2. La estimación de sumas trigonométricas

2.1. Introducción y dos principios principales: incertidumbre y fase estacionaria

Las demoledoras preguntas infantiles "¿por qué?" y "¿para qué?", aunque denostadas habitualmente en Matemáticas, no son superfluas. En nuestro caso, vamos a hacer durante un capítulo una árida teoría de sumas trigonométricas y seguramente nuestra fe flaquearía si sólo nos respondieran que "las sumas trigonométricas son importantes en la Teoría Analítica de Números". Merece la pena, por tanto, gastar unas pocas líneas a modo de motivación antes del capítulo con algunas aplicaciones.

En realidad ya ha aparecido un ejemplo. La función ζ para valores complejos con $\operatorname{Re} s > 1$ da lugar a una serie trigonométrica que puede acotarse con métodos sofisticados. Empleando la relación entre los ceros y el crecimiento de las funciones holomorfas, el resultado permite ensanchar un poco la región libre de ceros. Como este ejemplo es un poco impreciso, fabricaremos otro más tangible, en el que podamos poner las manos.

Supongamos que queremos estimar con precisión el número total de divisores (la suma del número de divisores) de los enteros positivos menores que X, digamos $1 < X \notin \mathbb{Z}^+$. Podemos "contar con los dedos" viendo que el 1 aparece en $1\cdot 1,\ 1\cdot 2, \dots 1\cdot [X]$, y por tanto $[X]$ veces; el 2 aparece $[X/2]$ veces ($2\cdot 1,\ 2\cdot 2, \dots 2\cdot [X/2] < [X]$); y en general m aparece $[X/m]$ veces. En definitiva tenemos que estimar la suma $\sum [X/m]$. Ahora guardemos nuestro dedos y escribamos $[X]$ como $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum \psi(n)$ donde ψ es la función característica de $[-X, X]$. Por la fórmula de sumación de Poisson, $\sum \psi(n) = \sum \widehat{\psi}(n)$. Un cálculo muestra que, aparte del término principal obtenido para $n = 0$, $\widehat{\psi}(n)$ es un coeficiente por $\operatorname{sen}(2\pi n X)$. Lo mismo podríamos hacer con $[X/m]$ sustituyendo $\psi(t)$ por $\psi_m(t) = \psi(mt)$; y en total tendríamos que estimar una suma de la forma $\sum\sum \operatorname{sen}(2\pi n X/m)$. Por cierto, el mismo resultado se obtendría desarrollando en serie de Fourier la función periódica $t - [t]$ en $t = X/m$.

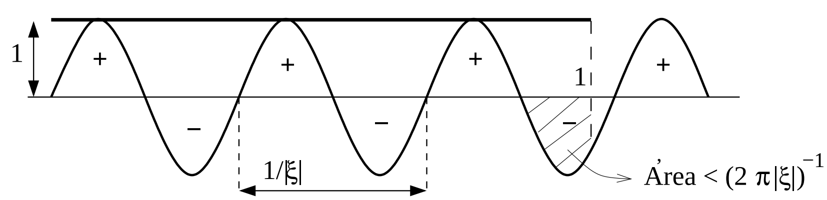
Ahora tenemos que decidir entre enfrentarnos a una suma con partes enteras o a otra con funciones trigonométricas. Siempre se tiende a pensar erróneamente que la propia área es más difícil e interesante que el resto, y que está minusvalorada. Como la primera suma suena a Teoría de Números y la segunda a Análisis Armónico, nos decidimos por la segunda confiando en que avezados analistas hayan desarrollado unas teorías de cancelación de sumas trigonométricas. La historia no es tan sencilla, aunque les robemos sus armas a los analistas, en realidad la teoría siempre ha estado bajo la sombra de la Teoría de Números y parece no haber tenido un gran impacto en el tipo de problemas que trata el Análisis Armónico.

Como hemos visto, la fórmula de sumación de Poisson permite contar por medio de integrales oscilatorias dadas por transformadas de Fourier. Por ello nos detendremos a ver dos ideas intuitivas, el principio de incertidumbre y el de fase estacionaria, que posibiliten controlar dichas integrales.

Para funciones con regularidad suficiente, inegrando por partes se tiene:

$$|\widehat{f}(\xi)| \le \frac{1}{(2\pi|\xi|)^n}\|f^{(n)}\|_1. \tag{2.1}$$

De modo que si $f \in C^\infty$ y ella y sus derivadas son integrables , $|\widehat{f}(\xi)| = O(|\xi|^{-n})$ para todo n; es decir, en estas condiciones la transformada de Fourier decae más rápido que el inverso de cualquier polinomio. Para funciones con poca regularidad esto no es cierto (aunque por el *Lema de Riemann-Lebesgue* **[Dy-Mc]** $f \in L^1 \Rightarrow \widehat{f}(\xi) \to 0$). Por ejemplo, la transformada de Fourier de la función característica de $[-1,1]$ sólo decae como $1/|\xi|$. Podemos interpretar esto analíticamente viendo que al integrar por partes aparecen términos de frontera, o geométricamente diciendo que debido al corte abrupto, en cada extremo una oscilación de $y(x) = e(\xi x)$ puede quedar sin completar y en el peor caso (media longitud de onda) la masa residual es comparable a $1/|\xi|$.

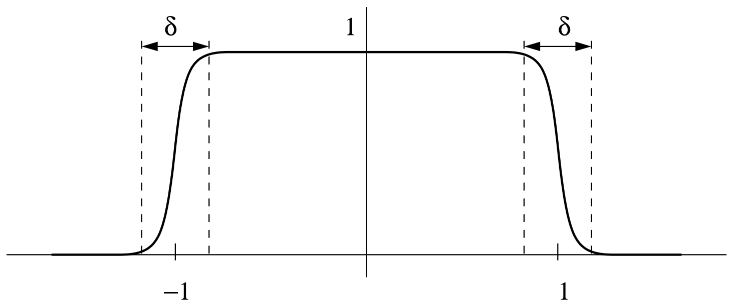


Evidentemente necesitamos $|\xi| \ge 1$ para que $y = y(x)$ llegue a oscilar unas cuantas veces en $[-1,1]$. Insistiendo en este punto, si tomamos la función de masa uno, $f = (2\epsilon)^{-1}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}$, donde $\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}$ indica la función característica de $[-\epsilon,\epsilon]$, a las ondas con frecuencia $|\xi|$ mucho menor que ϵ^{-1} no les dará tiempo a oscilar y se tendrá $\widehat{f}(\xi) \approx \widehat{f}(0) = 1$, pero si $|\xi|$ es mucho mayor que ϵ^{-1}, entonces de nuevo tenemos típicamente una oscilación que no se completa y por tanto un decaimiento de orden $|\xi|^{-1}$ (multiplicado por una constante que depende de ϵ).

La idea empleada en los ejemplos anteriores es la base del *Principio de incertidumbre* en una forma tan básica que seguramente pocos lo llamarían así.

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE (idea intuitiva): *En un intervalo de longitud δ sólo veremos oscilar las ondas de frecuencia mayor o igual que δ^{-1}.*

Para mostrar cómo aplicar este principio, supongamos que en cierto problema necesitásemos que la transformada de Fourier de algo como $\chi_{[-1,1]}$ decayera a la larga más rápido que $|\xi|^{-1}$, y con tal fin hacemos una regularización C^∞ en una pequeña bandita de anchura δ en cada extremo.



La regularización tiene masa (área) comparable a δ, por tanto sólo puede modificar el valor de la transformada de Fourier a lo más en una cantidad de este orden. Para frecuencias $|\xi|$ mucho menores que δ^{-1}, como $\widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi)$ es típicamente mayor que δ, se tiene $\widehat{f}(\xi) \approx \widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi)$. Por otro lado, cuando $|\xi|$ es bastante mayor que δ^{-1}, las ondas de frecuencia $|\xi|$ oscilan mucho en las banditas de regularización y hay una gran cancelación (si se quiere, utilícese (2.1) estudiando el tamaño típico de las derivadas), de modo que $\widehat{f}(\xi) \approx 0$. En el rango de transición con $|\xi|$ comparable a δ^{-1}, las ondas "verán" la regularización y se tendrá, según crece $|\xi|$, un aumento en la cancelación que se traduce en un decaimiento gradual de $\widehat{f}(\xi)$.

