Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA **Hoja 1** **Curso 2001/2002**

1. Estudiar si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibujar la bola $B(x, r)$ de centro x y radio r, para los distintos valores de $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. ¿Qué sucesiones convergen en $(\mathbb{R}, d)$?

2. Estudiar si $d(A, B) = \sqrt{tr((A - B)^t \cdot (A - B))}$ define una distancia en el espacio de matrices 2×2. Nota: recuérdese que $tr = traza$ indica la suma de los elementos de la diagonal principal.

3. Demostrar que $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$ define una distancia en $[0, 1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

4. Si (X, d) es un espacio métrico y consideramos x, y, x' e y' elementos cualesquiera de X, probar que

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Deducir de ello que $\lim_n d(x_n, y_n) = d(x, y)$ cuando $\lim_n d(x_n, x) = 0 = \lim_n d(y_n, y)$.

5. Sea $c(n)$ la mayor potencia de 5 que divide a $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (p. ej. $c(75) = 5^2$, $c(12) = 5^0$, etc.). Demostrar que

$$d(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ \frac{1}{c(n-m)} & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

define una distancia en $\mathbb{Z}$. Demostrar que en este espacio métrico la sucesión $11, 101, 1001, 10001, 100001, ...$ es convergente. ¿Cuál es su límite?

6. Definir dos topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sobre un conjunto X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología. Si $\mathcal{T}_i$ es una familia de topologías sobre X, probar que $\cap_i \mathcal{T}_i$ es también una topología sobre X. Demostrar que existe una topología que contiene a cada $\mathcal{T}_i$ y es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

7. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a,b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon)\times\{b\}\big)\cup\big(\{a\}\times(b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U$. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

8. En un conjunto X se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que bien U es vacío o bien U contiene a un punto prefijado $a \in X$. Estudiar si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

9. En un conjunto X se considera la familia $\mathcal{T}_{cn}$ de todos los subconjuntos U de X tales que bien U es vacío, $U = X$ o bien $X \setminus U$ es finito o infinito numerable. Estudiar si $\mathcal{T}_{cn}$ es una topología en X.

10. En un conjunto se definen dos distancias d y d' que generan las topologías $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_{d'}$ respectivamente.

(i) Probar que la igualdad $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ es cierta si y sólo si las funciones $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,d')$ e $\mathrm{id} : (X,d') \to (X,d)$ son continuas (denotamos por $\mathrm{id}\,(x) = x$ la función identidad).

(ii) Deducir de lo anterior que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ si y sólo si coinciden las sucesiones convergentes en (X,d) y (X,d').

11. Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que $d'(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$ es una métrica en X que genera la misma topología que d.

12. Sean (X,d) un espacio métrico y $\alpha > 0$. Probar que $d'(x,y) = \min\{\alpha, d(x,y)\}$ es una distancia que genera la misma topología que d.

13. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(1) $\mathcal{B}_u = \{]a,b[: a < b, \quad a,b \in \mathbb{R}\}$
(2) $\mathcal{B}_{-\infty} = \{]-\infty, b[: b \in \mathbb{R}\}$
(3) $\mathcal{B}_{\infty} = \{]a, \infty[: a \in \mathbb{R}\}$

Se pide:

(i) Demostrar que cada familia es base de una topología.
(ii) Comparar esas topologías.
(iii) Demostrar que la topología generada por $\mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{-\infty}$ es la usual.
(iv) Decir cuál de las anteriores topologías es Hausdorff.