir, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ para todo $x \neq y,\ x, y \in X$), entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Buscar ejemplos de aplicaciones que sean menguantes pero no contractivas.

14. Sea el producto topológico $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ y supongamos que $A \subset X$ es compacto si y sólo si A es cerrado. Probar que X_i tiene la misma propiedad (esto es, que $A \subset X_i$ es compacto si y sólo si es cerrado).

15. ¿Es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales localmente compacto con la topología que hereda de la usual de $\mathbb{R}$?

16. Sea $f : X \to Y$ continua y supongamos que X es localmente compacto. ¿Se sigue necesariamente que $f(X)$ es también localmente compacto? ¿Y si además de continua, f es abierta?

17. Sea $f : X_1 \to X_2$ un homeomorfismo entre espacios localmente compactos Hausdorff. Demostrar que f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones por un punto.

18. Demostrar que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa a S^1.

19. Demostrar que la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa al subespacio de la recta usual $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.