Nótese que en el ejemplo anterior no podemos distinguir la función sin regularizar de la regularizada mediante la transformada de Fourier si no consideramos frecuencias grandes del orden de al menos el inverso del tamaño del intervalo en que se diferencian. Ahí está la *incertidumbre*. Dicho de otro modo, si queremos analizar una función, una señal, una fotografía ... mediante ondas de frecuencias menores o iguales que M, el principio de incertidumbre implica que el resultado será en general "borroso" en los intervalos de longitud mucho menor que M^{-1}. Para estas longitudes no se puede mejorara la precisión, el resultado es incierto.

En los textos de Física no es raro que lo anterior se considere una explicación completa del principio de incertidumbre, pero en Matemáticas estamos malacostumbrados a través de los libros a la difícil tarea de extraer ideas de las fórmulas, y cuando se presenta una idea sin fórmulas nos afecta un escalofrío de inseguridad. Por ello, no está de más mencionar un par de enunciados al respecto. El primero dice que al estrechar una función T veces, conservando la masa, la banda de frecuencias significativas se ensancha T veces.

Principio de incertidumbre (versión "light"): *La transformada de Fourier de* $g(x) = Tf(Tx)$ *es* $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi/T)$.

Otra versión se emplea en Mecánica Cuántica **[Yn]** y de nuevo dice que no podemos concentrar alrededor del origen simultáneamente la masa de una función y de su transformada de Fourier **[Dy-Mc]**.

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE (desigualdad de Heisenberg): *Cualquiera que sea f de decaimiento rápido, se verifica:*

$$16\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq 1.$$

Nota: En Mecánica Cuántica, salvo constantes, la posición y el momento se pueden considerar como variables aleatorias con funciones de densidad dadas por $|\Psi|^2$ y $|\widehat{\Psi}|^2$ para cierta *función de onda* Ψ. La relación anterior permite deducir que el producto de las varianzas de posición y momento son mayores que una constante (muy pequeña en las unidades del Sistema Internacional) y por tanto ambos no pueden tener simultáneamente *dispersión* arbitrariamente pequeña. Si la varianza de la posición tiende a cero, la del momento tiende a infinito.

Más adelante será conveniente considerar no sólo transformadas de Fourier sino integrales oscilatorias en general de la forma $\int g(x)e(f(x))\,dx$. Si la función f que representa la *fase* crece muy deprisa, es decir, si $f' >$ cte grande, entonces integrando por partes en $\int (g/f')f'e(f)$ se concluye que la integral es pequeña. Pero este truco no funciona si en algunos puntos f' es pequeño. En ellos la onda $e(f)$ oscila muy poco y típicamente no hay cancelación al integrar contra g. En pocas palabras:

PRINCIPIO DE FASE ESTACIONARIA (idea intuitiva): *La mayor contribución a una integral oscilatoria proviene de los puntos en que la fase es estacionaria.*

Si tenemos alguna información local en los puntos críticos podemos ser más precisos. Por ejemplo, si x_0 es un único punto crítico con $f''(x_0) \neq 0$ entonces cerca de x_0, $f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ y $g(x) \approx g(x_0)$; lo que sugiere que $\int g(x)e(f(x))\,dx$ se puede aproximar por

$$g(x_0)e(f(x_0)) \int e\big(\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\big)\,dx = \frac{1}{2}g(x_0)\frac{e(f(x_0))}{\sqrt{|f''(x_0)|}} \int \frac{e(\pm t/2)}{\sqrt{t}}\,dt$$

(donde el $\pm$ depende del signo de $f''(x_0)$). Esto es, $\int g(x)e(f(x))\,dx$ se aproxima por cte $g(x_0)e(f(x_0))/\sqrt{|f''(x_0)|}$ y cabe esperar, por tanto, un decaimiento como el inverso de la raíz cuadrada de la derivada segunda.

Como ejemplo consideremos la fórmula que se puede comprobar en una tabla de integrales **[Gr-Ry]**: $I = \int e^{-x^2}\cos(\lambda x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\lambda^2}}/\sqrt{1+\lambda^2}$. Según ésta, para $\lambda\to\infty$ se tiene $I\sim\frac{1}{2}\sqrt{2\pi/|\lambda|}$ (nótese que el resultado se ajusta al esquema anterior). El principio de fase estacionaria nos dice que este comportamiento depende de lo que ocurre en las cercanías del punto $x=0$ en el que la fase es estacionaria (derivada nula). De modo que debe mantenerse si se reemplaza e^{-x^2} por cualquier función que se le parezca en un entorno de cero. Así pues, podemos intuir resultados tan complejos como $\int(\log(1+x^6)+1)e^{-x^2}\cos(\lambda x^2)\,dx\sim\frac{1}{2}\sqrt{2\pi/|\lambda|}$ o en general $\int g(x)\cos(\lambda x^2)\,dx\sim\frac{1}{2}g(0)\sqrt{2\pi/|\lambda|}$ si $g(0)\neq 0$.

De nuevo uno puede tranquilizar su espíritu matemático aferrándose a un enunciado preciso pero mucho más rígido que la idea intuitiva **[So]**.

Principio de fase estacionaria: *Sea $f,g\in C^\infty$ con g de decaimiento rápido y $f''>0$. Si f tiene un punto crítico en $x=c$; cuando $\lambda\to+\infty$ para cada n se cumple*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e(\lambda f(x))\,dx = \frac{e(\lambda f(c)+1/8)}{\sqrt{\lambda f''(c)}}\big(a_0+\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\ldots+O\big(\frac{1}{\lambda^n}\big)\big)$$

donde los a_i dependen de los coeficientes de Taylor de f y g en $x=c$. En particular $a_0=g(c)$.

2.2. La acotación básica de van der Corput

Hay una joyita temprana que destaca en el árido mundo de la acotación de sumas trigonométricas, repleto de quincalla de términos de error evanescentes. Con ella van der Corput nos mostró que simplemente sabiendo que las fases son cóncavas o convexas, ya podemos obtener una acotación. Un resultado tan sencillo debería admitir una explicación sencilla, o al menos con más palabras que fórmulas.

Supongamos que queremos estimar $\sum_{n\in I}e(f(n))$ con I un intervalo de longitud N, donde controlamos el tamaño de la derivada segunda de f, $0<\lambda_2\ll|f''|\ll\lambda_2$.

Aplicando la fórmula de sumación de Poisson sin considerar los problemas de convergencia y regularidad (por ejemplo suponiendo que se multiplica por una función C^∞ adaptada a I), se llega a integrales del tipo $\int e(g_n(x))\,dx$ con $g_n(x)=f(x)-nx$. Si n está fuera de un intervalo $[\alpha,\beta]$ que contenga a la imagen de f', entonces $e(g_n(x))$ oscila mucho (g_n' es grande) y hay una gran cancelación (esto no es más que una variante del principio de incertidumbre ya que cerca de x la longitud de onda de $e(g_n(x))$ es aproximadamente $|g_n'(x)|^{-1}$). Por tanto cabe esperar

$$\sum_{n\in I} e(f(n)) \approx \sum_{\alpha\le n\le\beta} \int e(g_n(x))\,dx.$$

Según el principio de fase estacionaria la contribución a $\int e(g_n(x))\,dx$ vendrá sobre todo de los puntos críticos x_n con un decaimiento comparable a $(|f''(x_n)|)^{-1/2} = O(\lambda_2^{-1/2})$. Así pues, si este razonamiento intuitivo es cierto, como el número de sumandos es $O(\beta-\alpha+1)$, se concluye

$$\sum_{n\in I} e(f(n)) \ll (\beta-\alpha+1)\lambda_2^{-1/2} \ll N\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2},$$

donde se ha empleado el teorema del valor medio en la forma $(\beta-\alpha)/N \ll \lambda_2$.

Resumiendo, esperamos que se cumpla el siguiente resultado:

Teorema 2.1 . *Sea $f \in C^2(I)$ con I un intervalo de longitud N. Si $0 < \lambda_2 \ll |f''| \ll \lambda_2$ entonces*

$$\sum_{n\in I} e(f(n)) \ll N\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}.$$

La demostración consiste en dar rigor a los pasos anteriores: la aplicación de la fórmula de sumación de Poisson y del principio de fase estacionaria.

