TOPOLOGIA (Matemáticas) , Examen Final , Septiembre 2000

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas añadiendo una breve explicación o un contraejemplo según convenga.

a) Si $K \neq \emptyset$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que sus únicos subconjuntos conexos (no vacíos) son puntos entonces, necesariamente, K es finito.

b) Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \mathbb{R}$, es cerrado en la topología cofinita entonces es compacto con la usual.

c) Una función definida de $\mathbb{R}$ con la topología discreta en cualquier otro espacio con cualquier topología es siempre continua.

2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología inducida por la usual son homeomorfos

$$D \quad , \quad \overline{D} \quad , \quad \overline{D} \cup \big([0,4] \times \{0\}\big) \quad , \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

3. Demostrar que la base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ genera una topología estrictamente menos fina que la de Sorgenfrey (en la que $a, b \in \mathbb{R}$). Calcular razonadamente el interior, la frontera y la adherencia de A en ambas topologías siendo

$$A \ = \ (-\infty, -\sqrt{10}) \cap \mathbb{Q} \quad \cup \quad (-2, -1) \quad \cup \quad \{1 - 1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \quad \cup \quad (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$$

4. Sea $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que vale 0 en 0 y 1 en el resto. Demostrar que

$$d\,(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) = \delta\,(x_1 - x_2) + |y_1 - y_2|$$

define una distacia en $\mathbb{R}^2$ y que la topología métrica correspondiente es la topología del orden lexicográfico.

5. Denotemos mediante $\mathbb{R}^2_{lex}$ y $\mathbb{R}_{usu}$ a los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ con las topologías del orden lexicográfico y la usual, respectivamente. Considerando $f : \mathbb{R}^2_{lex} \to \mathbb{R}_{usu}$

a) Demostrar que si $f(x, y) = g(x)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arbitraria entonces f es continua.

b) Demostrar que si $f(x, y) = g_1(x) g_2(y)$ con g_j continuas consideradas como funciones $g_j : \mathbb{R}_{usu} \to \mathbb{R}_{usu}$, entonces f es continua.