0. Notación y preliminares

0.1. Hablando del infinito

En la extraña y fructífera alianza que haremos con el Análisis, buscaremos auxilio en sus métodos y también en una partecita de su notación, que comenzamos recordando aquí.

Se indicará mediante $f \sim g$ que las funciones f y g son asintóticamente iguales. Es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

donde la mayoría de las veces se sobreentenderá que ∞ es en realidad $+\infty$.

Ejemplo . $x^3 - 1 \sim x^3 + x^2 + \cos x$, $\int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim x/\log x$ (L'Hopital), $\int_{-\infty}^x e^{-t^2}\,dt \sim \sqrt{\pi}$.

De acuerdo con la notación "O" de Landau, $f = O(g)$ y $f = o(g)$ significan respectivamente

$$\limsup_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Como antes, ∞ querrá decir típicamente $+\infty$. Si se indica explícitamente, se puede reemplazar $x \to \infty$ por $x \to a$.

Ejemplo . $\log x = O(x^{0'001})$, $\log x = o(x^{0'001})$, $2\operatorname{sen} x = O(1)$, $e^x \operatorname{sen} x = O(x - \pi)$ si $x \to \pi$, $e^{-x} = o(1/x)$, $1/x = o(1)$.

Nótese que $f = O(g)$ implica que a la larga se cumple $|f| \le C|g|$ para alguna constante C. Esta interpretación da preferencia a la notación de Vinogradov, más manejable e intuitiva, que consiste en escribir simplemente $f \ll g$ en vez de $f = O(g)$, y $f \gg g$ para indicar $g = O(f)$. Conviene de todas formas conservar la notación O porque hay una diferencia en cuanto a uso, y es que tanto $O(g)$ como $o(g)$ se pueden emplear dentro de una expresión con el significado de "cierta función f que satisface $f = O(g)$ o $f = o(g)$". En ello radica el poder de la notación "O" de Landau.

Ejemplo . $1/x \ll 1$, $\operatorname{sen} x \ll 2 + \cos x$, $e^x = 1 + x + O(x^2)$ si $x \to 0$, $\int_2^x \frac{dt}{\log t} = (1 + o(1))x/\log x$, $(x^2 + O(x))/(x + o(1)) = x + o(x)$, $\log x \ll x$.

0.2. Aprendiendo a sumar

En Teoría de Números una necesidad fundamental es contar. Esto se traduce a menudo en evaluar o estimar una suma. Por ello merece la pena considerar algunas maneras de calcular y transformar sumas. Casi todas ellas serán versiones discretas o continuas de la maravillosa y ubicua integración por partes.

Lema 0.1 (Sumación por partes)**.** *Se cumple la identidad*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N S_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n$$

donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

<u>DEM.</u>: Basta escribir $b_n = S_n - S_{n-1}$ y agrupar convenientemente los términos. ■

<u>Ejemplo</u> . Dada la serie $\mathcal{S} = \sum (\log(n+100))^{-1} 8^n/n!$, sumando por partes con $a_n = 1/\log(n+100)$ y $b_n = 8^n/n!$ y permitiendo $N \to \infty$, se tiene

$$\mathcal{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\log(n+100)} - \frac{1}{\log(n+101)}\Big) \sum_{k=1}^{N} \frac{8^k}{k!} \le \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\log(n+100)} - \frac{1}{\log(n+101)}\Big) e^8$$

que coincide con $e^8/\log 101 = 645'9\ldots$. Para apreciar la precisión de la cota compárese con $\mathcal{S} = 636'5\ldots$.

El procedimiento del ejemplo se puede enunciar en general, lo cual ilustra el uso habitual de la sumación por partes para deshacerse de coeficientes monótonos.

Corolario 0.2. *Si* $(a_n)_{n=1}^{N}$ *es una sucesión real monótona no creciente y positiva, entonces*

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Big| \le a_1 \sup_{1 \le n \le N} |S_n|.$$

A veces es útil disponer de una variante "continua" de la sumación por partes conteniendo una integral.