Proposición 2.2 . *Sea $f \in C^2([a,b])$, $a,b \in \mathbb{Z}$ con $f'' \neq 0$, y $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha < f' < \beta$; entonces*

$$\sum_{a\le n\le b} e(f(n)) = \sum_{\alpha\le n\le\beta} \int_a^b e(f(x)-nx)\,dx + O(\log(\beta-\alpha+1)).$$

Nota: La hipótesis $a,b\in\mathbb{Z}$ es en realidad superflua.

DEM.: Supondremos $\alpha = 0$. Esto se puede hacer sin perder generalidad, ya que en otro caso basta cambiar $f(n)$ por $f(n)-\alpha n$, lo que no modifica el valor de la suma.

Partimos de la fórmula

$$\sum_{a\le n\le b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))\,dx + O(1) + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)e(f(x)-nx)\,dx. \tag{2.2}$$

que se sigue a partir de la fórmula de sumación de Euler-Mc Laurin para $n=1$ desarrollando por Fourier $t-[t]-1/2$ como $\sum_{n\neq 0} e(-nx)/(2\pi i n)$. También es posible deducirla de la fórmula de sumación de Poisson integrando por partes.

Si $n > \beta$ o $n < \alpha = 0$, la derivada de $g_n(x) = f(x) - nx$ no se anula, e integrando por partes con $u = f'/g_n'$ y $dv = g_n' e(g_n)\,dx$, se tiene

$$\Big|\int_a^b f'(x)e(f(x)-nx)\,dx\Big| \le \Big|\frac{f'(a)}{g_n'(a)}\Big| + \Big|\frac{f'(b)}{g_n'(b)}\Big| + \int_a^b \big|(f'/g_n')'\big|.$$

La función f'/g_n' es monótona ($f'' \ne 0$) y por tanto se pueden sacar los valores absolutos fuera de la última integral. En definitiva

$$\Big|\int_a^b f'(x)e(f(x)-nx)\,dx\Big| \le \frac{4\beta}{|\beta - n|}.$$

En particular la serie del segundo miembro de (2.2) converge uniformemente. Y la contribución de estos términos con $n > \beta$ y $n < 0$ está acotada por

$$\sum_{n<0} \frac{4\beta}{n(\beta-n)} + \sum_{n>\beta} \frac{4\beta}{n(n-\beta)} \ll \sum_{|n|>2\beta} \frac{1}{n^2} + \sum_{0\ne|n|\le 2\beta} \frac{1}{|n|} \ll 1 + \log(\beta+1),$$

donde se han aproximado sumas por integrales (una versión débil del Lema de Abel). Sustituyendo en (2.2) e integrando por partes los términos con $0 = \alpha \le n \le \beta$ se obtiene la fórmula buscada salvo un término de frontera que es absorbido por $O(\log(\beta+1))$. ■

Respecto al principio de fase estacionaria, más adelante veremos un resultado más preciso, pero todo lo que se necesita para demostrar el teorema es la segunda parte del siguiente ingenioso y sencillo lema:

Lema 2.3 (Lemas de van der Corput). *Sea $f \in C^2([a,b])$ con $f''(x) \ne 0$ en $[a,b]$.*

a) Si $|f'| \ge \lambda_1 > 0$, se cumple

$$\Big|\int_a^b e(f(x))\,dx\Big| \le \frac{2}{\pi\lambda_1}.$$

b) Si $|f''| \ge \lambda_2 > 0$, se cumple

$$\Big|\int_a^b e(f(x))\,dx\Big| \le \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\lambda_2}}.$$

<u>Dem.</u>: *a)* Integrando por partes tomando $u = 1/f'$ y $dv = f'e(f)\,dx$ (nótese que u es

monótona)

$$\left|\int_a^b e(f(x))\,dx\right| \le \frac{1}{\pi\lambda_1} + \int_a^b |u'| \le \frac{2}{\pi\lambda_1}.$$

b) Sea c tal que f alcance un máximo o un mínimo en $x=c$, en particular, $f'(c)=0$. Quizá extendiendo la definición de f más allá de $[a,b]$ siempre se puede suponer que tal valor existe. Sea $I=[c-\delta,c+\delta]\cap[a,b]$ con $\delta=\sqrt{2}/\sqrt{\pi\lambda_2}$ y $J=[a,b]-I$. Este último conjunto está formado a lo más por dos intervalos, en los que se aplica el apartado *a)*, teniéndose:

$$\left|\int_a^b e(f(x))\,dx\right| \le \frac{2}{\pi|f'(c-\delta)|} + \frac{2}{\pi|f'(c-\delta)|} + \left|\int_I e(f(x))\,dx\right|.$$

Por otra parte $|f'(c\pm\delta)| = |\int_c^{c\pm\delta} f''| \ge \delta\lambda_2$ prueba que el segundo miembro es menor o igual que $2\sqrt{2}/\sqrt{\pi\lambda_2}$. Añadiendo la acotación trivial sobre I, se concluye la demostración. ∎

El teorema es la combinación de los dos resultados anteriores.

<u>Dem. (del Teorema 2.1)</u>: Por el teorema del valor medio se pueden tomar en la Proposición 2.2 α y β con $\beta-\alpha \ll \lambda_2 N+1$. Según el Lema 2.3 *b)* cada una de las integrales es $O(\lambda_2^{-1/2})$, de forma que

$$\sum_{n\in I} e(f(n)) \ll (\lambda_2 N+1)\lambda_2^{-1/2} + \log(\lambda_2 N+2).$$

Si $\lambda_2\le 1$ el término logarítmico se puede suprimir; mientras que si $\lambda_2>1$ el teorema es trivial. ∎

La acotación del Lema 2.3 *b)* se puede transformar en una aproximación, más que en una acotación, a cambio de algunas condiciones sobre f y de una pueba más compleja **[Gr-Ko]** que requiere hacer explícito el principio de fase estacionaria.

Proposición 2.4 . *Sea $f\in C^4([a,b])$ con $0<\lambda_2<|f''|$, $|f'''|<\lambda_3$ y $|f^{(iv)}|<\lambda_4$. Si existe $c\in[a+\lambda_2^{-1/2}, b-\lambda_2^{-1/2}]$ con $f'(c)=0$, entonces se cumple*

$$\int_a^b e(f(x))\,dx = \frac{e(f(c)\pm 1/8)}{\sqrt{|f''(c)|}} + O\big(\lambda_2^{-1}(c-a)^{-1} + \lambda_2^{-1}(b-c)^{-1} + (b-a)\lambda_2^{-3}(\lambda_4\lambda_2+\lambda_3^2)\big),$$

donde el signo $\pm$ se elige de manera que coincida con el de f''.

2.3. El truco de Weyl (y van der Corput)

Cuando uno trata de probar algo, parte del oficio radica en reconocer al *enemigo* al que tiene que enfrentarse. Veamos dónde se oculta éste en la acotación básica de van der Corput.

Si aplicamos el Teorema 2.1 cuando λ_2 es comparable a $1/N$ estamos en el caso óptimo, por ejemplo, para las sumas de Gauss se obtiene $|G| = |\sum_{n\le N} e(n^2/N)| \ll N^{1/2}$ que es el orden correcto según la fórmula exacta dada por Gauss para estas sumas, la cual es tan interesante que mereció un lugar en su famoso diario [**Ga**]. Sin embargo, si $\lambda_2 \gg 1$ o $\lambda_2 \ll N^{-2}$, como ocurre por ejemplo en $\sum_{n\le N} e(n^3/N)$, sólo se obtiene la cota trivial.

Si λ_2 es muy pequeño, entonces la derivada permanece casi constante. Estas condiciones son óptimas para aplicar la fórmula de sumación de Poisson (en la forma de la Proposición 2.2) y se obtiene una aproximación de la suma por una integral, lo cual es muy ventajoso. Sin embargo, si λ_2 es muy grande la derivada vive en un intervalo demasiado extenso como para que se pueda obtener algo provechoso a partir de la fórmula de sumación de Poisson. Identificando la derivada con la frecuencia, vemos que el *enemigo* está en una variación incontrolada de las frecuencias. Se muestra necesario un método para actuar sobre las frecuencias si queremos superar el Teorema 2.1.

