

# 3. Algunas aplicaciones

## 3.1. Problemas de puntos del retículo

¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan bajo una gráfica? ¿Cuántos caen dentro de un círculo grande? ¿Cuál es el promedio de la función que cuenta el número de divisores? Lo que tienen en común estos problemas es que requieren contar puntos en algún subconjunto del retículo  $\mathbb{Z}^2$ . Cuando estos subconjuntos están limitados por fronteras “suaves” las sumas trigonométricas se muestran como un arma fundamental, siempre que trabajemos con el derroche típico del Análisis, que va perdiendo un  $\epsilon$  en cada paso. Así que no tendremos respuestas exactas a las cuestiones anteriores, pero sí cotas para los términos de error.

Ya mencionamos en el capítulo anterior cómo obligar a que aparezca una suma trigonométrica cuando contamos: si queremos contar los enteros que hay en  $[-X, X]$ , el resultado es  $\sum \Psi(n)$  donde  $\Psi$  es la función característica de  $[-X, X]$ . Al aplicar la fórmula de sumación de Poisson ya tenemos una serie trigonométrica. El caso de dos dimensiones se reduce a éste cortando en rodajas unidimensionales. La dificultad que aparece en este esquema es la lentitud de la convergencia o la ausencia de ella debido a que  $\Psi$  es muy poco regular. Una vez que lo hayamos resuelto, podremos aplicar nuestros métodos favoritos del pasado capítulo.

### La máquina de hacer regularizaciones

Se define la convolución de dos funciones  $f$  y  $g$  como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Si  $g \in C_0^\infty$ , inmediatamente  $f * g$  es  $C^\infty$  para cualquier  $f$  integrable. Por otra parte, si  $g$  es la delta de Dirac (una “función” infinitamente concentrada alrededor del origen con integral uno) entonces  $f * g$  es lo mismo que  $f$ . La idea es que si tomamos una función  $g \in C_0^\infty$  que se parezca mucho a la delta de Dirac, tendremos una función  $C^\infty$  que se parece mucho a  $f$ . Se puede forzar el parecido de cualquier función de  $C_0^\infty$  a la delta de Dirac encogiendo la  $x$  y estirando la  $y$ . Concretamente, si  $\eta \in C_0^\infty$  con  $\int \eta = 1$ , entonces la máquina de hacer regularizaciones será:

$$f \mapsto f * g \quad \text{con } g(x) = \delta^{-1}\eta(\delta^{-1}x) \text{ y } \delta > 0 \text{ pequeño.}$$

De alguna forma el efecto de esto es que promediamos  $f$  en cada intervalo de tamaño proporcional a  $\delta$  y entonces consideramos que  $f * g$  y  $f$  son iguales si nuestra miopía no nos permite distinguir letras de tamaño  $\delta$ .

La pregunta natural es qué ventaja reporta hacer las regularizaciones de esta forma tan rara. El truco está en que si vamos a aplicar la fórmula de sumación de Poisson, más vale que sepamos manejar las transformadas de Fourier que aparezcan, y esto es automático usando convoluciones gracias a la sencilla propiedad:

$$(3.1) \quad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Curiosamente este truco, que es ampliamente usado en Análisis Armónico, apenas tiene arraigo entre los investigadores en Teoría Analítica de Números, pero la comodidad no sabe de tradiciones.

Con este armamento vamos a hacer dos regularizaciones de la función que nos interesa. Dibujándolas es fácil percatarse de que en una se suavizan el escalón hacia afuera y en otra hacia adentro.

**Proposición 3.1.** *Sea  $\Psi$  la función característica de  $[-X, X]$ . Dado  $0 < \delta \leq X$ , existen dos funciones  $\Psi^-, \Psi^+ \in C_0^\infty$  con  $\int \Psi^- = 2X - 2\delta$ ,  $\int \Psi^+ = 2X + 2\delta$ ; tales que*

$$\Psi^-(x) \leq \Psi(x) \leq \Psi^+(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y

$$\widehat{\Psi}^-(\xi) = \phi(\delta\xi) \frac{\text{sen}(2\pi(X - \delta)\xi)}{\pi\xi}, \quad \widehat{\Psi}^+(\xi) = \phi(\delta\xi) \frac{\text{sen}(2\pi(X + \delta)\xi)}{\pi\xi} \quad \text{para } \xi \neq 0$$

donde  $-1 \leq \phi \leq 1$  es una función de decaimiento rápido.

DEM.: Sea  $\eta \in C_0^\infty$  una función par, no negativa con  $\int \eta = 1$  y  $\text{sop } \eta = [-1/2, 1/2]$ . Esto implica que  $\widehat{\eta}$  es real de decaimiento rápido y  $-1 \leq \widehat{\eta} \leq 1$ . Tomando  $\Psi^-$  como la convolución de la función característica de  $[-(X - \delta), X - \delta]$  con  $\delta^{-1}\eta(\delta^{-1}x)$ , es fácil comprobar que  $\Psi^-(x) = 0$  si  $|x| \geq X$  y  $\Psi^-(x) \leq 1$  en general; lo que prueba  $\Psi^-(x) \leq \Psi(x)$  mientras que  $\int \Psi^- = 2X - 2\delta$  se sigue por integración directa. Por otra parte, teniendo en cuenta (3.1) y que la transformada de Fourier de la función característica de  $[-y, y]$  es  $(\pi\xi)^{-1} \text{sen}(2\pi y\xi)$ , se obtiene la fórmula para  $\widehat{\Psi}^-(\xi)$ .

Para  $\widehat{\Psi}^+$  se procede exactamente igual pero ahora partiendo de la función característica de  $[-(X + \delta), X + \delta]$ . ■

### Puntos bajo gráficas

Supongamos una función  $f$  no negativa definida en  $[a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Nos preguntamos acerca del número de puntos de coordenadas enteras que están entre la gráfica de  $f$  y el eje  $X$ , es decir:

$$\mathcal{N} = \#\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq m \leq b, 0 \leq n \leq f(m)\}.$$

Para ello vamos a pedir cierta condición de convexidad sobre la función  $f$ . Esto es natural, ya que una función muy plana o con un crecimiento incontrolado, podría atrapar demasiados puntos arruinando el término de error.

