Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA **Hoja 3** **Curso 2001/2002**

1. Sean X_1 y X_2 los espacios topológicos obtenidos al dotar al conjunto X con las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, respectivamente. Demostrar que la función identidad $id : X_1 \to X_2$, $id(x) = x$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$. ¿Cuándo es un homeomorfismo?

2. Estudiar si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homoeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

3. Hallar una función abierta (esto es, que transforme abiertos en abiertos) que sea biyectiva pero no un homeomorfismo.

4. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ y la bola unidad abierta B correspondiente a la norma euclídea $\|\cdot\|_2$ son homeomorfos. *Sugerencia: estudiar la función* $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|_2}$ *que va de* $\mathbb{R}^n$ *en* B.

5. Demostrar que si $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \leq (g(x))^2\}$ es cerrado.

6. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

7. Demostrar que cualquier intervalo abierto (a, b) es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$, a la recta $\mathbb{R}$ y al rayo (o semirrecta) $(0, \infty)$.

8. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ hallar la topología inducida en los subconjuntos $X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

9. Utilizar coordenadas polares y la función $r \mapsto (r^2 + 1)^{-1}$ para demostrar que el semiplano derecho $\{(x, y) : x > 0\}$ es homeomorfo a $(0, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$.

10. Probar que $[0,1) \times [0,1)$ es homeomorfo a $[0,1] \times [0,1)$ (consideramos la distancia euclídea en ambos casos).

11. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Probar que son continuas las siguientes funciones:

(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(3) $h(x) = |g(x)|$

(4) $h(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

(5) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

(6) $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

12. Demostrar que las siguientes propiedades de un espacio topológico X se conservan por homeomorfismos. (Dicho de otra forma, se trata de **propiedades topológicas**)

(a) Para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un cerrado.
(A veces se llama a esta propiedad T_1)

(b) Para cada par de puntos distintos, existen sendos entornos disjuntos.
(Esta propiedad se suele llamar T_2 o propiedad de separación de Hausdorff).

13. Sea $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva, donde Y es un espacio T_1 y X tiene la topología cofinita. Probar que si f no es constante entonces Y tiene la topología cofinita.

14. Demostrar que X es un espacio topológico T_2 si y sólo si $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ es un cerrado en el espacio producto $X \times X$.

15. Dar un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea. *Sugerencia: Pensar en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.*