TOPOLOGÍA (Matemáticas) , Examen Final , Febrero 2000

Apellidos, nombre Grupo

1. Decidir, dando una demostración o un contraejemplo, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

(i) Cualquier topología sobre $\mathbb{R}$ que sea menos fina que la cofinita no puede ser Hausdorff.
(ii) En un espacio Hausdorff, la intersección de dos compactos con un punto en común es compacta.
(iii) La intersección de dos conexos con un punto en común es conexa.
(iv) Cualquier subconjunto conexo por arcos de $\mathbb{R}^2$ que tenga grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$ es homeomorfo a S^1.

2. Sabiendo que $d(x,y) = \min(|x-y|, 1)$ y $d'(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ definen dos distancias en $\mathbb{R}$, se pide

(i) Estudiar si la sucesión $1^2, 1/2^2, 3^2, 1/4^2, 5^2, 1/6^2, \ldots$ converge a cero en $(\mathbb{R}, d')$.
(ii) Comparar, diciendo si alguna es más o menos fina o si coinciden, las topologías inducidas por d y d' en $\mathbb{R}$.

3. Estudiar si la siguiente lista contiene dos espacios homeomorfos (con la topología usual):

$$X_1 = S^1 \qquad X_2 = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\}) \qquad X_3 = \mathbb{R}^2 \qquad X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

4. Sea $A = (-\infty, 2) \cap \mathbb{Q} \;\cup\; (3,4) \;\cup\; \{6 - 1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Hallar el interior, la adherencia y la frontera de A con las topologías usual, cofinita y de Sorgenfrey (o del límite inferior $\mathcal{T}_{[\,)}$) en $\mathbb{R}$.

5. Comparar, diciendo si alguna es más o menos fina o si coinciden, la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ con la producto de la discreta en $\mathbb{R}$ por la usual en $\mathbb{R}$. Rehacer el problema cambiando $\mathbb{R}^2$ por $[0,1] \times [0,1]$ y $\mathbb{R}$ por $[0,1]$.