Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA Hoja 4 Curso 2001/2002

1. Sea $X = S^1 \times \{0,1\}$, con la topología producto. Se define en X la relación de equivalencia $\sim$ dada por $((1,0),0) \sim ((1,0),1)$. Demostrar que el espacio $X/\sim$ con la topología cociente es homeomorfo a la figura del ocho $Y = \{(x,y)|(x-1)^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y)|(x+1)^2+y^2 = 1\}$.

2. Sean X e Y dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, abierta y sobreyectiva. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en X como $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Demostrar que f induce un homeomorfismo $\tilde{f} : (X/\sim) \to Y$ de $X/\sim$ con la topología cociente en Y.

3. En $S^1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ consideramos la relación de equivalencia $(x,y) \sim (-x,-y)$. Demostrar que el espacio cociente $S^1/\sim$ es de nuevo homeomorfo a la circunferencia.

4. Sea X un espacio topológico. Se define el cono de X, $C(X)$ como el espacio topológico cociente $X \times [0,1]/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por

$$(x_1,0) \sim (x_2,0) \qquad \text{para todos} \qquad x_1, x_2 \in X.$$

(Nótese que los puntos de $C(X)$ son de la forma (x,t), $x \in X$, $t \in]0,1]$ o bien $\star = [(x,0)]$). Se pide

(1) Demostrar que si X es un espacio de Hausdorff, entonces $C(X)$ también es un espacio de Hausdorff.

(2) Sean $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ la esfera unidad y $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ el disco unidad de $\mathbb{R}^2$. Construir, usando coordenadas polares, una aplicación $S^1 \times [\,0,1\,] \to \mathbb{D}$. Demostrar que $C(S^1)$ es homeomorfo a $\mathbb{D}$.

5. Sea $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ el disco del plano, con la topología usual. Definimos la relación de equivalencia determinada por

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2), \qquad \forall\, (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{D} \text{ tales que } x_1^2+y_1^2 = 1, x_2^2+y_2^2 = 1.$$

Se pide:

(1) Determinar el conjunto cociente $\mathbb{D}/\sim$, es decir, dar las clases de equivalencia resultantes.

(2) Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{D} & \to & S^2=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : u^2+v^2+w^2=1\} \\ (x,y) & \mapsto & \left(2\sqrt{1-(x^2+y^2)}\,x, 2\sqrt{1-(x^2+y^2)}\,y, 1-2(x^2+y^2)\right) \end{array}$$

da lugar a un homeomorfismo $\tilde{f}$ entre $\mathbb{D}/\sim$, con la topología cociente, y la esfera S^2, con la topología usual inducida como subespacio de $\mathbb{R}^3$.

6. Si X es un espacio conexo cuando usamos cierta topología, ¿debe seguir siéndolo si utilizamos otra menos fina? ¿y si es más fina? Ilustrarlo con ejemplos.

7. Si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico, ¿puede asegurarse que el interior y la frontera de A son también conexos?

8. En el plano con la topología usual, sean $S=\{(r\cos t, r\sin t) : r=1-\frac{1}{t}, t\geq 1\}$ y $C=\{(\cos t,\sin t): t\in\mathbb{R}\}$. Dibujar el conjunto $X=S\cup C$ y probar que es conexo pero no conexo por caminos.

9. Demostrar que X es conexo si y sólo si todos sus subconjuntos propios tienen frontera no vacía.

10. Demostrar que si $A\times B$ es conexo, entonces A y B también lo son.

11. Demostrar que si A y B son conexos por caminos y $A\cap B\neq\emptyset$, entonces $A\cup B$ también lo es.

12. Demostrar que si X e Y son conexos y A, B son subconjuntos propios no vacíos de X e Y respectivamente entonces $X\times Y\setminus A\times B$ es conexo. En la situación anterior, ¿es cierto que si X e Y son conexos por caminos entonces $X\times Y\setminus A\times B$ también lo es?

13. Demostrar que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto es no numerable.

14. Probar que si $f: X\to Y$ es un homeomorfismo entre dos espacios topológicos y $\{x_1,...,x_n\}\subset X$ entonces $X-\{x_1,...,x_n\}$ e $Y-\{f(x_1),...,f(x_n)\}$ también son homeomorfos. Como aplicación, demostrar que $]1,2[$, $[1,2]$ y $[1,2[$ no son homeomorfos.

15. Demostrar que $(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$ (los ejes) no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.