En un famoso trabajo [**We**], Weyl necesitó en 1916 acotar sumas del tipo $\sum e(P(n))$ donde P es un polinomio con coeficiente principal irracional. Esto es fácil para grado uno (porque se tiene la suma de una progresión geométrica). En el resto de los casos Weyl empleó un truco sencillísimo que consistía en que al hallar el cuadrado del módulo se obtienen incrementos de las fases, y el incremento ("derivada") de un polinomio de grado k es otro de grado $k-1$. Por ejemplo, si $S = \sum_{n\in I} e(\alpha n^2)$

$$|S|^2 = \sum_n \sum_m e(\alpha(m^2 - n^2)) \underset{m=n+r}{=} \sum_r \sum_n e(2\alpha nr + r^2\alpha) \le \sum_r \Big|\sum_n e(2\alpha nr)\Big|.$$

Lo malo de este truco es que es demasiado algebraico. Si lo aplicamos a $\sum e(f(n))$ no funciona si f no es un polinomio o algo demasiado parecido. Si pensamos en desarrollos de Taylor, la mayoría de las funciones con que tratamos habitualmente son algo así como polinomios de grado infinito. Hay además un problema más básico. Excepto para los valores de r pequeños, típicamente tan enemigo es $f(n)$ como $f(n+r)-f(n)$. Si pudiéramos limitar el rango en el que se mueve r, podríamos controlar mejor la oscilación de $e(f(n+r)-f(n))$ que la de $e(f(n))$. Van der Corput materializó esta idea con algo muy similar a subdividir la suma en sumas cortas (véase la siguiente demostración) de modo que al elevar cada una al cuadrado sólo aparezcan incrementos pequeños. Todo se resume en el siguiente resultado.

Lema 2.5 . *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $H \in \mathbb{Z}^+$ tales que $H \leq b - a$. Para cualquier función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene*

$$\Big|\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n))\Big|^2 \leq \frac{4(b-a)^2}{H} + \frac{4(b-a)}{H} \sum_{1\leq r<H} \Big|\sum_{a\leq n\leq b-r} e(f(n+r)-f(n))\Big|.$$

<u>Dem.</u>: Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos $I_n = [1, H] \cap [a - n, b - n] \cap \mathbb{Z}$. El truco está en trasladar la suma H veces y agrupar los sumandos de H en H que es lo que mide típicamente I_n:

$$|S| = \Big|\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n))\Big| = \Big|\frac{1}{H}\sum_{n}\sum_{m\in I_n} e(f(m+n))\Big| \leq \frac{1}{H} \sum_{a-H\leq n\leq b-1} \Big|\sum_{m\in I_n} e(f(m+n))\Big|.$$

Ahora al aplicar Cauchy-Schwarz se obtienen incrementos de f en un intervalo controlado por H:

$$|S|^2 \leq \frac{(b-a+H)}{H^2} \sum_{a-H\leq n\leq b-1} \sum_{m\in I_n}\sum_{l\in I_n} e(f(m+n)-f(l+n)).$$

Separando el término diagonal $l = m$ y notando que intercambiar l y m sólo conjuga los sumandos; al cambiar el orden de sumación se tiene:

$$|S|^2 \leq \frac{(b-a+H)}{H^2}\Big(H(b-a+H) + 2\sum_{1\leq l<m\leq H} \Big|\sum_{a-l\leq n\leq b-m} e(f(m+n)-f(l+n))\Big|\Big).$$

Ahora basta "limpiar" esta desigualdad con los cambios de variable $m - l \mapsto r$, $l + n \mapsto n$ y empleando $b - a \leq H$. ■

2.4. Pares de exponentes. Un bonito envoltorio para un dolor de cabeza

Según se desprende de la sección anterior, la idea para ir más allá de la acotación básica de van der Corput es dominar el crecimiento de las frecuencias con el Lema 2.5 (quizá aplicado repetidas veces) para poder emplear la fórmula de sumación de Poisson en condiciones adecuadas. Si en vez de acotar las integrales resultantes se las aproxima con la

Proposición 2.4, se obtiene una nueva suma trigonométrica, que se puede tratar de nuevo de la misma forma refinando la estimación, y así sucesivamente.

El problema es que si se quiere resumir todo este proceso en un teorema general, escribir las condiciones de regularidad y los resultados que se obtienen es un dolor de cabeza. La solución es considerar una clase de funciones extremadamente restricitiva en la que todas las frecuencias que puedan aparecer estén bajo control, y utilizar un lenguaje adecuado en el que cada paso esté representado por sencillas fórmulas inductivas.

Nótese en primer lugar que el teorema del valor medio sugiere que para funciones "normales" la derivada $k+1$-ésima sea como la k-ésima divida por la longitud del intervalo donde está definida, y el teorema de la función inversa (en una variable) sugiere que las inversas de las derivadas tienen una propiedad similar. Con esta idea en mente, definimos el escenario en el que vamos a trabajar.

Diremos que $f \in \mathcal{F}$ si $|f^{(k)}|/|I| \ll |f^{(k+1)}| \ll |f^{(k)}|/|I|$, $k \in \mathbb{Z}^+$, donde I es el intervalo de definición de f, y si además una desigualdad similar se cumple al cambiar f por la función inversa de $f^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}^+$, e I por su intervalo de definición. Por ejemplo, $f(x) = \lambda/x$ con $I = [N, 2N]$, donde λ es un parámetro, pertenece a $\mathcal{F}$.

Como vimos, el "enemigo" para acotar una suma trigonométrica está en la variación incontrolada de las frecuencias, que en $\mathcal{F}$ depende del tamaño de la derivada primera. Además hay otro enemigo tan patente que es casi vecino, y es que las sumas más largas requerirán acotaciones mayores. Con estos obstáculos identificados, diremos que $(p, q) \in [0, 1] \times [0, 1]$ es un *par de exponentes* si para toda $f \in \mathcal{F}$ definida en un intervalo I de longitud N con $1 < D \ll |f'| \ll D$, se cumple

$$\Big|\sum_{n \in I} e(f(n))\Big| \ll D^p N^q.$$

Obviamente $(0, 1)$ es un par de exponentes.

Una vez que hemos escondido bajo la alfombra todos los posibles problemas de regularidad y hemos dado con el *envoltorio* adecuado, podemos enunciar los dos resultados que constituyen la teoría de pares de exponentes.

Teorema 2.6 (Proceso A). *Si (p, q) es un par de exponentes entonces*

$$(p', q') = \Big(\frac{p}{2p+2}, \frac{p+q+1}{2p+2}\Big)$$

también lo es.

Teorema 2.7 (Proceso B). *Si (p,q) es un par de exponentes entonces*

$$(p',q') = (q - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2})$$

también lo es.

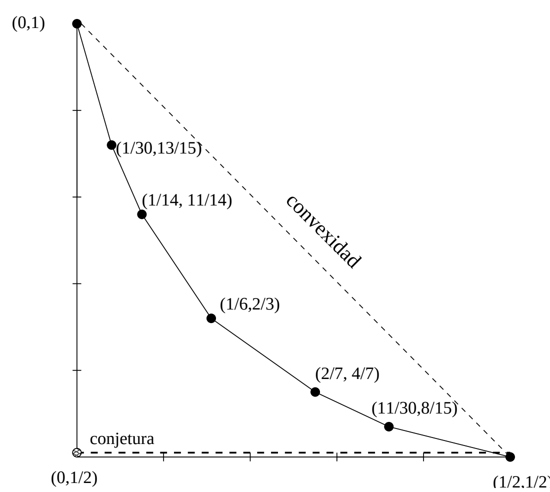
A veces se menciona como *Proceso C* la convexidad, esto es, que si (p_1,q_1) y (p_2,q_2) son pares de exponentes cualquier punto del segmento que los une también lo es (esto no es más que tomar medias geométricas).