**Teorema 3.2.** *Con la notación anterior, si  $f \in C^2$  y  $0 < \lambda_2 \ll |f''| \ll \lambda_2 < 1$  entonces*

$$\mathcal{N} = \frac{b-a}{2} + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b f(x) dx + O((b-a)\lambda_2^{1/3} + \lambda_2^{-1/2}).$$

Nota: Esto se puede interpretar diciendo que si los puntos de las fronteras rectas cuentan sólo la mitad, el número de puntos limitados por la gráfica de  $f$  se aproxima por el área (la integral).

DEM.: Quizá cambiando  $f$  por  $f+1$  (lo que lleva a un resultado equivalente) siempre se puede suponer  $f \geq 1$ . Fijado  $m$ , el número  $\mathcal{N}_m$  de valores de  $n$  con  $0 \leq n \leq f(m)$  se puede escribir como  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum \Psi(n)$  donde  $\Psi$  es la función característica de  $[-X, X]$  con  $X = f(m)$ . Por la proposición anterior y la fórmula de sumación de Poisson, para  $0 < \delta \leq 1$

$$-\delta + \sum_{n \neq 0} \phi(\delta n) \frac{\text{sen}(2\pi(f(m) - \delta)n)}{2\pi n} \leq \mathcal{N}_m - f(m) - \frac{1}{2} \leq \delta + \sum_{n \neq 0} \phi(\delta n) \frac{\text{sen}(2\pi(f(m) + \delta)n)}{2\pi n}.$$

Sumando en  $m$  y aplicando el teorema de los valores intermedios, existe  $\delta' \in [-\delta, \delta]$  tal que

$$(3.2) \quad \mathcal{N} - \sum_{a \leq m \leq b} \left( f(m) + \frac{1}{2} \right) \ll (b-a)\delta + \left| \sum_{n \neq 0} \frac{\phi(\delta n)}{2\pi n} \sum_{a \leq m \leq b} \text{sen}(2\pi(f(m) + \delta')n) \right|.$$

Como  $\phi$  es de decaimiento rápido,  $|\phi(\delta n)| \ll (1 + \delta|n|)^{-1}$ , y por la acotación de van der Corput,  $\sum e(f(m)n) \ll (b-a)(\lambda_2|n|)^{1/2} + (\lambda_2|n|)^{-1/2}$ . Por tanto el sumatorio entre valores absolutos está acotado por

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-a)\lambda_2^{1/2}n^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}n^{-1/2}}{n(1+\delta n)} &\ll \sum_{1 \leq n \leq \delta^{-1}} ((b-a)\lambda_2^{1/2}n^{-1/2} + \lambda_2^{-1/2}n^{-3/2}) \\ &\quad + \delta^{-1} \sum_{n > \delta^{-1}} ((b-a)\lambda_2^{1/2}n^{-3/2} + \lambda_2^{-1/2}n^{-5/2}). \end{aligned}$$

Acotando las sumas de potencias ( $p < 1 \Rightarrow \sum_{n \leq M} n^{-p} \ll M^{1-p}$ ;  $p > 1 \Rightarrow \sum_{n > M} n^{-p} \ll M^{1-p}$ ), se obtiene un término que es de orden  $(b-a)\lambda_2^{1/2}\delta^{-1/2} + \lambda_2^{-1/2}$ .

Por otra parte, la fórmula de sumación de Euler-Mac Laurin implica

$$\sum_{a \leq m \leq b} \left( f(m) + \frac{1}{2} \right) = \frac{b - a + f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b f(x) dx + O\left(1 + \int_a^b |f''|\right).$$

Sustituyendo estas estimaciones en (3.2) se obtiene el teorema con un término de error del orden de

$$(b - a)\delta + (b - a)\lambda_2^{1/2} \delta^{-1/2} + \lambda_2^{-1/2} + 1 + (b - a)\lambda_2.$$

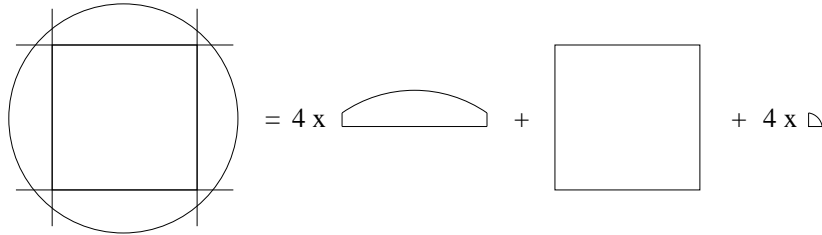
Y escogiendo  $\delta = \lambda_2^{1/3}$  esta expresión es  $O((b - a)\lambda_2^{1/3} + \lambda_2^{-1/2})$ . ■

Ya habíamos mencionado que la acotación básica de van der Corput es fácil de mejorar si  $\lambda_2$  es muy pequeño. En este contexto, si la gráfica de  $f$  se parece mucho a una recta, una cuenta directa puede dar mejor resultado que las sumas trigonométricas para determinar el número de puntos de coordenadas enteras.

### Los problemas del círculo y del divisor

Después de haber contado puntos bajo gráficas, le toca el turno a las otras dos preguntas que nos hicimos al comenzar, las cuales dan lugar a los problemas del círculo y del divisor.

Sea  $r(n)$  el número de representaciones de  $n$  como suma de dos cuadrados de números enteros,  $r(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}$ . Es fácil comprobar que la suma de  $r(n)$  de  $n = 0$  a  $N$  coincide con el número de puntos del retículo en el círculo centrado en el origen de radio  $R = \sqrt{N}$ . Sea  $M$  la parte entera de  $R/\sqrt{2}$ . Cortando el susodicho círculo por los lados del cuadrado  $[-M, M] \times [-M, M]$  se obtienen típicamente nueve regiones.



El número de puntos del retículo en el círculo se puede escribir como la suma de los que hay en estas regiones contando los de las fronteras rectas (que son comunes a dos regiones) sólo por la mitad. La región superior está acotada por la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  que cumple  $R^{-1} \ll |f''(x)| \ll R^{-1}$  en  $[-M, M]$ . Así que con esta manera de contar, según el teorema anterior el número de puntos diferirá del área en

$O(R(R^{-1})^{1/3} + (R^{-1})^{-1/2}) = O(R^{2/3})$ . Lo mismo se aplica, por simetría, a las otras tres regiones congruentes con la superior. Por otro lado, en el cuadrado  $[-M, M] \times [-M, M]$  la diferencia entre los puntos así contados y el área es exactamente uno; y trivialmente la contribución de las “esquinas” es  $O(1)$ . Con ello hemos probado el siguiente resultado para el llamado *problema del círculo*, que consiste en estudiar el error al aproximar por el área el número de puntos en el interior de un círculo grande.

