TOPOLOGIA (Matemáticas) , Examen Final , Septiembre 1999

Apellidos, nombre Grupo

1. (a) Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que $d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ es una distancia.

b) Comparar las topologías generadas por d y d' y decir si son iguales.

2. Demostrar o dar un contraejemplo:

a) Todo conjunto conexo con la topología cofinita en $\mathbb{R}$ es también conexo con la topología usual.

b) Si U_1, U_2 son abiertos simplemente conexos de $\mathbb{R}^2$ y $C = U_1 \cup U_2$ es conexo por arcos, entonces C es también simplemente conexo.

3. Sea $\mathcal{T}_S$ la topología en $\mathbb{R}$ generada por la base $\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ se conoce como *recta de Sorgenfrey*). Se pide

a) Encontrar en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ un conjunto cerrado y acotado que no sea compacto.

b) Hallar en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ el interior, cierre y puntos de acumulación del conjunto

$$A = (-\infty, 0) \cup \{3 + (-1)^n/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$$

4. a) Estudiar si la familia $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \cup (c, d) : a < b < c < d\}$ es base para una topología en $\mathbb{R}$ y en caso afirmativo si genera la topología usual.

b) Estudiar si la familia $\mathcal{B}_2 = \{$subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyo complementario es un punto$\}$ es base de la topología cofinita o de alguna otra topología.

5. Estudiar si los siguientes espacios son homeomorfos entre sí :

$$\mathbb{R}^3, \qquad (S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}) \times \mathbb{R}, \qquad S^1 \times S^1 \ .$$