Partiendo del par de exponentes trivial $(0,1)$ podemos obtener infinitos pares de exponentes aplicando repetidas veces las funciones A y B que definen los procesos anteriores. Éstos son los llamados *pares de exponentes de van der Corput* (se sabe que hay pares de exponentes que no pueden ser obtenidos de esta forma). Algunos de ellos son:

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = B(0,1), & \left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right) = AB(0,1), & \left(\frac{1}{14},\frac{11}{14}\right) = A^2B(0,1), \\ \left(\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right) = BA^2B(0,1), & \left(\frac{11}{30},\frac{8}{15}\right) = BA^3B(0,1), & \left(\frac{1}{9},\frac{13}{18}\right) = ABABAB(0,1). \end{array}$$

Por ejemplo, si quisiéramos acotar por ejemplo $S = \sum_{N\le n\le 2N} e(N^3/n)$, el Teorema 2.1, que corresponde en cierta forma al par de exponentes $(1/2,1/2)$, no sirve de nada; mientras que el par $(1/6,2/3)$ permite concluir $|S| \ll N^{5/6}$ que rebaja en un factor $N^{1/6}$ la acotación trivial.

Geométricamente el Proceso B es una simetría por la recta $y = x + 1/2$ y el Proceso A atrae los pares de exponentes hacia el trivial $(0,1)$. De esta forma los pares de exponentes de van der Corput se sitúan en una curva que une $(0,1)$ y $(1/2,1/2)$, y que supera a la convexidad entre ellos



Con métodos avanzados que mencionaremos más adelante se ha probado que hay pares de exponentes que mejoran los de van der Corput. Aunque esto es teóricamente muy significativo, lo cierto es que las diferencias numéricas son levísimas (unas milésimas en p y q en el mejor de los casos). Cabe preguntarse si es posible esperar algo mejor. Considerando la norma 2 en λ de $\sum_{N<n\le 2N} e(\lambda/n)$ es fácil ver que necesariamente siempre $q \ge 1/2$, y tomando $\lambda = (2N)!$, que $p = 0$ sólo se verifica para el par de exponentes trivial. Por otra parte, incluso si la oscilación de $S = \sum_{n\le N} e(f(n))$ fuera totalmente alocada y $e(f(n))$ no tuviera "nada que ver" con $e(f(n+1))$, el teorema central del límite sugiere para $S/\sqrt{N}$ una distribución normal cuando $N \to \infty$, lo que motiva conjeturar que cualquier exponente por encima de $1/2$ es válido. Es decir, la conjetura es que $(\epsilon, 1/2+\epsilon)$ es par de exponentes para todo $\epsilon > 0$. Con ella se podrían resolver algunos antiguos problemas.

La demostración de ambos procesos consiste en unir las piezas formadas por los resultados anteriores. El proceso A se sigue del Lema 2.5.

DEM.(Proceso A): La función $g(n) = f(n+h) - f(n)$ verifica $hDN^{-1} \ll |g'| \ll hDN^{-1}$. Si suponemos que podemos aplicar el par de exponentes (p, q), por el Lema 2.5 se sigue

$$(2.3) \qquad |S|^2 \ll N^2H^{-1} + NH^{-1}\sum_h (hDN^{-1})^p N^q \ll N^2H^{-1} + H^pD^pN^{1-p+q}.$$

Escogiendo $H^{p+1} = D^{-p}N^{1+p-q}$ para que ambos sumandos sean iguales, se obtiene $|S| \ll D^{p'}N^{q'}$.

La demostración es *tramposa* (incompleta) porque cuando h es pequeño puede que la derivada de g' sea pequeña y no se ajuste a los requerimientos de la teoría de pares de exponentes ($1 \ll |g'|$). Para solucionarlo se separan los términos con $h \le \epsilon N/D$ (para los que $|g'| \ll \epsilon$). Por el Teorema 2.1 la contribución de esos términos a (2.3) es $\ll NH^{-1}\cdot(\epsilon N/D)^{1/2}\cdot D^{-1/2}N$. Si $D > N^{1/2}$ esto es $O(N)$ que claramente no influye en la acotación anterior ($q' > 1/2$). Y si $D \le N^{1/2}$, el Teorema 2.1 aplicado a la suma original implica $|S| \ll D^{1/2}N^{1/2} \le D^{p'}(N^{1/2})^{1-p'}N^{1/2}$, y es fácil comprobar que $\frac{1}{2}(1-p') + \frac{1}{2} \le q'$. ■

El segundo proceso consiste en proceder como en la prueba del Teorema 2.1 pero, en vez de acotar las integrales con el Lema 2.3 *b)*, se aproximan con la Proposición 2.4 para que resulte una nueva suma trigonométrica. Esto es automático salvo por la tediosa tarea de contabilizar la suma de los términos de error, que queda resumida en el siguiente resultado **[Gr-Ko]**, **[Iv]**:

Lema 2.8 . *Sea $f \in C^4([a,b])$, $b-a = N$, con $DN^{-1} \ll |f''| \ll DN^{-1}$, $|f'''| \ll DN^{-2}$ y $|f^{(iv)}| \ll DN^{-3}$. Para cada n en el intervalo J determinado por $f'(a)$ y $f'(b)$ sea c_n tal* *que $g_n(c_n) = 0$ con $g_n(x) = f(x) - nx$. Entonces*

$$\sum_{a\le n\le b} e(f(n)) = \sum_{n\in J} \frac{e(f(c_n) - nc_n \pm 1/8)}{\sqrt{|f''(c_n)|}} + O(D^{-1/2}N^{1/2}) + O(\log(D+2)),$$

donde el signo $\pm$ se elige para que coincida con el de f''.

DEM.(Proceso B): Sumando por partes en el lema anterior, se tiene

$$|S| \ll D^{-1/2}N^{1/2}\Big|\sum_{D\ll n\ll D} e(F(n))\Big| + D^{-1/2}N^{1/2} + \log D$$

donde $F(n) = f(c_n) - nc_n$ y $c_n = (f')^{-1}(n)$. Un cálculo con el teorema de la función inversa prueba $F' = -(f')^{-1}$, de modo que $N \ll F' \ll N$. Por hipótesis podemos aplicar el par de exponentes (p,q) a F y se sigue $|S| \ll D^{-1/2}N^{1/2}N^pN^q$. ■

Una crítica bastante razonable que se puede hacer a la teoría de pares de exponentes es que bajo su aparente versatilidad hay que comprobar unas hipótesis que rara vez se dan en la práctica. Sin embargo en muchos casos no es difícil rastrear en la demostración lo que realmente necesitamos relajando enormemente las hipótesis. Por ejemplo, supongamos que queremos emplear el par de exponentes

$$(p,q) = A^jB(0,1) = \Big(\frac{1}{2^{j+2}-2}, 1 - \frac{j+1}{2^{j+2}-2}\Big).$$

Para aplicar j veces el Proceso A, cada vez hay que controlar una derivada, es decir, requiere $|f^{(k)}|/|I| \ll |f^{(k+1)}| \ll |f^{(k)}|/|I|$ para $k = 1,2,\dots,j-1$. La aplicación del Proceso B requiere, en principio, controlar cuatro derivadas más, pero como no vamos a emplear más procesos, bastaría la acotación del Teorema 2.1 (acotar integrales en lugar de estimarlas), lo cual hacen sólo dos derivadas más. Además controlando ambas, podemos suponer que en el Teorema 2.1 el primer término domina al segundo usando en la prueba el apartado *a)* del Lema 2.3 en lugar del *b)*, cuando dé un mejor resultado. Completando este esquema se obtiene:

Proposición 2.9 . *Sea $f \in C^{j+2}([a,b])$ con $b-a = N$, $j \ge 0$. Si para $k = 1,2,\dots,j+2$ se cumple $DN^{1-k} \ll |f^{(k)}| \ll DN^{1-k}$ con $D > 1$, entonces*

$$\Big|\sum_{a\le n\le b} e(f(n))\Big| \ll D^pN^q \qquad \text{con} \quad (p,q) = \Big(\frac{1}{2^{j+2}-2}, 1 - \frac{j+1}{2^{j+2}-2}\Big).$$

Para terminar esta sección diremos que en algunas aplicaciones se necesita estimar sumas en más de una dimensión. Por ejemplo del tipo $\sum_{n_1,n_2} e(f(n_1,n_2))$. Siempre se puede congelar una de las variables y acotar sólo la suma en la otra, pero parece que lo natural es que la cancelación aparezca en ambas variables. Es decir, que si la teoría de pares de exponentes nos da D^pN^q para la suma unidimensional, entonces se debería obtener en total $D_1^pN_1^qD_2^pN_2^q$. Todavía hoy esto es una conjetura sólo probada en situaciones tan particulares que restringen la aplicabilidad de una teoría multidimensional de pares de exponentes con hipótesis comparables a las de la unidimensional.