**Proposición 3.3.** Para  $R > 1$

$$\#\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq R^2\} = \pi R^2 + O(R^{2/3}),$$

o equivalentemente

$$\sum_{n \leq N} r(n) = \pi N + O(N^{1/3}).$$

Sea  $d(n)$  el número de divisores (positivos) de  $n$ . El *problema del divisor* consiste en estimar  $\sum_{n \leq N} d(n)$ . Lo cual lleva directamente a contar puntos bajo la gráfica de  $f(x) = N/x$  ya que

$$(3.3) \quad \sum_{n \leq N} d(n) = \#\{(m, n) : 1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N/m\}$$

La función  $f''$  presenta unas variaciones tan grandes que el resultado que teníamos al respecto es de escasa utilidad, siendo necesario hurgar un poco en la demostración aprovechando la simetría de la gráfica de  $f$  y empleando una alternativa a la fórmula de sumación de Euler-Mac Laurin.

**Proposición 3.4.** Para  $N > 1$

$$\sum_{n \leq N} d(n) = N \log N + (2\gamma - 1)N + O(E(N))$$

donde

$$E(N) = 1 + N^{1/2}\delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n\delta)} \left| \sum_{m \leq N^{1/2}} e\left(\frac{Nn}{m}\right) \right|$$

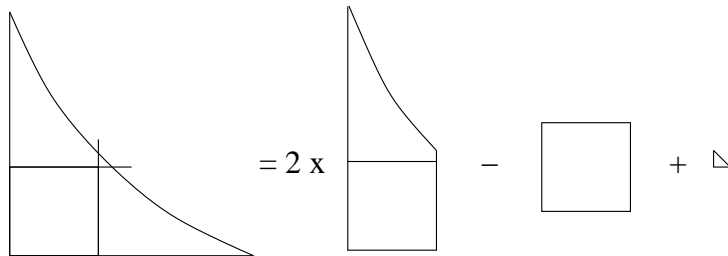
y  $0 < \delta \leq 1$  es una función arbitraria de  $N$ .

Nota: Recuérdese que  $\gamma = 0.577\dots$  es la constante de Euler dada por  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$  o por  $1 - \int_1^{\infty} t^{-2} \text{Frac}(t) dt$ , donde  $\text{Frac}(t)$  indica la parte fraccionaria de  $t$ .

DEM.: Sea  $M$  la parte entera de  $N^{1/2}$ . Por la simetría de  $f(x) = N/x$  a través de  $y = x$ , es fácil ver que (3.3) implica

$$\sum_{n \leq N} d(n) = 2\#\{(m, n) : 1 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N/m\} - M^2 - 2M + O(1).$$

Donde  $-M^2$  viene de los puntos del cuadrado  $[1, M] \times [1, M]$ , que se cuentan dos veces, y  $-2M$  por haber reemplazado en (3.3),  $1 \leq n \leq N/m$  por  $0 \leq n \leq N/m$ .



Aplicando (3.2) con  $f(x) = N/x$  y  $[a, b] = [1, M]$ , se llega al resultado deseado siempre que se cumpla

$$(3.4) \quad 2 \sum_{m \leq M} \left( \frac{N}{m} + \frac{1}{2} \right) - M^2 - 2M = N \log N + (2\gamma - 1)N + O(1).$$

El lema de Abel se puede utilizar, como se hizo en los preliminares pero extrayendo un término más, para deducir

$$\sum_{m \leq M} \frac{1}{m} = \log M + \gamma + \frac{1}{2M} + O(M^{-2}).$$

Por Taylor,  $\log M = \frac{1}{2} \log N + \log(1 + (M - N^{1/2})N^{-1/2}) = \frac{1}{2} \log N + MN^{-1/2} - 1 + O(N^{-1})$ . Sustituyendo estas igualdades en el primer miembro de (3.4) se sigue que es igual al segundo salvo un sumando de la forma  $2MN^{1/2} - N + NM^{-1} - M^2 - M$ . Basta escribir  $M = N^{1/2} + O(1)$  para llegar a que su contribución es  $O(1)$ . ■

Las fases  $f(m) = Nn/m$  son adecuadas para la aplicación de la teoría de pares de exponentes, permitiendo una versátil acotación del término de error.

**Teorema 3.5.** *Sea  $(p, q)$  un par de exponentes  $0 < p \leq q \leq 1$ . Entonces se verifica*

$$\sum_{n \leq N} d(n) = N \log N + (2\gamma - 1)N + O(N^{(p+q)/(2p+2)}).$$

DEM.: El par de exponentes  $(p, q)$  implica

$$\left| \sum_{N^{1/2}/2 < m \leq N^{1/2}} e\left(\frac{Nn}{m}\right) \right| \ll n^p N^{q/2}.$$

Es fácil ver que la contribución de sumas similares en los intervalos  $(N^{1/2}/4, N^{1/2}/2]$ ,

$(N^{1/2}/8, N^{1/2}/4]$ , etc. es absorbida por la acotación anterior. Por tanto

$$E(N) \ll N^{1/2}\delta + \sum_{n \leq \delta^{-1}} n^{p-1}N^{q/2} + \sum_{n > \delta^{-1}} \delta^{-1}n^{p-2}N^{q/2} \ll N^{1/2}\delta + \delta^{-p}N^{q/2}.$$

Escogiendo  $\delta = N^{(q-1)/(2p+2)}$  se deduce el resultado. ■

Se puede probar **[Ci-Co]**

$$r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$$

donde  $d_1(n)$  y  $d_3(n)$  son respectivamente el número de divisores de la forma  $4n + 1$  y  $4n + 3$ . Con ello es posible obtener una expresión similar a  $E(N)$  para el error al aproximar  $\sum_{n \leq N} r(n)$  por  $\pi N$  (en **[Gr-Ko]** parece haber algunas erratas en la relación exacta entre ambos problemas). Y el mismo exponente  $(p + q)/(2p + 2)$  del término de error se tiene en este caso.