Lema 0.3 (Lema de Abel)**.** *Sea* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión arbitraria de números complejos y sea* $C(t) = \sum_{n \le t} c_n$. *Dado* $x \ge 1$, *para cualquier* $g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, $g \in C^1$, *se verifica*

$$\sum_{n \le x} c_n g(n) = C(x) g(x) - \int_1^x C(t) g'(t)\, dt.$$

DEM.: Basta aplicar sumación por partes con $N = xM$ (o su parte entera, si no es entero), $a_n = g(n/M)$ y b_n definido como $c_{n/M}$ si $M|n$ y $b_n = 0$ en otro caso. Cuando $M \to \infty$ se tiene el resultado deseado. Otra prueba, demasiado avanzada pero muy reveladora, consiste en observar que la derivada de la función escalonada $C(t)$ es $\sum c_n \delta(t-n)$ con δ la delta de Dirac. El lema de Abel se reduce entonces a integrar por partes. ■

Ejemplo . Aplicando el lema de Abel con $c_n = 1$ y $g(t) = 1/t$ se deduce

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2}\,dt = \log x + \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]-t}{t^2}\,dt$$

donde, como es habitual, $[x]$ denota la parte entera de x. Observando que $\int_1^x = \int_1^\infty - \int_x^\infty =$ cte $+ O(1/x)$, se llega al resultado clásico **[Sp]** afirmando que $\sum_{n\le x} n^{-1} = \log x + \gamma + O(1/x)$, donde $\gamma = 0'577\ldots$ es una constante llamada *constante de Euler.*

La siguiente fórmula de sumación es menos elemental pero mucho más poderosa. Recuérdese que la transformada de Fourier de f, $\widehat{f}$, se define como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\xi x)\,dx$$

donde aquí y en lo sucesivo $e(t)$ denota la exponencial compleja $e^{2\pi i t}$.

Lema 0.4 (Fórmula de sumación de Poisson)**.** *Sea f una función de decaimiento rápido, entonces*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

Nota: El lema admite una generalización obvia a dimensiones mayores, $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, utilizando la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^d$ y sumando en $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$. Además en cualquier dimensión la regularidad se puede relajar mucho por densidad.

DEM.: Sean las funciones regulares periódicas dadas por $F(x) = \sum f(x+n)$ y $G(x) = \sum \widehat{f}(n) e(nx)$. El k-ésimo coeficiente de Fourier de F es $\sum \int_0^1 f(t+n) e(-kt)\,dt = \widehat{f}(n)$ que coincide con el de G. Por tanto $F = G$, en particular $F(0) = G(0)$. ■

Ejemplo . Sea $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ con $t > 0$. Aplicando la fórmula de sumación de Poisson con $f(x) = e^{-\pi t x^2}$, se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/t}, \qquad \text{es decir} \quad \theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t).$$

Por ejemplo, la serie $\theta(0'01) = \sum e^{-\pi n^2 0'01}$ es costosa de evaluar con precisión empleando una calculadora de bolsillo, debido a la lenta convergencia inicial. La fórmula anterior permite asegurar $\theta(0'01) \approx 10$, que es cierto con una precisión de más de 100 decimales.

La siguiente fórmula de sumación se suele enunciar introduciendo los números y polinomios de Bernoulli **[Sp]**, **[Gr-Ry]**. Con vistas a simplificar la demostración aquí consideraremos en su lugar una variante a propósito.

Sea $E_1(x) = x - 1/2$ y considérense los polinomios $E_2 = -\int E_1$, $E_3 = -\int E_2$, ... con la constante de integración ajustada para que tengan integral nula en $[0,1]$. De aquí $E_n(0) = E_n(1)$ si $n > 1$ (de hecho estos números son nulos para $n > 1$ impar). Por ejemplo, $E_2(x) = -x^2/2 + x/2 - 1/12$ y $E_3(x) = x^3/6 - x^2/4 + x/12$.

Lema 0.5 (Fórmula de sumación de Euler-Mac Laurin). *Sea $N, M \in \mathbb{Z}^+$, si $f \in C^M([1,N])$ se verifica*

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(t)\,dt + f(1) + \sum_{m=1}^{M} E_m(0)\big(f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(N)\big) + \int_1^N E_M(t-[t])f^{(M)}(t)\,dt.$$

<u>DEM.</u>: La función $E_1(x-[x]) = x - [x] - 1/2$ tiene derivada constante 1 en cada intervalo $(n, n+1)$, de donde es fácil deducir integrando por partes:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(t)\,dt + \frac{1}{2}\big(f(1) + f(N)\big) + \int_1^N E_1(t-[t])f'(t)\,dt,$$

que es el caso $M = 1$ ya que $E_1(0) = -1/2$.