2.5. Gran criba y sumas raras

Hasta ahora nos hemos puesto en un contexto analítico aceptable en el que las fases son funciones suaves con propiedades de regularidad. Sin embargo en las aplicaciones aritméticas esto no es simepre así y nos encontramos con sumas totalmente salvajes como $\sum_{p\le x} e(f(p))$ donde p recorre los primos. Podemos pasar el problema de las fases a los coeficientes diciendo que la suma anterior es muy parecida a $\sum_{n\le x}\Lambda(n)e(f(n))/\log n$, pero eso no arregla nada. Evidentemente, no se puede hacer una teoría de sumas trigonométricas con coeficientes generales, porque siempre podríamos elegir los signos de dichos coeficientes para que "conspiren" resonando con $e(f(n))$ y no haya ninguna cancelación. (Tampoco funcionaría ni siquiera pidiendo coeficientes positivos ya que simplemente bastaría provocar las resonancias con los nodos positivos. Sin embargo, como veremos en esta sección, cuando se consideran diversas sumas que comparten los mismos coeficientes y cuyas fases son independientes en cierto sentido, es imposible que haya una conspiración de los coeficientes a gran escala. Esta idea es tan poderosa que incluso sirve para obtener cancelación en $\sum_{p\le x} e(f(p))$, una vez que se ha escrito, de forma muy ingeniosa, como una suma de varias sumas. Como en tantos otros resultados avanzados, lo fundamental es entender el Álgebra Lineal.

Dada una base ortonormal $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots\vec{u}_d\}$ de $\mathbb{R}^d$, las coordenadas de un vector $\vec{x}$ en esta base son $\vec{x}\cdot\vec{u}_1$, $\vec{x}\cdot\vec{u}_2$,... $\vec{x}\cdot\vec{u}_d$, y por Pitágoras

$$|\vec{x}\cdot\vec{u}_1|^2+|\vec{x}\cdot\vec{u}_2|^2+\dots+|\vec{x}\cdot\vec{u}_r|^2\le\|x\|^2 \tag{2.4}$$

para cualquier $r\le d$, con igualdad si $r=d$. Si uno quiere poner nombres, ésta es la *desigualdad de Bessel*. Evidentemente nada cambia si trabajamos en $\mathbb{C}^d$ en vez de en $\mathbb{R}^d$. Pensemos que $\vec{x}$ es un vector cuyas coordenadas son coeficientes (complejos) arbitrarios a_n con n en cierto intervalo entero, y que cada $\vec{u}_j$ es un vector oscilatorio de coordenadas

$e(f(j,n))$, normalizado para que $\|\vec{u}_j\| = 1$. Con (2.4) podríamos esperar estimar la suma de muchas sumas trigonométricas. Naturalmente esto no es tan fácil porque sería mucha casualidad que estos $\vec{u}_j$ con la f requerida en alguna aplicación práctica fueran ortogonales. El enemigo que hay que evitar aquí es que los $\vec{u}_j$ apunten más o menos en la misma dirección, en ese caso (2.4) es radicalmente falsa. Por otra parte, tampoco parece muy probable que el enemigo asome muchas veces, porque eligiendo unos cuantos vectores al azar, un número menor que la dimensión, hay probabilidad cero de que sean linealmente dependientes. Lo que buscamos es algo intermedio que diga que si los $\vec{u}_j$ son un poco ortogonales, digamos *cuasiortogonales* para quedar bien, entonces (2.4) es más o menos cierto, salvo alguna constante. Desde el punto de vista de las sumas trigonométricas la conclusión que queremos obtener es

$$\boxed{\textit{cuasiortogonalidad} \ \Rightarrow\ \text{cancelación}}$$

Si definimos la matriz B cuyas columnas son las coordenadas de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$,... $\vec{u}_r$, entonces (2.4) se escribe de forma más breve como $\|\vec{x}^t B\|^2 \le \|\vec{x}\|^2$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esto equivale a $|\vec{x}^t B\vec{y}|^2 \le \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$, de modo que también se puede entender (2.4) como una desigualdad para ciertas formas bilineales. En el caso de (2.4), la matriz B tiene sus columnas ortonormales (es unitaria, en caso de que sea cuadrada). El siguiente sencillo lema dice en cuánto falla $|\vec{x}^t B\vec{y}|^2 \le \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$, y por tanto (2.4), en función de lo lejos que esté B de tener columnas ortonormales.

Lema 2.10 . *Sea $B = (b_{ij})_{i=1,\, j=1}^{s,\, r}$ una matriz de números complejos. Entonces para cada $\vec{x} \in \mathbb{C}^s$ e $\vec{y} \in \mathbb{C}^r$, se cumple*

$$|\vec{x}^t B\vec{y}|^2 \le \Delta(B)\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

donde

$$\Delta(B) = \max_j \sum_{k=1}^{r} \Big|\sum_{i=1}^{s} b_{ij}\overline{b}_{ik}\Big|.$$

<u>DEM.</u>: Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{x}^t B\vec{y}|^2 \le \|\vec{x}\|^2\|B\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \sum_i \Big|\sum_j b_{ij}y_j\Big|^2 = \|\vec{x}\|^2 \sum_{j,k} y_j\overline{y}_k \sum_i b_{ij}\overline{b}_{ik}.$$

Por la desigualdad aritmético-geométrica $|y_j\overline{y}_k| \le (|y_j|^2 + |\overline{y}_k|^2)/2$, se tiene

$$|\vec{x}^t B\vec{y}|^2 \le \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2\Big(\sum_j |y_j|^2 \sum_k \Big|\sum_i b_{ij}\overline{b}_{ik}\Big| + \sum_k |y_k|^2 \sum_j \Big|\sum_i b_{ij}\overline{b}_{ik}\Big|\Big).$$

Los dos sumandos dentro del paréntesis son iguales (basta intercambiar el nombre de las variables mudas k y j), y es evidente que el primero de ellos está acotado por $\Delta(B)$. ■

El análogo de (2.4) cuando los $\vec{u}_j$ (las columnas de B) no son ortornormales, es ahora inmediato.

Corolario 2.11. *Con la notación anterior*

$$\|\vec{x}^t B\|^2 \le \Delta(B)\|\vec{x}\|^2.$$

<u>DEM.</u>: Basta tomar $\vec{y}^t = \vec{x}^t B$. ■

Hagamos un pequeño receso para probar lo que se llama (por razones históricas) lema de gran criba, el cual está relacionado con la acotación de una suma de sumas trigonométricas, que consideramos primero en una forma suavizada

$$S = \sum_{j=1}^{r} \Big|\sum_n a_n g(n/N)e(nx_j)\Big|^2$$

donde $g \in C_0^\infty$ y los a_n son coeficientes arbitrarios. Evidentemente si los x_j son muy parecidos (módulo 1) no hay esperanza de obtener una cota no trivial porque los único que hacemos es repetir la misma suma. Supongamos, por tanto, que los x_j están δ-*espaciados módulo* 1, es decir, que $|||x_j - x_k||| \ge \delta$ para $j \ne k$; donde $|||\cdot|||$ indica la distancia al entero más cercano. Según el corolario anterior, eligiendo $\vec{x}$ de coordenadas a_n y $b_{nj} = g(n/N)e(nx_j)$, se tiene $S \le \Delta(B)\sum |a_n|^2$. Aplicando la fórmula de sumación de Poisson e integrando por partes dos veces, o usando la acotación trivial si fuera mejor, se tiene

$$\Big|\sum_n g^2(n/N)e(n(x_j - x_k))\Big| \ll \min(N, N^{-1}|||x_j - x_k|||^{-2})$$

donde la constante "$\ll$" sólo depende de g. De aquí es fácil deducir

$$\Delta(B) \ll N + \sum_l \min(N, N^{-1}(l\delta)^{-2}) \ll N + \delta^{-1}.$$

De modo que $S \ll (N + \delta^{-1})\sum |a_n|^2$. Nótese que siempre podemos hacer desaparecer la función regularizante $g(n/N)$ en S eligiéndola de manera que sea uno en cierto intervalo y escogiendo los a_n nulos fuera de él. De modo que hemos probado (véase una prueba más directa en [**Da**]):

Lema 2.12 (gran criba). *Sean x_1, x_2,... x_r números reales con $|||x_j - x_k||| \ge \delta$ para*

$j \neq k$. Existe una constante absoluta C tal que cualquiera que sean $a_n \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\sum_{j=1}^{r} \Big| \sum_{n \le N} a_n e(nx_j) \Big|^2 \le C(N + \delta^{-1}) \sum |a_n|^2.$$

Nota: Se puede probar que $C = 1$ es una constante válida (y óptima).