Con el par de exponentes  $(1/2, 1/2)$  el error es  $O(N^{1/3})$ , como ya se obtuvo para el problema del círculo. El par  $(11/30, 16/30)$  permite ir un poco más allá pasando de  $1/3 = 0'3333\dots$  (a veces llamado *exponente trivial*) a  $27/82 = 0'3292\dots$ . Incluso existe un algoritmo **[Gr-Ko]** para aproximar con precisión arbitraria el ínfimo de  $(p + q)/(2p + 2)$  con  $(p, q)$  par de exponentes de van der Corput. El resultado es desalentador, ya que dicho ínfimo es  $0'3290\dots$ , extremadamente cerca de  $1/3$ . Esta barrera fue sobrepasada primero con métodos bidimensionales (gracias a Titchmarsh, Hua, Kolesnik y otros), y más recientemente con el llamado método discreto de Hardy y Littlewood **[Hu]**. El último exponente anunciado (todavía no publicado) es  $131/416 = 0'3149\dots$  debido a Huxley.

Por otro lado se sabe desde 1916 que el error no es  $O(N^{1/4})$ , y la Conjetura de Hardy es que éste es el exponente ínfimo. Es decir, que para todo  $\theta > 1/4$  el error es  $O(N^\theta)$ , lo cual está avalado por diferentes resultados en media **[Ha]**. Además sería consecuencia del hipotético par de exponentes  $(\epsilon, 1/2 + \epsilon)$ .

### 3.2. Partes fraccionarias de polinomios

Tomemos un número  $x \in \mathbb{R}$ . ¿Qué ocurre con las partes fraccionarias de  $nx$ ? Si  $x$  es una fracción, cuando  $n$  supere al denominador la misma lista de números se repetirá de nuevo. Las sucesiones periódicas son un poco aburridas, así que probamos con  $x$  irracional. Por ejemplo para  $x = \sqrt{2}$  se obtiene la sucesión:

$$0'41421\dots, 0'82842\dots, 0'24264\dots, 0'65685\dots, 0'07106\dots, 0'48528\dots, 0'89949\dots$$

Ahora el resultado es caótico. Para no quedarnos sin estudiar nada, vamos a tratar de preguntarnos hasta qué punto es caótica la sucesión anterior u otras dadas por polinomios

más complicados como  $\sqrt{2}n^3 + 7n^2 + \pi n + 1$ . La respuesta será que cuando el coeficiente principal de un polinomio no constante es irracional (en realidad basta que lo sea cualquiera excepto el término independiente), al evaluarlo en los naturales su parte fraccionaria visita por igual todos los rincones de  $[0, 1)$ . También estudiaremos brevemente un problema más delicado relativo a la posibilidad de visitar rinconcitos minúsculos alrededor del cero o el uno, es decir, de obtener números casi enteros.

### Sucesiones equidistribuidas

Si dibujamos con un ordenador los valores  $\text{Frac}(n\sqrt{2})$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  veremos una nube de puntos que rellena uniformemente el intervalo  $[0, 1]$ . Pero, ¿qué queremos decir exactamente con “uniformemente”? Para ser exactos nada mejor que una definición matemática.

**DEFINICIÓN:** *Se dice que una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$  está equidistribuida en  $[0, 1]$  si para cualquier intervalo  $[a, b] \subset [0, 1]$  se cumple*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N : a_n \in [a, b]\}}{N} = b - a.$$

Esto es lo mismo que decir que, en algún sentido, la probabilidad de que un término de la sucesión esté en  $[a, b]$  coincide con la masa de probabilidad de este intervalo al utilizar la distribución uniforme en  $[0, 1]$ .

Ahora comprobamos que el problema que nos hemos propuesto no es trivial a partir de la definición. De hecho, parece muy difícil, porque no sabemos cuánto va a dar  $n\sqrt{2}$  cuando  $n$  es grande (ni cuando es pequeño, porque  $\sqrt{2}$  tiene infinitos decimales y la calculadora sólo emplea un número finito).

Lo que asegura el siguiente resultado es que tener una sucesión equidistribuida es lo mismo que tener un método de Montecarlo para aproximar integrales. (Para funciones “normales” los métodos típicos del Cálculo Numérico: Newton-Côtes, cuadraturas de Gauss, Romberg, etc. son mucho más efectivos). Con  $\mathbb{T}$  (el toro unidad unidimensional) representaremos el intervalo  $[0, 1]$  con los extremos identificados. Por tanto las funciones continuas en  $\mathbb{T}$  son las funciones continuas en  $[0, 1]$  con  $f(0) = f(1)$ .

**Lema 3.6.** *La sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$  está equidistribuida en  $[0, 1]$  si y sólo si*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(a_n) = \int_0^1 f(x) dx$$

para toda función continua  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ .



DEM.:  $\Rightarrow$ ) Toda función continua es límite uniforme de funciones escalonadas y cada una de ellas es combinación lineal de funciones características de intervalos con interior disjunto. Por tanto basta considerar el caso en que  $f$  es la función característica de un intervalo  $[a, b] \subset [0, 1]$ , y en este caso el límite del enunciado es idéntico a la definición de equidistribución.

$\Leftarrow$ ) Si  $\Psi$  es la función característica de  $[a, b] \subset [0, 1]$ , sean  $\Psi^-$  y  $\Psi^+$  funciones continuas en  $\mathbb{T}$  con  $\Psi^- \leq \Psi \leq \Psi^+$ , y tales que  $\int \Psi^+$  y  $\int \Psi^-$  se diferencien de  $b - a$  en menos de  $\epsilon$  (compárese con las homónimas de la sección anterior, basta hacer las convoluciones en  $\mathbb{T}$ ). Entonces

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \Psi^-(a_n) \leq \frac{\#\{n \leq N : a_n \in [a, b]\}}{N} \leq \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \Psi^+(a_n).$$

Tomando límites cuando  $N \rightarrow \infty$  y haciendo  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño, se llega a que  $a_n$  está equidistribuida. ■

Y por fin llegamos a un criterio eficiente en el caso que nos ocupa.

**Proposición 3.7** (Criterio de Weyl). *Una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1]$  está equidistribuida en  $[0, 1]$  si y sólo si para cada entero  $m \neq 0$ ,  $\sum_{n \leq N} e(ma_n) = o(N)$ .*

DEM.:  $\Rightarrow$ ) Nótese que  $\int_0^1 \cos(2\pi mx) dx = \int_0^1 \sin(2\pi mx) dx = 0$  para  $m \neq 0$ . Por el lema anterior, esto implica  $N^{-1} \sum_{n \leq N} e(ma_n) \rightarrow 0$ .

