Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA **Hoja 5** **Curso 2001/2002**

1. De las cinco vocales escritas en mayúscula, ¿cuáles son homeomorfas y cuáles no?

2. Sabiendo que las componentes conexas son siempre cerrados, demostrar que si hay un número finito de ellas, entonces son también abiertos.

3. Sea $f : X \to Y$ una función continua sobreyectiva de un espacio topológico X en un espacio topológico Y que tiene n componentes. Probar que X tiene como mínimo también n componentes.

4. Sea X el conjunto de los números reales con la topología usual y sea Y el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por los dos ejes de coordenadas. Probar que si $f : X \to Y$ es una función continua sobreyectiva entonces $f^{-1}((0,0))$ contiene al menos tres puntos.

5. Demostrar que si $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua entonces f tiene un punto fijo, esto es, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Dar un ejemplo que pruebe que esto no es cierto si reemplazamos $[0,1]$ por $(0,1)$.

6. Demostrar que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $x_0 \in S^1$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.

7. Sea S^1 la circunferencia unidad $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología usual heredada del plano. Supongamos que $f : S^1 \to [0,1]$ es continua y sobreyectiva. Probar que, para cada $c \in (0,1)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ contiene más de un punto.

8. Demostrar que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 - A$ es conexo por caminos. (*Indicación: el conjunto de rectas que pasan por un punto es no numerable*)

9. Probar cada una de las siguientes afirmaciones en caso de que sean ciertas o encontrar un contraejemplo en caso contrario.

(1) Si X es conexo por caminos y $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es también conexo por caminos.
(2) Si X es conexo por caminos y $\sim$ es una relación de equivalencia, entonces el espacio $X/\sim$ con la topología cociente es conexo por caminos.
(3) Si A es un subconjunto conexo por caminos de un espacio topológico X y $A \subset B \subset \overline{A}$ entonces B es conexo por caminos.

(4) Si $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ es una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio y existe $C_0 \in \mathcal{C}$ que interseca a cada elemento de $\mathcal{C}$, entonces $\cup_{i\in I} C_i$ es conexo por caminos.

10. Sea X un espacio localmente conexo. Demostrar que si $A \subset X$ es abierto entonces A es también localmente conexo. Hallar un contraejemplo para demostrar que la afirmación anterior es falsa si A es cerrado.

11. Usando la definición, estudiar si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican

(i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.
(ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.
(iii) $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey.

12. Probar las siguientes afirmaciones o bien dar un contraejemplo.

(i) La unión finita de compactos es compacto.
(ii) La unión de una familia cualquiera de compactos es compacto.
(iii) La intersección de dos compactos es compacto. *Sugerencia: considerar en* $[0, 1]$ *la topología cuya base es* $\mathcal{B} = \{(a, b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(0, 1], [0, 1)\}$.
(iv) La intersección de una familia cualquiera de compactos en un espacio de Hausdorff es compacto.

13. Probar que si X es compacto y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos distintos tal que x es el único punto de acumulación del conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces x_n converge a x. Probar también que todo espacio compacto infinito contiene un subconjunto numerable no cerrado.

14. Decir cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

15. Probar que existe un recubrimiento de $[0, 1]$ por intervalos cerrados que no admite ningún subrecubrimiento finito.