Para comprobar la precisión de este resultado, obsérvese que si obligamos a que los coeficientes conspiren tomando $a_n = e(-nx_{j_0})$ para hacer la suma interior con $j = j_0$ tan grande como $N \sum |a_n|^2$, el lema anterior nos dice que, siempre que δ no sea muy pequeño, las otras sumas se vuelve mágicamente pequeñas. Obérvese también que si los x_j están equidistribuidos en $[0,1]$ con $x_{j+1} - x_j = \delta$, para $\delta \to 0$ se obtiene la desigualdad de Bessel para series de Fourier.

Después de este desvío veamos cómo se pueden estimar sumas sobre primos. Nos centraremos en

$$S = \sum_{n \le N} \Lambda(n) e(f(n)),$$

que salvo un término de error pequeño se relaciona fácilmente con $\sum_{p \le N} e(f(p))$ sumando por partes, como se hizo con $\psi(x)$ y $\pi(x)$.

La idea original de Vinogradov para tratar esta última suma [**El**] fue elegir $\mathcal{P}$ como el producto de los primos menores que $N^{1/2}$ y escribir

$$\sum_{N^{1/2} < p \le N} e(f(p)) = \sum_{i | \mathcal{P},\, i \le N} \mu(i) \sum_{j \le N/i} e(f(ij))$$

(donde μ es la función de Möbius). Lo cual no es más que la criba de Eratóstenes (esto explica en parte de dónde vino el nombre de "gran criba"). Con ello tenemos una suma de sumas y según la idea anterior, todo lo que hay que hacer es controlar $\sum_k |\sum_i e(f(ij) - f(ik))|$, lo cual es factible. El problema técnico que aparece es que si i es próximo a N, la suma es muy corta y no se puede medir la cancelación (para $r = 1$ el Lema 2.10 es trivial). Sin embargo este caso no debería ser tan malo porque es de esperar que entonces la cancelación aparezca al sumar en i clasificando los valores dependiendo del signo de $\mu(i)$. Reordenar la suma como hizo Vinogradov para que apareciesen siempre sumas largas, lleva a complicaciones muy tediosas. En 1977 Vaughan consiguió dosificar y ocultar el aburrimiento pasándolo todo a una identidad, que por otra parte es trivial si uno tapa el enunciado y mira su demostración.

Identidad de Vaughan. *Para $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+$ con $N_1N_2 \le N$, y cualquier función g, se cumple*

$$\sum_{n\le N} \Lambda(n)g(n) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

donde

$$S_1 = \sum_{i\le N_1} \Lambda(i)g(i), \qquad S_2 = -\sum_{i\le N_1N_2}\Big(\sum_{\substack{l\le N_1,\ m\le N_2\\ lm=i}} \mu(m)\Lambda(l)\Big)\sum_{k\le N/i} g(ik),$$

$$S_3 \sum_{i\le N_2} \mu(i) \sum_{k\le N/i} g(ik)\log k, \qquad S_4 = \sum_{N_1<i<N/N_2} \Lambda(i) \sum_{N_2<j\le N/i}\Big(\sum_{l|j,\ l\le N_2} \mu(l)\Big) g(ij).$$

La identidad puede ser apabullante, pero la prueba consiste simplemente en partir de la siguiente trivialidad

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = F(s) - \zeta(s)F(s)G(s) - \zeta'(s)G(s) + \big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - F(s)\big)(1-\zeta(s)G(s))$$

con $F(s) = \sum_{n\le N_1} \Lambda(n)n^{-s}$ y $G(s) = \sum_{n\le N_2} \mu(n)n^{-s}$. Comparando los coeficientes de n^{-s} en cada miembro y multiplicándolos por $g(n)$ y sumando, después de cansarse un rato, se obtiene el resultado deseado.

Con esta maquinaria ya estamos pertrechados para pasar sumas trigonométricas sobre primos a sumas sobre enteros que se pueden tratar con las técnicas de van der Corput. Enunciaremos el resultado general y dejaremos la aplicación en algún caso concreto para un capítulo posterior.

Proposición 2.13 . *Sea $g(n) = e(f(n))$ si $1 \le n \le N$ y cero en otro caso. Para cualquier $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+$ con $N_1N_2 \le N$, se cumple*

$$\sum_{n\le N} \Lambda(n)e(f(n)) \ll N_1 + \log N \sum_{i\le N_1N_2} \Big|\sum_{k\le N/i} g(ik)\Big|$$

$$+ N^{1/2}\log^3 N \max_{N_1<I\le N/N_2}\ \max_{N_2\le j\le N/I} \sum_{N_2<k\le N/I} \Big|\sum_{I<i\le 2I} g(ij)\,\overline{g}(ik)\Big|.$$

<u>Dem.</u>: Estimando trivialmente S_1 se obtiene el primer término del segundo miembro,

N_1. Usando que $|\mu(m)| \le 1$ y que $\sum_{l|n} \Lambda(l) = \log n$ [**Ci-Co**], de S_2 se obtiene el segundo término, y S_3 se acota de la misma forma. Antes de tratar S_4, se divide en intervalos diádicos el rango de i, esto es, se considera $I < i \le 2I$ con I una potencia de dos, $N_1 < I < N/N_2$. Entonces

$$|S_4| \le \max_{N_1 < I \le N/N_2} \Big| \sum_{I < i \le 2I} \sum_{N_2 < j \le N/i} \Lambda(i) a_j g(ij) \Big|$$

con $|a_j| \le d(j)$ el número de divisores de j. Aplicando el Lema 2.10 y las acotaciones elementales (pero no del todo inmediatas [**Da**]) $\sum_{i \le x} \Lambda^2(i) \ll x \log x$ y $\sum_{j \le x} d^2(j) \ll x \log^3 x$, se concluye la prueba. ■

2.6. Introducción a otros métodos

Esta sección en parte prolonga la anterior porque mencionaremos con cierto detalle dos métodos que emplean las ideas de la gran criba.

El primero es el *método de Vinogradov* (que históricamente precedió a la gran criba) y que fue desarrollado en múltiples variantes por I.M. Vinogradov. Desde el punto de vista de los pares de exponentes permite crear algunos muy próximos al trivial $(0, 1)$ que mejoran los de van der Corput (véanse las notas al capítulo 6 de [**Ti**]), lo cual es útil para tratar series que están al borde de la convergencia, como ocurre con $\zeta(1 + it)$. No es extraño, por consiguiente, que el método de Vinogradov dé lugar a las mejores regiones libres de ceros conocidas. Sin embargo es más fácil exponer las ideas básicas cuando se aplica a sumas trigonométricas $\sum e(f(n))$ con f un polinomio. Si los coeficientes de f son enteros no hay cancelación, y lo mismo ocurre, por la periodicidad, si son racionales de denominador pequeño. De modo que las acotaciones dependerán de propiedades de aproximación diofántica de los coeficientes (normalmente sólo se consideran las del principal).