$\Leftarrow$ ) Por el teorema de Fejér [**Dy-Mc**] cualquier función continua en  $\mathbb{T}$  se puede aproximar uniformemente por sumas finitas de la forma  $S(x) = \sum_{|m| \leq M} \lambda_m e(mx)$ . Y por tanto basta comprobar la condición del lema anterior para las partes real e imaginaria de  $e(mx)$ . (Nótese que  $N^{-1} \sum_{n \leq N} \lambda_0 = \int S$ ). ■

### Funciones polinómicas y equidistribución

El criterio de Weyl es suficiente para resolver nuestro problema tipo acerca de la distribución de  $\text{Frac}(n\sqrt{2})$ . Y como no hemos hecho consideraciones especiales a  $\sqrt{2}$ , el resultado es general.

**Proposición 3.8.** *Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , la sucesión  $\text{Frac}(n\alpha)$  con  $n \in \mathbb{N}$  está equidistribuida en  $[0, 1]$ .*

DEM.: Empleando la suma de una progresión geométrica, para cada  $m \neq 0$

$$\left| \sum_{n \leq N} e(mn\alpha) \right| = \left| \frac{e((N+1)m\alpha) - e(m\alpha)}{e(m\alpha) - 1} \right| \leq \frac{2}{|e(m\alpha) - 1|} = \frac{1}{|\sin(\pi m\alpha)|}.$$

Fijados  $m$  y  $\alpha$  este último valor es una constante, y se aplica el Criterio de Weyl. ■

Con esto tenemos resuelto el caso de grado uno. Lo que hizo Weyl [We] en el de grado  $k$  es elevar al cuadrado para que aparecieran incrementos (derivadas) de las fases y poder llevar a cabo un ingenioso argumento inductivo. Para evitar algunos detalles emplearemos la versión de van der Corput del truco de Weyl que permite hacer general dicho razonamiento inductivo.

**Teorema 3.9** (Criterio de van der Corput). *Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ . Si para cada  $r \in \mathbb{Z}^+$  la sucesión dada por  $b_n = \text{Frac}(a_{n+r} - a_n)$  está equidistribuida en  $[0, 1]$  entonces  $a_n$  también lo está.*

Nota: Se sabe que  $\mathbb{Z}^+$  puede reemplazarse por conjuntos ms pequeños [Mo].

DEM.: Fijados  $m$  y  $H$ , por el Lema 2.5 con  $f(n) = ma_n$ , para  $N > H$

$$\left| \sum_{n \leq N} e(ma_n) \right|^2 \leq 4 \frac{N^2}{H} + 4N \max_{r \leq H} \left| \sum_{n \leq N-r} e(mb_n) \right|.$$

Dividiendo entre  $N^2$  y empleando que  $\sum_{n \leq N-r} e(mb_n) = o(N)$  (por el Criterio de Weyl), se concluye

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e(ma_n) \right|^2 \leq \frac{4}{H}.$$

Como  $H$  es arbitrario, el límite debe existir y ser nulo, lo que implica la equidistribución de acuerdo con el Criterio de Weyl. ■

**Corolario 3.10.** *Sea un polinomio  $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k \in \mathbb{R}[x]$  con  $a_0 \notin \mathbb{Q}$ , entonces la sucesión  $\text{Frac}(P(n))$  con  $n \in \mathbb{N}$  está equidistribuida en  $[0, 1]$ .*

DEM.: Se procede por inducción en el grado. Ya hemos visto el caso  $k = 1$ . Por otra parte, si  $P$  es de grado  $k$  entonces  $P(n+r) - P(n)$  es de grado  $k-1$  (en  $n$ ) y basta aplicar el teorema anterior y la hipótesis de inducción. ■

### Aproximación diofántica

Ya sabemos que  $\text{Frac}(\pi n)$  está equidistribuida, por tanto habrá muchos valores de  $n$  para los que  $\pi n$  esté cerca de un entero, pero ¿cuánto de cerca? Si lo estuviera mucho tendríamos una buena aproximación  $\pi \approx m/n$ . ¿Y si nos empeñamos en que el denominador sea un cuadrado? No queremos conceder a  $\pi$  ningún privilegio, que bastantes tiene ya, sino que buscamos resultados generales.

El caso lineal está basado en una bella aplicación del principio del palomar.

**Lema 3.11** (Dirichlet). Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Para cada  $N \in \mathbb{Z}^+$  existen  $a, q \in \mathbb{Z}$  con  $1 \leq q \leq N$  tales que  $|q\alpha - a| < 1/N$ .

Nota: La condición  $N \in \mathbb{Z}^+$  es superflua [Va], pudiéndose reemplazar por  $N \in [1, \infty)$ .

DEM.: Considérense  $\text{Frac}(\alpha)$ ,  $\text{Frac}(2\alpha)$ ,  $\text{Frac}(3\alpha)$ ,... $\text{Frac}(N\alpha)$ . Evidentemente son  $N$  números que pertenecen a

$$\left[0, \frac{1}{N}\right) \cup \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{N-1}{N}, 1\right) = [0, 1).$$

Si cada uno de estos números perteneciera a exactamente uno de los  $N$  subintervalos, alguno de ellos, digamos  $\text{Frac}(q\alpha)$ , pertenecería al primero, entonces  $|q\alpha - a| < 1/N$  donde  $a$  es la parte entera de  $q\alpha$ .

En otro caso, si  $\text{Frac}(q_1\alpha)$  y  $\text{Frac}(q_2\alpha)$ ,  $q_1 < q_2$ , están en un mismo subintervalo, se verifica  $|qx - a| < 1/N$  con  $q = q_2 - q_1$  y  $a$  es igual a la diferencia de las correspondientes partes enteras. ■

**Proposición 3.12.** Dado  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  sea  $\delta(n)$  la distancia de  $n\alpha$  al entero más cercano, entonces se verifica  $n\delta(n) < 1$  para infinitos  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

DEM.: Sean  $a$  y  $q$  como en el lema anterior, entonces  $|q\alpha - a| < N^{-1} \leq q^{-1}$  implica  $q\delta(q) \leq 1$ . Sea  $N'$  tal que  $(N')^{-1} < |q\alpha - a|$ . Aplicando el lema anterior con  $N'$  en lugar de  $N$  se tiene  $q'\delta(q') \leq 1$  con  $|q'\alpha - a'| < |q\alpha - a|$ , y por tanto  $q \neq q'$ . Este proceso se puede repetir indefinidamente. ■

En el difícil caso de polinomios de grado superior, sólo se tienen resultados parciales lejanos del caso lineal. Estudiaremos aquí el caso cuadrático.