Por otro lado, Integrando por partes (nótese que $E_{M+1}(t-[t])$ es C^1 a trozos)

$$\int_1^N E_M(t-[t])f^{(M)}(t)\,dt = -E_{M+1}(t-[t])f^{(M)}(t)\Big|_1^N + \int_1^N E_{M+1}(t-[t])f^{(M+1)}(t)\,dt$$

y el caso general se sigue por inducción. ∎

<u>Ejemplo</u>. Sea $f(x) = x^3$. Tomando $M = 4$ en la fórmula de Euler-Mac Laurin se deduce

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^4 - 1}{4} + 1 - \frac{1}{2}(1 - N^3) - \frac{1}{12}(3 - 3N^2) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

Fórmulas similares se pueden obtener para otras potencias.

0.3. Cosas que deberíamos saber

En lo sucesivo emplearemos algunos resultados básico sdel Análisis Real y Complejo, los cuales mencionaremos rápidamente a continuación para que nadie tenga que sonrojarse preguntándolas.

Si D es un dominio simplemente conexo con frontera regular ∂D, la *fórmula integral de Cauchy* afirma que para $a \in D$ y f holomorfa en un dominio que contiene a D se cumple

$$f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{con } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si f en lugar de ser holomorfa es meromorfa, en cada punto $z_k \in D$ en el que tiene una singularidad se pueden hallar $c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{Nk}$ tales que $f(z) - c_{1k}/z - c_{2k}/z^2 - \ldots - c_{Nk}/z^N$ sea holomorfa en un entorno de z_k. Al coeficiente c_{1k} se le llama *residuo de f en z_k*. Repitiendo este procedimiento en todos los puntos singulares y aplicando la fórmula integral de Cauchy, se deduce el *teorema de los residuos*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_k c_{1k}.$$

Pasemos ahora al Análisis Armónico. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función periódica de periodo uno, se definen sus coeficientes de Fourier y su serie de Fourier como

$$a_n = \int_0^1 f(t) e(-nt)\, dt \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx).$$

Para $f \in L^2([0,1])$ la serie de Fourier converge a f en sentido L^2 (y si es suficientemente regular, en sentido usual). Igualando la norma dos de f y de su serie de Fourier se llega a la *identidad de Plancherel*:

$$\int_0^1 |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

que por polarización lleva a la *identidad de Parseval*:

$$\int_0^1 \overline{f} g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n} b_n$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f y g respectivamente (ambas en L^2).

El análogo en el caso no periódico de los coeficientes de Fourier es la transformada de Fourier, ya introducida anteriormente:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-\xi t)\,dt.$$

Si se entiende la integral de forma adecuada se puede dar sentido a la definición para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ y se tiene el análogo de las fórmulas anteriores:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}|^2 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}g = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}\,\widehat{g}$$

Para no complicarse la vida con la regularidad uno puede restringirse a las *funciones de decaimiento rápido* (clase de Schwarz), caracterizadas por la propiedad de que ellas y sus derivadas decaen más rápido que cualquier potencia. Sus transformadas de Fourier tienen esta misma propiedad.

Como colofón, definiremos cierta función compleja clásica que generaliza al factorial y que aparecerá sobre todo en el primer capítulo.

Es fácil probar integrando por partes que

$$(n-1)! = \int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt.$$

La integral del segundo miembro está bien definida si $n \in \mathbb{R}^+$ e incluso si n es un número complejo en el semiplano derecho. Con esta idea se define para $\operatorname{Re} s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Esta función hereda del factorial la propiedad $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. De esta forma se puede extender la definición a $-1 < \operatorname{Re} s \leq 0$ como $\Gamma(s) = s^{-1}\Gamma(s+1)$. Repitiendo este argumento Γ queda definida como una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos en $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$. Casi todas las propiedades de la función Γ se pueden deducir de la fórmula (véase **[Ci-Co]**) $1/\Gamma(s) = se^{\gamma s}\prod(1+s/n)e^{-s/n}$ donde n recorre $\mathbb{Z}^+$ y γ es la constante de Euler. En el primer capítulo emplearemos $\log|\Gamma(s)| = O(\log|s|)$ siempre que s esté retirado de los polos de Γ.