Digamos que $f(n) = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0$. Siguiendo la idea de Weyl y van der Corput al comienzo de la demostración del Lema 2.5, para estimar $\sum e(f(n))$ podemos emplear

$$\frac{1}{H} \sum_n \Big| \sum_{m \le H} e(f(m+n)) \Big| = \frac{1}{H} \sum_n \Big| \sum_{m \le H} e(\alpha_k m^k + A_{k-1}(n) m^{k-1} + \ldots + A_2(n) m^2 + A_1(n) m) \Big|$$

donde A_i son funciones de n que dependen de los α_j, por ejemplo, $A_{k-1}(n) = nk\alpha_k + \alpha_{k-1}$. Si α_k no es racional con denominador pequeño cabe esperar cierto espaciamiento entre los valores de $A_{k-1}(n)$, lo que sugiere utilizar alguna variante de la gran criba. Sin embargo esto no puede dar buen resultado porque m^{k-1} crece demasiado deprisa en comparación con m, para $k > 2$,lo que correspondería, en algún sentido, a tener que tomar en el Lema 2.12 todos los a_n nulos salvo una proporción despreciable. Para ser más concretos con un ejemplo, si quisiéramos aplicar el lema de gran criba por ejemplo a una suma del tipo

$$S = \sum_{j=1}^{r} \Big| \sum_{m \le M} c_m e(m^2 x_j) \Big|^2 \qquad \text{con } c_m \in \{-1, 1\},$$

habría que tomar $N = M^2$ y $a_n = c_{\sqrt{n}}$ si n es un cuadrado, $n \le N$, y $a_n = 0$ en otro caso. El resultado sería entonces $S \ll (M^2 + \delta^{-1})M$ que es trivial para $r \le M$. Para ir más allá, apliquemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y desarrollemos el cuadrado, obteniendo

$$S^2 \le r \sum_{j=1}^{r} \Big| \sum_{n \le 2M^2} b_n e(n x_j) \Big|^2 \qquad \text{con } |b_n| = O(n^\epsilon) \ \ \forall \epsilon > 0;$$

ya que $|\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ n = a^2 + b^2)\}| = O(n^\epsilon)$. La gran criba implica ahora $S \ll r^{1/2}(M^2 + \delta^{-1})^{1/2} M^{1+\epsilon}$, que mejora la acotación anterior si r no es muy grande.

Análogamente, la idea inicial del método de Vinogradov es aplicar la desigualdad de Hölder para completar los huecos entre diferentes potencias. Para $l \in \mathbb{Z}^+$

$$\sum_{n} \Big| \sum_{m \le H} e(f(m+n)) \Big|^{2l} = \sum_{n} \sum_{m_1, \dots, m_k} \big| a(m_1, \dots, m_k) e(\alpha_k m_k + \dots + A_1(n) m_1) \big|^2$$

donde $a(m_1, \dots, m_k)$ es el número de soluciones enteras $1 \le x_1, x_2, \dots, x_l \le H$ de
$x_1^k + x_2^k + \dots + x_l^k = m_k, \quad x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \dots + x_l^{k-1} = m_{k-1}, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_l = m_1.$
Si se hace crecer l, se van cubriendo muchos de los posibles valores de los m_i y la aplicación de la gran criba (en varias dimensiones) será ventajosa. Por otra parte el control en media de los $a(m_1, \dots, m_k)$ conlleva estudiar las diversas sumas de potencias i-ésimas que pueden dar los mismos m_i, es decir el número $\mathcal{J}(H)$ de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x_1^k + x_2^k + \dots + x_l^k &= x_{l+1}^k + x_{l+2}^k + \dots + x_{2l}^k \\ x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \dots + x_l^{k-1} &= x_{l+1}^{k-1} + x_{l+2}^{k-1} + \dots + x_{2l}^{k-1} \\ \dots \quad \dots \qquad & \qquad \dots \quad \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_l &= x_{l+1} + x_{l+2} + \dots + x_{2l} \end{aligned}$$

con $1 \le x_1, \dots, x_{2l} \le H$. Esto es un problema aritmético complicadísimo en los rangos relevantes, pero Vinogradov fue capaz de acotar convenientemente $\mathcal{J}(H)$ con lo que se ha dado en llamar el *teorema del valor medio de Vinogradov*. El nombre, un poco confuso, proviene de que $\mathcal{J}(H)$ se puede expresar como el "promedio":

$$\mathcal{J}(H) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \Big| \sum_{m\le H} e(a_k m^k + a_{k-1}m^{k-1} + \dots + a_1 m)\Big|^{2l} da_1 \dots da_k.$$

La prueba de dicho teorema es muy compleja **[Va]**, **[Iv]**, **[El]**. Esencialmente se basa en estudiar el sistema módulo p para relacionar de alguna manera diferentes soluciones y poder llevar a cabo un esquema inductivo.

Para terminar analizaremos brevemente un método basado en un trabajo de 1986 de Bombieri e Iwaniec que permite crear nuevos pares de exponentes. En particular, con sus técnicas se puede probar que $(9/56+\epsilon, 37/56+\epsilon)$ es un par de exponentes para todo ϵ, además no es de van der Corput en general porque para éstos $p+q > 0'829$ **[Gr-Ko]**. Las ideas del método han sido aplicadas fructíferamente por Huxley **[Hu]** a problemas de puntos del retículo dando lugar a lo que se denomina el método discreto de Hardy y Littlewood. Aquí seguiremos las líneas del artículo original en el que las sumas de Gauss desempeñan un papel importante (lo que no ocurre en el método discreto de Hardy y Littlewood).

El punto de partida es como antes el paso

$$\sum_{N<n\le 2N} e(f(n)) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{H}\sum_n \Big|\sum_{m\le H} e(f(m+n))\Big|.$$

Para funciones con f''' que no sea pequeña el par de exponentes $(9/56+\epsilon, 37/56+\epsilon)$ no sirve de nada (por ejemplo, si $|f'''| \approx DN^{-2} > N^{-2/3}$, el par de exponentes de van der Corput $(1/9, 13/18)$, sería mejor). Esto motiva entender f como una perturbación de un polinomio de segundo grado y pasar a estudiar

$$\sum_n \Big|\sum_m e(f'(n)m + \frac{1}{2}f''(n)m^2)g(m)\Big|$$

donde g es una función adaptada a un intervalo de longitud comparable a H multiplicada por otra que oscila menos que el polinomio cuadrático (en el artículo original $g(m)$ es, salvo una función de corte, $e(\mu n^3)$ con μ pequeño). Ahora, para cada n, se aproxima $\frac{1}{2}f''(n)$ por una fracción irreducible a/c y se halla b tal que b/c aproxime a $f'(n)$. En rangos apropiados esto se puede hacer con precisión según conocidos teoremas de aproximación diofántica [**Ha-Wr**], [**Ci-Co**]. De esta forma se pasa a

$$\sum_{a,c}\Big|\sum_m e\big(\frac{am^2+bm}{c}\big)g(m)\Big|.$$

Si se divide la suma interior en clases de congruencia módulo c y se aplica la fórmula de sumación de Poisson en la forma $\sum_{m\equiv d\ (c)} f(m) = c^{-1}\sum_m e(dm/c)\widehat{f}(m/c)$, se llega a

$$\sum_{a,c}\frac{1}{c}\Big|\sum_m G(a,b+m;c)\widehat{g}(m/c)\Big| \quad \text{donde} \quad G(a,k;c)=\sum_{l=1}^{c} e\big(\frac{al^2+kl}{c}\big).$$

La suma G es una *suma de Gauss*. Se conoce que, salvo en unos casos especiales en que aparece un factor constante extra, $|G|=\sqrt{c}$ pero el signo de $G(a,b+m;c)$ varía con m de una manera demasiado aritmética. Concretamente, para c impar (en el caso par hay fórmulas similares)

$$G(a,b+m;c)=e\big(-\frac{\overline{a}}{c}(b+m)^2\big)G(a,0;c)$$

donde $\overline{a}$ es el inverso de a módulo c. Olvidarse de los signos tomando valores absolutos implica no ir más allá del método de van der Corput (aplicar Poisson), pero conservarlos conlleva enfrentarse a sumas intratables del tipo

$$\sum_{a,c}\frac{1}{\sqrt{c}}\Big|\sum_m e\big(-\frac{\overline{a}}{c}(b+m)^2\big)\widehat{g}(m/c)\Big|.$$

La idea fundamental de la gran criba sugiere que controlando el espaciamiento de $\overline{a}/c$ en los rangos significativos, lo cual es un problema aritmético, se puede asegurar cierta cuasiortogonalidad que implica cancelación. Realizar esta idea es mucho más complicado, porque hay que utilizar un lema de gran criba más poderoso (Lemma 7.5 [**Gr-Ko**]) que permita aprovechar el espaciamiento cuando m varía ($\widehat{g}$ también oscila), y para hacer este espaciamiento más homogéneo se aplica la desigualdad de Hölder como en el método de Vinogradov, necesitándose una especie de versión en miniatura del teorema del valor medio.