**Proposición 3.13.** Dado  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  sea  $\Delta(n)$  la distancia de  $n^2\alpha$  al entero más cercano, entonces para cada  $\sigma < 1/2$  se verifica  $n^\sigma \Delta(n) < 1$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$ .

DEM.: Sea  $M = N^\sigma$  con  $N\delta(N) < 1$ , digamos que  $|\alpha - a/N| < N^{-2}$  con  $a/N$  irreducible. Por el resultado anterior  $M$  puede tomar valores arbitrariamente grandes (suponemos  $\sigma > 0$ ). Sea la función

$$F(x) = M \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta(M(x+m))$$

con  $\eta \in C_0^\infty$  no negativa y  $\text{sop } \eta = [-1, 1]$ . La “gracia” de la función  $F$  es que  $F(n^2\alpha) \neq 0$  si y sólo si  $\Delta(n) < M^{-1} = N^{-\sigma}$ . De modo que basta probar

$$(3.5) \quad \sum_{n \leq N} F(n^2\alpha) \neq 0.$$

Desarrollando por Fourier (véase la demostración de la fórmula de sumación de Poisson)

$$F(x) = \int \eta(t) dt + \sum_{m \neq 0} \hat{\eta}(m/M) e(mx).$$

Sea  $M' = N^{\sigma'}$  con  $\sigma < \sigma' < 1/2$ . Como  $\hat{\eta}$  es de decaimiento rápido, la contribución de los términos con  $|m| > M'$  es  $o(1)$ . Además, una vez fijada  $\eta$ ,  $\int \eta$  es una constante positiva y  $\hat{\eta}$  está acotada. Por tanto (3.5) se deduce si establecemos

$$(3.6) \quad \sum_{m \leq M'} \left| \sum_{n \leq N} e(mn^2\alpha) \right| = o(N).$$

Llamemos  $S$  a esta suma doble. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, expandiendo el cuadrado (lo que equivale a aplicar el Lema 2.5 con  $H = b - a$ )

$$|S|^2 \ll M' \sum_{m \leq M'} \left( N + \sum_{r \leq N} \left| \sum_{n \leq N'} e(2mnr\alpha) \right| \right) \quad \text{para algún } N' \leq N.$$

Como ya habíamos visto, la suma interior es la de una progresión geométrica, y se tiene

$$|S|^2 \ll (M')^2 N + M' \sum_{m \leq M'} \sum_{r \leq N} \min(N, |\text{sen}(2\pi mr\alpha)|^{-1}).$$

El número de formas de expresar un número como  $mr$  con  $m \leq M'$  y  $r \leq N$  es de orden menor que cualquier potencia positiva de  $N$  [**Ha-Wr**], por tanto

$$(3.7) \quad |S|^2 \ll (M')^2 N + N^{1/2} \sum_{l \leq M'N} \min(N, |\text{sen}(2\pi l\alpha)|^{-1}).$$

Por hipótesis,  $\alpha = a/N + \epsilon/N^2$  con  $|\epsilon| \leq 1$ . La contribución a la suma en cada intervalo de longitud  $N$  es

$$\begin{aligned} \sum_{L < l \leq L+N} \min(N, |\text{sen}(2\pi l\alpha)|^{-1}) &= \sum_{n \leq N} \min \left( N, \left| \text{sen} \left( L_0 + 2\pi \frac{an}{N} + 2\pi \frac{\epsilon n}{N^2} \right) \right|^{-1} \right) \\ &\ll N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \dots + \frac{N}{N-1} \ll N \log N \end{aligned}$$

donde se ha escrito  $L_0 = 2\pi L\alpha$  y  $l = L + n$  en la primera igualdad. La desigualdad posterior se debe a que  $an/N$  recorre módulo uno los números  $0, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N$

cuando  $1 \leq n \leq N$  (ya que  $n \mapsto an$  es biyectiva en  $\mathbb{Z}_N$ ); mientras que  $\epsilon n/N^2$  vale como máximo  $1/N$ .

Sustituyendo en (3.7) y extrayendo raíces cuadradas se tiene

$$|S| \ll M' N^{1/2} + N^{1/4} (M')^{1/2} N^{1/2} \log^{1/2} N.$$

Recordando que  $M' = N^{\sigma'}$  con  $\sigma' < 1/2$ , se deduce finalmente (3.6). ■

La conjetura es que en el caso cuadrático, por analogía con el lineal, se puede tomar  $\sigma < 1$  en vez de  $\sigma < 1/2$  [Mo]; lo cual sería cierto bajo otras conjeturas acerca de sumas trigonométricas. Sin embargo durante más de cuarenta años, no se consiguió ir más allá de  $1/2$ , hasta que en 1995 Zaharescu [Za] probó que  $\sigma < 2/3$  es válido, y que fijado  $\sigma < 4/7$ , para  $N$  mayor que cierta constante siempre existe algún  $n \leq N$  tal que  $n^\sigma \Delta(n) \leq 1$ .

### 3.3. Volviendo al teorema de los números primos

La función  $\zeta(s)$  viene representada para  $\text{Re } s > 1$  por una serie trigonométrica ya que  $s = \sigma + it \Rightarrow n^{-s} = n^{-\sigma} e(-\frac{t}{2\pi} \log n)$ . Como ya habíamos mencionado, los métodos de sumas trigonométricas permiten conseguir mejores estimaciones que las obtenidas en el primer capítulo y ensanchar la región libre de ceros un poco, con la consiguiente mejora del error en el teorema de los números primos.

#### De nuevo la variable compleja

Si revisamos cómo habíamos obtenido la región libre de ceros  $\sigma > 1 - C/\log(|t| + 2)$ , veremos que el logaritmo en el denominador proviene directamente del que aparecía al acotar  $\text{Re}(\zeta'/\zeta)$ . Cambiando este logaritmo por una función genérica se tiene el siguiente resultado:

**Lema 3.14.** *Sea  $E = E(t)$  una función positiva con  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = +\infty$  tal que*

$$-\text{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)} \leq E(\gamma) - \frac{1}{\sigma - \beta} \quad y \quad -\text{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma + 2i\gamma)} \leq E(\gamma)$$

para cualquier cero  $\rho = \beta + i\gamma$  no trivial de  $\zeta$  y todo  $\sigma \geq 1 + O(1/E(\gamma))$ . Entonces para cierta constante  $C > 0$ , la región formada por los  $s = \sigma + it$  tales que

$$\sigma > 1 - \frac{C}{E(t)},$$

está libre de ceros. de  $\zeta$ .

Un inconveniente llamativo es que aunque acotáramos muy bien  $\zeta$  empleando sumas trigonométricas, no parece claro que se concluya nada acerca de  $\zeta'/\zeta$ . Como tantas otras veces, la Variable Compleja, siempre solícita, viene al rescate.

**Lema 3.15.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $|z - z_0| < \delta$  sin ceros en el círculo  $|z - z_0| \leq \delta/2$ . Si  $f(z_0) = 1$  y  $|f(z)| \leq M$  para algún  $M > 2$ , entonces se cumple  $|f'(z)/f(z)| \ll \delta^{-1} \log M$  en el círculo  $|z - z_0| < \delta/4$ .

No demostraremos aquí este resultado de verdad (véase [Iv], [Ti]), sino que daremos una prueba mentirosa pero ilustrativa. Es un ejercicio encontrar el error:  $g(z) = \log z$  es holomorfa en  $|z - z_0| \leq \delta/2 \Rightarrow$  (Cauchy)  $|g'(z)| \ll \int_C |g(\eta)| |z - \eta|^{-2} |d\eta|$  con  $C = \{\eta : |\eta - z| = \delta/4\}$  y  $|z - z_0| < \delta/4 \Rightarrow |f'(z)/f(z)| \ll \delta^{-1} \sup |g(z)|$ , y  $|f(z)| \leq M \Rightarrow |g(z)| \leq \log M$ .

En definitiva, saber bien cómo crece la función  $\zeta$  se traduce en ensanchar la región libre de ceros.

**Proposición 3.16.** Si existe  $r > 1$  tal que  $\zeta(\sigma + it) = O(\log^r t)$  para  $\sigma > 1 - (\log \log t)^2 / \log t$ ,  $t > 3$ ; entonces la región  $\sigma > 1 - C(\log \log t) / \log t$  está libre de ceros para cierta constante positiva  $C$  y todo  $t > 3$ .

Nota: La condición  $t > 3$  no es relevante, simplemente se pide para que  $\log \log t > 0$ . Evidentemente una región libre de ceros para  $t > 0$  se extiende simétricamente para  $t < 0$  ya que  $\overline{\zeta(\sigma + it)} = \zeta(\sigma - it)$ . Y como el número de ceros con  $0 \leq t \leq 3$  es finito, uno puede hacer válida la región anterior para todo  $t$  quizá modificando la constante y escribiendo  $\sigma > 1 - C(\log \log(|t| + 3)) / \log(|t| + 2)$ .

DEM.: Sea  $\beta + i\gamma$  un cero de  $\zeta$  con  $\gamma > 3$  y  $\sigma = 1 + \log^{-r} \gamma$ . Tómesese en el lema anterior  $z_0 = \sigma + i\gamma$ ,  $\delta = (\log \log \gamma)^2 / \log \gamma$  y

$$f(z) = -\frac{\zeta(z)}{\zeta(z_0)} \prod_j \frac{z_0 - \rho_j}{z - \rho_j}$$

donde  $\rho_j$  son los posibles ceros de  $\zeta$  en el círculo  $|z - z_0| \leq \delta/2$  (repetidos con sus multiplicidad, si no existen el producto no aparece). Es posible elegir  $M = O(\log^{2r} \gamma)$  ya que el producto permanece acotado en la frontera  $|z - z_0| = \delta$  (principio del máximo) y

$$|\zeta(z_0)|^{-1} \ll \prod (1 + p^{-\sigma}) \ll \zeta(\sigma) \ll (\sigma - 1)^{-1} = \log^r \gamma.$$

En definitiva, el lema implica

$$\left| -\frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)} + \sum \frac{1}{\sigma + i\gamma - \rho_j} \right| \leq \text{cte} \frac{\log \gamma}{\log \log \gamma}.$$

La parte real de  $(\sigma + i\gamma - \rho_j)^{-1}$  es positiva porque  $\sigma > 1$ , por consiguiente

$$-\text{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)} \leq \text{cte} \frac{\log \gamma}{\log \log \gamma} - \text{Re} \sum \frac{1}{\sigma + i\gamma - \rho_j} \leq \text{cte} \frac{\log \gamma}{\log \log \gamma} - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

Nótese que si  $\beta + i\gamma$  no estuviera entre los  $\rho_j$  entonces  $|\beta + i\gamma - z_0| > \delta/2 \Rightarrow (\sigma - \beta)^{-1} = O(\delta^{-1})$ , y el término  $(\sigma - \beta)^{-1}$  se puede conservar en la desigualdad anterior sin más que cambiar la constante que multiplica a  $\log \gamma / \log \log \gamma$ .

Para estimar  $-\operatorname{Re}(\zeta'(\sigma + 2i\gamma)/\zeta(\sigma + 2i\gamma))$  se hace lo mismo pero desechando todos los términos del sumatorio.

Escogiendo en el primer lema  $E(t) = K \log t / \log \log t$  para  $t > 3$  con  $K$  suficientemente grande se deduce la región libre de ceros. ■

### Una serie que no converge pero es útil

Según vamos resolviendo problemas aparecen otros nuevos. Hemos establecido una relación entre la acotación de  $\zeta$  y la situación de los ceros, pero ahora el resultado requiere que esta acotación sea válida incluso un poco más a la izquierda de la recta  $\operatorname{Re} s = 1$ , donde  $\zeta$  no puede representarse por la serie trigonométrica  $\sum n^{-s}$ . La solución es realmente sorprendente. Resulta que aunque la serie  $\sum n^{-s}$  no converge en la banda crítica, cierta suma parcial de ella aproxima a  $\zeta(s)$  con la precisión que deseemos.

**Lema 3.17.** *Sea  $s = \sigma + it$  con  $\sigma \geq 1/2$  y sea  $x \geq t/\pi > 0$ ; entonces*

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}).$$

DEM.: Aplicando la fórmula de sumación de Euler-Mac Laurin con  $f(n) = (x + M - 1)^{-s}$  y  $N = \infty$ , se tiene para  $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=M}^{\infty} n^{-s} = \frac{M^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}M^{-s} - s \int_M^{\infty} (x - [x] - \frac{1}{2})x^{-s-1} dx.$$

Por tanto

$$(3.8) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq M} n^{-s} + \frac{M^{1-s}}{s-1} - s \int_M^{\infty} (x - [x] - \frac{1}{2})x^{-s-1} dx - \frac{1}{2}M^{-s}.$$

Esta igualdad se extiende a  $\operatorname{Re} s > 0$  porque en esta región ambos miembros definen funciones meromorfas.

Tomando en la Proposición 2.2  $f(n) = -\frac{t}{2\pi} \log n$  y  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$ , y aplicando el Lema 2.3 a) a la integral correspondiente a  $n = -1$ , se tiene para cualquier  $y > x$

$$\sum_{x < n \leq y} n^{-it} = \frac{y^{1-it} - x^{1-it}}{1-it} + O(1).$$

Con esto y el Lema de Abel se concluye

$$\sum_{x < n \leq M} n^{-s} = \frac{M^{1-s} - x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma});$$

que sumado a (3.8) y estimando la integral trivialmente, conduce a

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma} + (t+1)M^{-\sigma}).$$

Como  $M$  es tan grande como deseemos, el último término se puede suprimir. ■

### El término de error mejorado

Después de haber esquivado todos los escollos, ya podemos dar el golpe de gracia con nuestros métodos de sumas trigonométricas y todo lo que deseamos caerá como fichas de domino impulsadas por los resultados auxiliares anteriores.

**Proposición 3.18.** Sea  $\delta = (2^{j+2} - 2)^{-1}$  con  $j \in \mathbb{Z}^+$ . Para todo  $\sigma \geq 1 - (j+2)\delta$  y  $t \geq 2$ , se verifica

$$\zeta(\sigma + it) = O(t^\delta \log t).$$

Además la constante “ $O$ ” no depende de  $j$ .

DEM.: Tomemos  $x = t/\pi$  en el resultado anterior y descompongamos en *intervalos diádicos*  $[1, x] = \bigcup I_r \cap [1, x]$  con  $I_r = [2^r, 2^{r+1})$ . Evidentemente hay  $O(\log t)$  intervalos  $I_r$ , y sumando por partes (Corolario 0.2),

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll \log t \sup_r \left| \sum_{n \in I_r} n^{-s} \right| \ll \frac{\log t}{N^\sigma} \left| \sum_{N/2 \leq n \leq M} n^{-it} \right|,$$

para ciertos  $N$  y  $M$  con  $N/2 \leq M < N \leq x$ .

Por la Proposición 2.9 cono  $D = t/N$ ,

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll \frac{\log t}{N^\sigma} \left( \frac{t}{N} \right)^\delta N^{1-(j+1)\delta} \ll t^\delta \log t.$$

Para comprobar la uniformidad de esta acotación en  $j$ , hay que examinar las entrañas de la prueba de la Proposición 2.9. Esto es demasiado tedioso para hacerlo aquí. Sin entrar en detalles, nótese que la aplicación repetida del Proceso A a través del Lema 2.5, da lugar esquemáticamente a acotaciones del tipo  $|S_0|^2 \leq C|S_1|$ ,  $|S_1|^2 \leq C|S_2|$ ,  $\dots$ ,  $|S_{j-1}|^2 \leq C|S_j|$ ;



entonces  $|S_0| \leq C^{1/2+1/4+\dots}|S_j|^{2^{-j}}$  y la constante no degenera cuando  $j$  crece porque  $1/2 + 1/4 + \dots$  converge. Nótese también que las constantes “ $\ll$ ” en las acotaciones de  $|f^{(k)}|$  son del orden de  $(k-1)!$ , pero  $((k-1)!)^{2^{-k}}$  permanece acotado y tiende rápidamente a uno, lo que permite un factor de este tipo en cada  $S_j$ . ■

De todo lo anterior se deduce por fin la nueva región libre de ceros buscada.

**Corolario 3.19.** *Para cierta constante  $C > 0$  la región  $\sigma > 1 - C(\log \log t)/\log t$ ,  $t > 3$ , está libre de ceros.*

DEM.: Sea  $j$  la parte entera de  $2 + \log(\log t/\log \log t)/\log 2$  con  $t$  suficientemente grande. Entonces con la notación del resultado anterior,  $(j+2)\delta \geq (\log \log t)^2/\log t$  y  $\delta = O(\log \log t)$ , de modo que se satisfacen las hipótesis de la primera proposición. ■

Si reemplazamos esta región por la que habíamos empleado anteriormente en la prueba del teorema de los números primos, se obtiene un término de error más pequeño.

**Corolario 3.20.** *Para cierta constante positiva  $K$  se cumple*

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-K\sqrt{\log x \log \log x}}\right).$$

En 1958 Korobov y Vinogradov probaron  $\psi(x) = x + O\left(xe^{-K \log^{3/5} x (\log \log x)^{-1/5}}\right)$  a partir de una compleja variante del método de Vinogradov [Iv], [Ka] que conduce a una región libre de ceros de la forma  $\sigma > 1 - C/(\log^{2/3} t (\log \log t)^{1/3})$ ,  $t > 3$ . Este resultado ha permanecido imbatible hasta la fecha.

En todas las aplicaciones aquí discutidas del método de sumas trigonométricas, vemos que hay que trabajar muy duro para conseguir pequeñas mejoras que no parecen dirigirse a los objetivos. Éste es un fenómeno general que ha desatado a veces críticas hacia la Teoría Analítica de Números como una disciplina en que gran parte de los esfuerzos se dedican a disminuir infinitesimalmente exponentes que distan mucho de lo que se desea conseguir. La excusa natural es que los valores numéricos y las reducciones obtenidas no son relevantes frente a los poderosos métodos que se crean para llevarlas a cabo. Como contrarréplica también es justo mencionar que muchas de las mejoras se basan en complejísimos ajustes técnicos más que en ideas completamente nuevas.